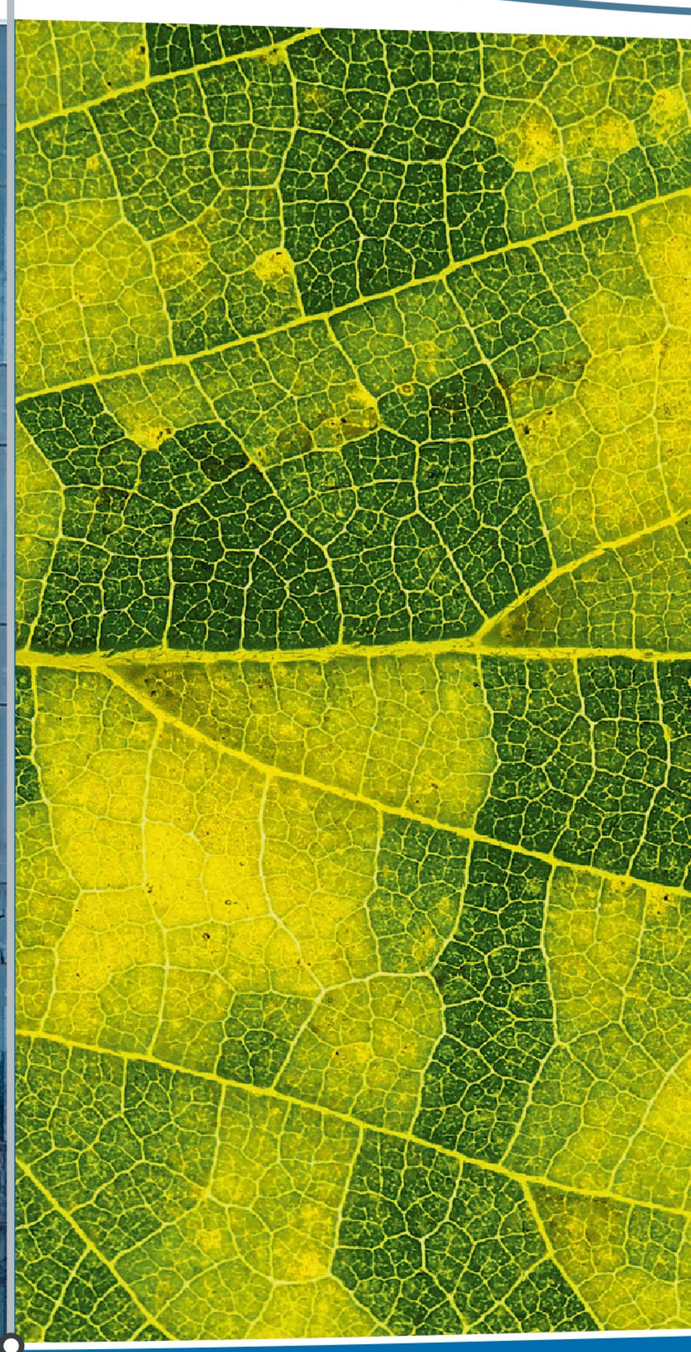
Lambacher Schweizer

Mathematik für Gymnasien

12



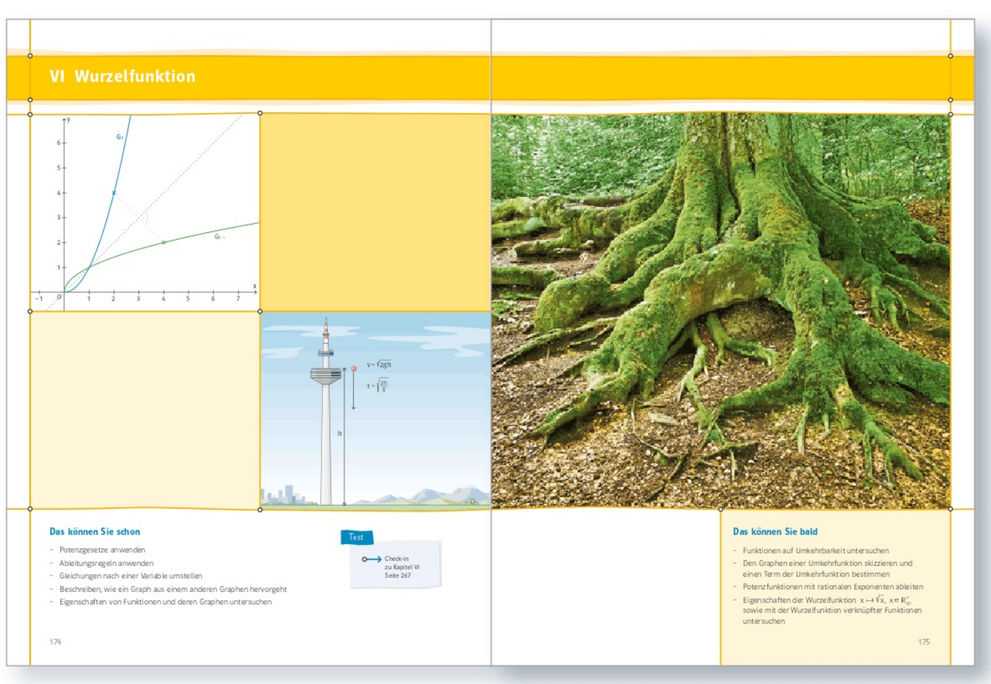
Bayern

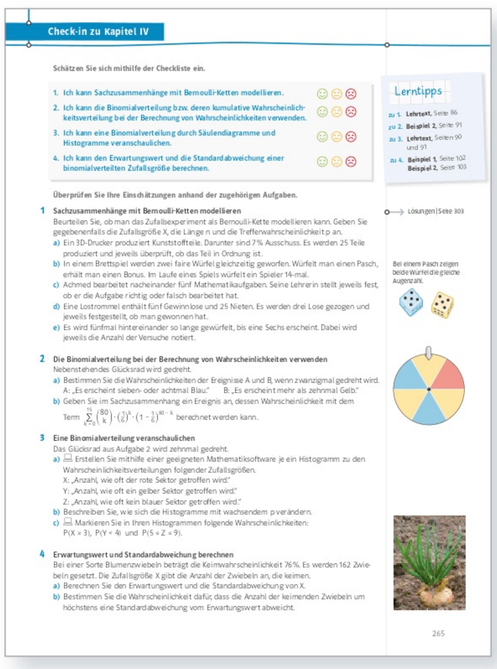
Klett

So lernen Sie mit dem Lambacher Schweizer

Start in ein neues Kapitel

Auf den Auftaktseiten finden Sie die wichtigsten Voraussetzungen für das neue Kapitel sowie die neuen Inhalte aufgelistet.



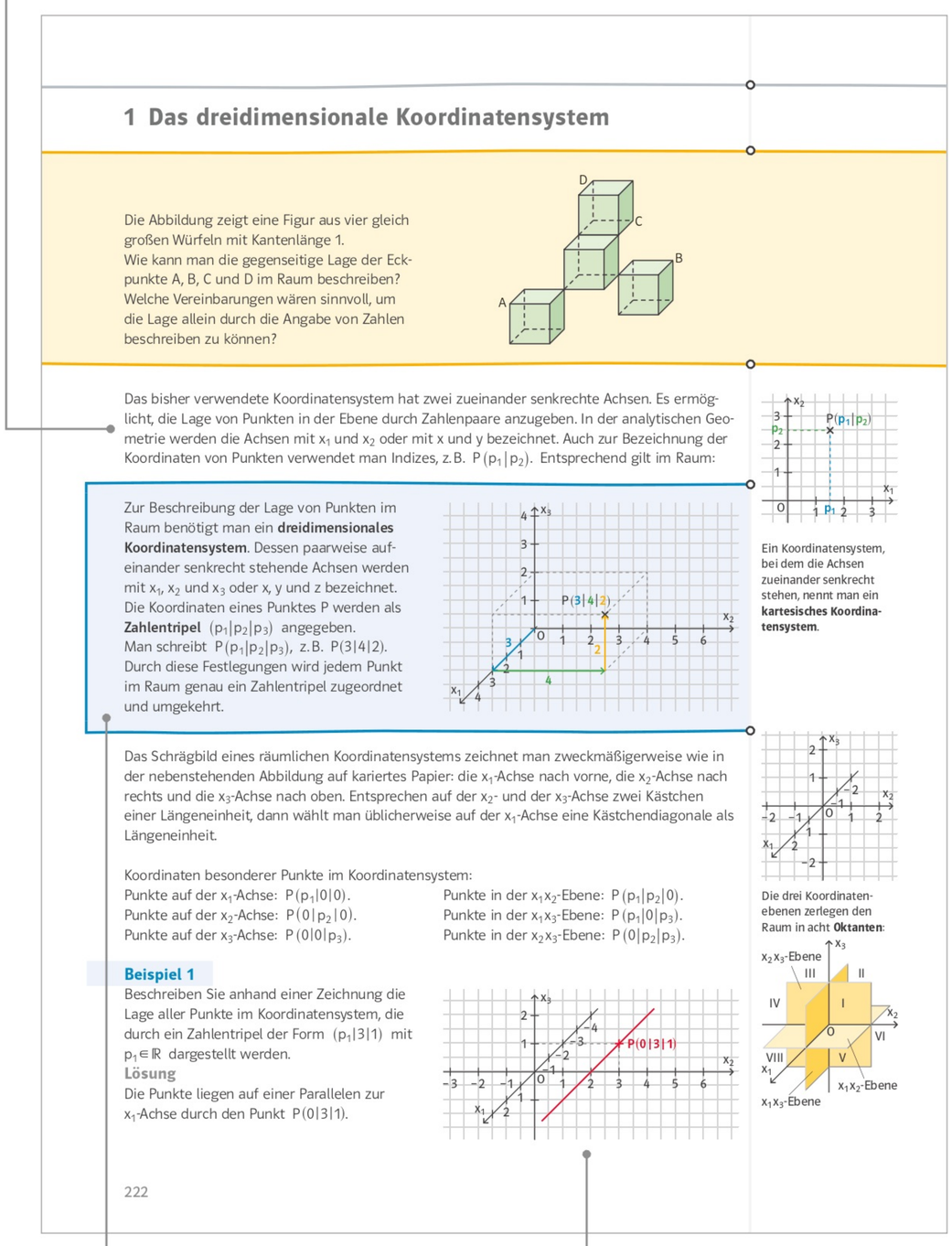


Check-in

Überprüfen Sie das Wissen, das Sie für den Einstieg in das neue Kapitel benötigen. (*Lösungen* finden Sie am Ende des Buches.)

Verstehen und Üben

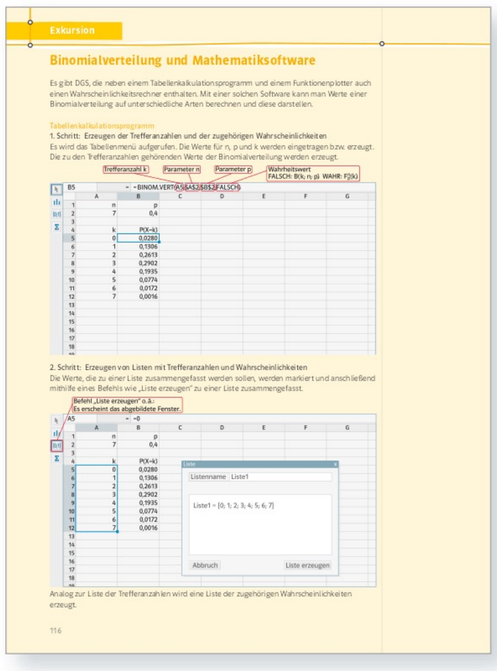
Der Lehrtext erläutert neue Inhalte und erklärt, wie der neue Stoff mit bereits Gelerntem zusammenhängt.



Im **Merkkasten** ist das Wichtigste zusammengefasst.

Hier finden Sie **Beispielaufgaben** und -lösungen.

Erkunden und Anwenden



Exkursionen

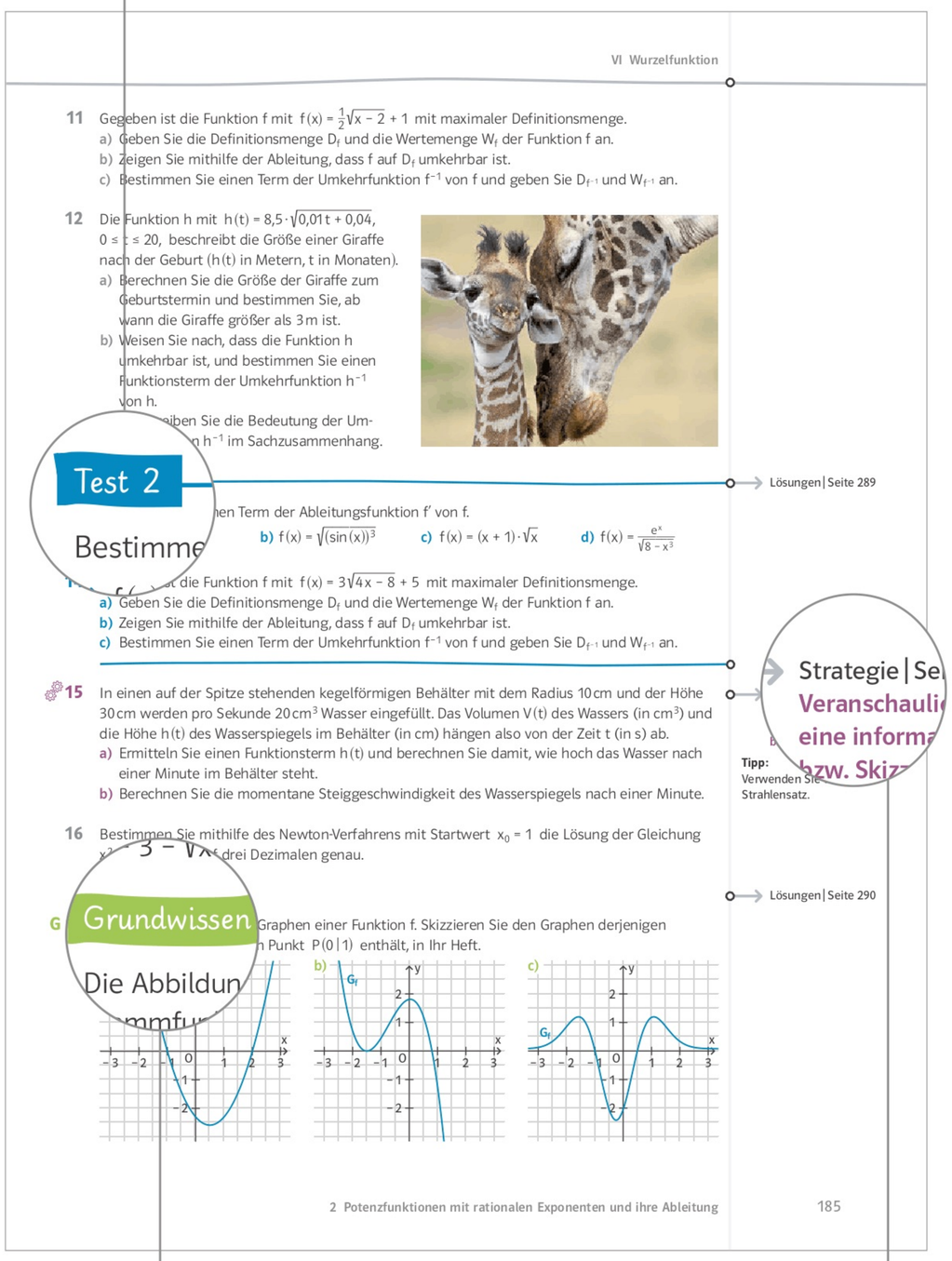
regen an, sich vertiefend mit spannenden Inhalten zu befassen.

Symbole

- Strategisch vorgehen
- Partnerarbeit
- Gruppenarbeit
- Internetrecherche oder Einsatz von Computer-Programmen
- Hilfsmittelfrei
  Mit diesem Symbol werden beispielhaft Aufgaben ausgezeichnet, die hierfür besonders gut geeignet sind.

Wiederholen und Überprüfen

Mit den **Test**-Aufgaben prüfen Sie, ob Sie den neuen Stoff verstanden haben. (*Lösungen* finden Sie am Ende des Buches.)


VI Wurzelfunktion

11 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x-2} + 1$ mit maximaler Definitionsmenge.
a) Geben Sie die Definitionsmenge D_f und die Wertemenge W_f der Funktion f an.
b) Zeigen Sie mithilfe der Ableitung, dass f auf D_f umkehrbar ist.
c) Bestimmen Sie einen Term der Umkehrfunktion f^{-1} von f und geben Sie $D_{f^{-1}}$ und $W_{f^{-1}}$ an.

12 Die Funktion h mit $h(t) = 8{,}5 \cdot \sqrt{0{,}01t + 0{,}04}$, $0 \le t \le 20$, beschreibt die Größe einer Giraffe nach der Geburt (h(t) in Metern, t in Monaten).
a) Berechnen Sie die Größe der Giraffe zum Geburtstermin und bestimmen Sie, ab wann die Giraffe größer als 3 m ist.
b) Weisen Sie nach, dass die Funktion h umkehrbar ist, und bestimmen Sie einen Funktionsterm der Umkehrfunktion h^{-1} von h.
c) [illegible] Sie die Bedeutung der Umkehrfunktion h^{-1} im Sachzusammenhang.

Test 2

Bestimme[illegible] → Lösungen | Seite 289

[illegible] einen Term der Ableitungsfunktion f' von f.
b) $f(x) = \sqrt{(\sin(x))^3}$ c) $f(x) = (x+1)\cdot\sqrt{x}$ d) $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{8-x^3}}$

[illegible] die Funktion f mit $f(x) = 3\sqrt{4x-8} + 5$ mit maximaler Definitionsmenge.
a) Geben Sie die Definitionsmenge D_f und die Wertemenge W_f der Funktion f an.
b) Zeigen Sie mithilfe der Ableitung, dass f auf D_f umkehrbar ist.
c) Bestimmen Sie einen Term der Umkehrfunktion f^{-1} von f und geben Sie $D_{f^{-1}}$ und $W_{f^{-1}}$ an.

Strategie | Se[illegible]
Veranschauli[illegible]
eine informa[illegible]
bzw. Skiz[illegible]

15 In einen auf der Spitze stehenden kegelförmigen Behälter mit dem Radius 10 cm und der Höhe 30 cm werden pro Sekunde 20 cm^3 Wasser eingefüllt. Das Volumen V(t) des Wassers (in cm^3) und die Höhe h(t) des Wasserspiegels im Behälter (in cm) hängen also von der Zeit t (in s) ab.
a) Ermitteln Sie einen Funktionsterm h(t) und berechnen Sie damit, wie hoch das Wasser nach einer Minute im Behälter steht.
b) Berechnen Sie die momentane Steiggeschwindigkeit des Wasserspiegels nach einer Minute.

Tipp: Verwenden Sie [illegible] Strahlensatz.

16 Bestimmen Sie mithilfe des Newton-Verfahrens mit Startwert $x_0 = 1$ die Lösung der Gleichung $x^2 - 3 = \sqrt{x}$ [illegible] drei Dezimalen genau.

→ Lösungen | Seite 290

G Grundwissen

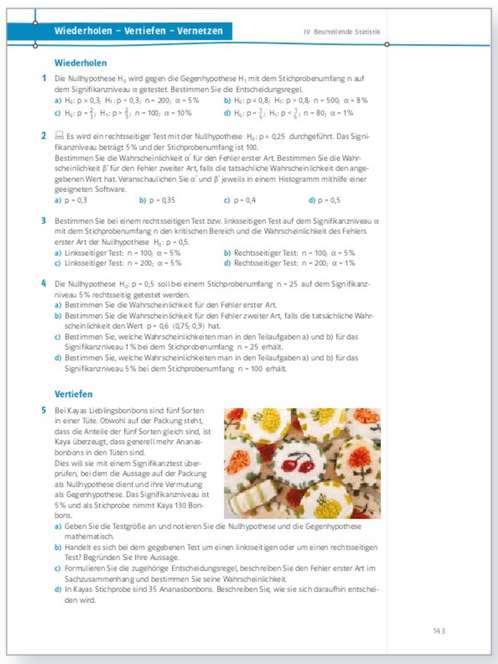
Die Abbildun[illegible] Graphen einer Funktion f. Skizzieren Sie den Graphen derjenigen [illegible] Punkt P(0|1) enthält, in Ihr Heft.

2 Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten und ihre Ableitung 185

Prüfen Sie mit **Grundwissen Test**, ob der Stoff aus früheren Kapiteln oder Klassen noch sitzt. (*Lösungen* finden Sie am Ende des Buches.)

Differenzierung
Die Aufgaben sind in drei Blöcke geteilt. Im ersten sind Aufgaben, welche die grundlegende Basis sichern. Im zweiten Block finden Sie Aufgaben im mittleren und höheren Anforderungsniveau. Im dritten Block sind die Aufgaben zum Erforschen und Knobeln.

Dieser Hinweis zeigt Ihnen, dass diese Aufgabe mithilfe einer bestimmten **Strategie** gelöst werden kann.


Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen — IV Beurteilende Statistik

Wiederholen

1 Die Nullhypothese H_0 wird gegen die Gegenhypothese H_1 mit dem Stichprobenumfang n auf dem Signifikanzniveau α getestet. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.
a) $H_0: p = 0{,}3$; $H_1: p < 0{,}3$; $n = 200$; $\alpha = 5\%$ b) $H_0: p = 0{,}8$; $H_1: p > 0{,}8$; $n = 500$; $\alpha = 8\%$
c) $H_0: p = \frac{2}{3}$; $H_1: p > \frac{2}{3}$; $n = 100$; $\alpha = 10\%$ d) $H_0: p = \frac{1}{6}$; $H_1: p < \frac{1}{6}$; $n = 80$; $\alpha = 1\%$

2 Es wird ein rechtsseitiger Test mit der Nullhypothese $H_0: p = 0{,}25$ durchgeführt. Das Signifikanzniveau beträgt 5 % und der Stichprobenumfang ist 100.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit α' für den Fehler erster Art. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit β' für den Fehler zweiter Art, falls die tatsächliche Wahrscheinlichkeit den angegebenen Wert hat. Veranschaulichen Sie α' und β' jeweils in einem Histogramm mithilfe einer geeigneten Software.
a) p = 0,3 b) p = 0,35 c) p = 0,4 d) p = 0,5

3 Bestimmen Sie bei einem rechtsseitigen Test bzw. linksseitigen Test auf dem Signifikanzniveau α mit dem Stichprobenumfang n den kritischen Bereich und die Wahrscheinlichkeit des Fehlers erster Art der Nullhypothese $H_0: p = 0{,}5$.
a) Linksseitiger Test: n = 100, α = 5 % b) Rechtsseitiger Test: n = 100, α = 5 %
c) Linksseitiger Test: n = 200, α = 5 % d) Rechtsseitiger Test: n = 200, α = 1 %

4 Die Nullhypothese $H_0: p = 0{,}5$ soll bei einem Stichprobenumfang n = 25 auf dem Signifikanzniveau 5 % rechtsseitig getestet werden.
a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art.
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art, falls die tatsächliche Wahrscheinlichkeit den Wert p = 0,6 (0,75; 0,9) hat.
c) Bestimmen Sie, welche Wahrscheinlichkeiten man in den Teilaufgaben a) und b) für das Signifikanzniveau 1 % bei dem Stichprobenumfang n = 25 erhält.
d) Bestimmen Sie, welche Wahrscheinlichkeiten man in den Teilaufgaben a) und b) für das Signifikanzniveau 5 % bei dem Stichprobenumfang n = 100 erhält.

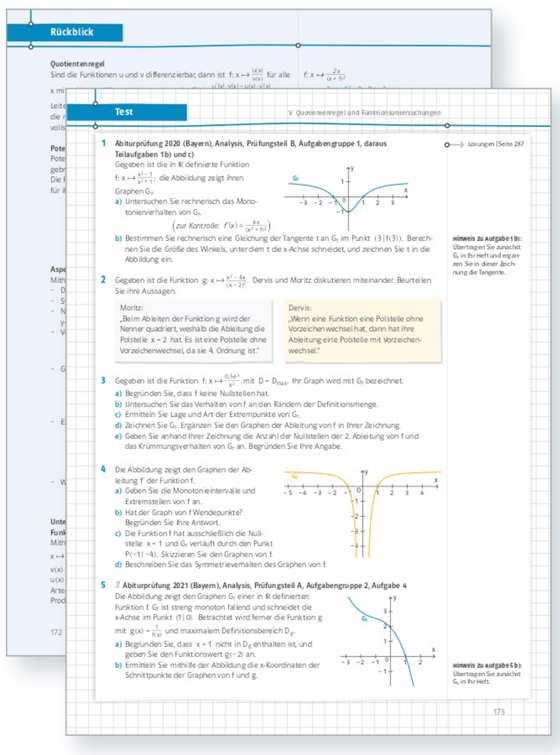
Vertiefen

5 Bei Kayas Lieblingsbonbons sind fünf Sorten in einer Tüte. Obwohl auf der Packung steht, dass die Anteile der fünf Sorten gleich sind, ist Kaya überzeugt, dass generell mehr Ananasbonbons in den Tüten sind.
Dies will sie mit einem Signifikanztest überprüfen, bei dem die Aussage auf der Packung als Nullhypothese dient und ihre Vermutung als Gegenhypothese. Das Signifikanzniveau ist 5 % und als Stichprobe nimmt Kaya 130 Bonbons.
a) Geben Sie die Testgröße an und notieren Sie die Nullhypothese und die Gegenhypothese mathematisch.
b) Handelt es sich bei dem gegebenen Test um einen linksseitigen oder um einen rechtsseitigen Test? Begründen Sie Ihre Aussage.
c) Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel, beschreiben Sie den Fehler erster Art im Sachzusammenhang und bestimmen Sie seine Wahrscheinlichkeit.
d) In Kayas Stichprobe sind 35 Ananasbonbons. Beschreiben Sie, wie sie sich daraufhin entscheiden wird.

14 3

Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen

Hier können Sie alle Inhalte des Kapitels wiederholen, vertiefen und mit anderen Inhalten vernetzen.


Rückblick

Quotientenregel
Sind die Funktionen u und v differenzierbar, dann ist [illegible] für alle [illegible]

Test — V Quotientenregel und Funktionsuntersuchungen

1 **Abiturprüfung 2020 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, daraus Teilaufgaben 1b) und c)** → Lösungen | Seite 287
Gegeben ist die in ℝ definierte Funktion f: $x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+1}$; die Abbildung zeigt ihren Graphen G_f.
a) Untersuchen Sie rechnerisch das Monotonieverhalten von G_f.
(zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$)
b) Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Tangente t an G_f im Punkt (3 | f(3)). Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem t die x-Achse schneidet, und zeichnen Sie t in die Abbildung ein.
Hinweis zu Aufgabe 1 b): Übertragen Sie zunächst G_f in Ihr Heft und ergänzen Sie in dieser Zeichnung die Tangente.

2 Gegeben ist die Funktion g: $x \mapsto \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$. Dervis und Moritz diskutieren miteinander. Beurteilen Sie ihre Aussagen.
Moritz: „Beim Ableiten der Funktion g wird der Nenner quadriert, weshalb die Ableitung die Polstelle x = 2 hat. Es ist eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel, da sie 4. Ordnung ist."
Dervis: „Wenn eine Funktion eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel hat, dann hat ihre Ableitung eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel."

3 Gegeben ist die Funktion f: $x \mapsto \frac{0{,}5e^x}{e^x}$ mit $D = D_{max}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.
a) Begründen Sie, dass f keine Nullstellen hat.
b) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern der Definitionsmenge.
c) Ermitteln Sie Lage und Art der Extrempunkte von G_f.
d) Zeichnen Sie G_f. Ergänzen Sie den Graphen der Ableitung von f in Ihrer Zeichnung.
e) Geben Sie anhand Ihrer Zeichnung die Anzahl der Nullstellen der 2. Ableitung von f und das Krümmungsverhalten von G_f an. Begründen Sie Ihre Angabe.

4 Die Abbildung zeigt den Graphen der Ableitung f' der Funktion f.
a) Geben Sie die Monotonieintervalle und Extremstellen von f an.
b) Hat der Graph von f Wendepunkte? Begründen Sie Ihre Antwort.
c) Die Funktion f hat ausschließlich die Nullstelle x = 1 und G_f verläuft durch den Punkt P(−1 | −4). Skizzieren Sie den Graphen von f.
d) Beschreiben Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f.

5 **Abiturprüfung 2021 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 4**
Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in ℝ definierten Funktion f. G_f ist streng monoton fallend und schneidet die x-Achse im Punkt (1 | 0). Betrachtet wird ferner die Funktion g mit $g(x) = -\frac{1}{f(x)}$ und maximalem Definitionsbereich D_g.
a) Begründen Sie, dass x = 1 nicht in D_g enthalten ist, und geben Sie den Funktionswert g(−2) an.
b) Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f und g.
Hinweis zu Aufgabe 5 b): Übertragen Sie zunächst G_f in Ihr Heft.

173

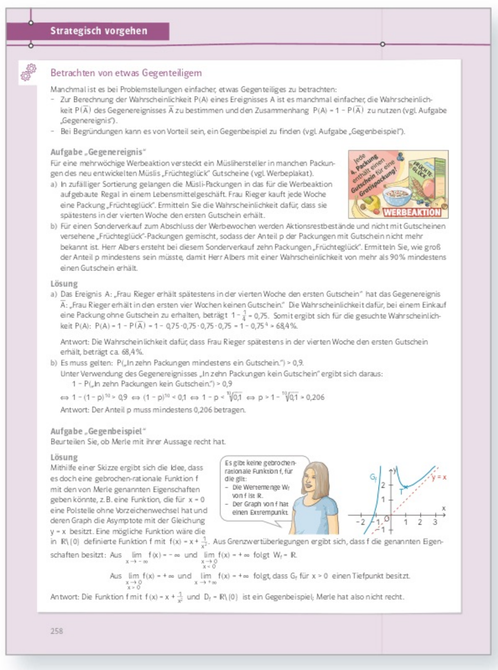
Rückblick

Zum schnellen Nachschlagen, was im Kapitel gemacht wurde.

Test

Am Ende des Kapitels können Sie Ihren Wissensstand selbstständig überprüfen. (*Lösungen* finden Sie am Ende des Buches.)

Strategisch vorgehen


Strategisch vorgehen

Betrachten von etwas Gegenteiligem

Manchmal ist es bei Problemstellungen einfacher, etwas Gegenteiliges zu betrachten:
- Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit P(A) eines Ereignisses A ist es manchmal einfacher, die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{A})$ des Gegenereignisses $\overline{A}$ zu bestimmen und den Zusammenhang $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ zu nutzen (vgl. Aufgabe „Gegenereignis").
- Bei Begründungen kann es von Vorteil sein, ein Gegenbeispiel zu finden (vgl. Aufgabe „Gegenbeispiel").

Aufgabe „Gegenereignis"
Für eine mehrwöchige Werbeaktion versteckt ein Müslihersteller in manchen Packungen des neu entwickelten Müslis „Früchteglück" Gutscheine (vgl. Werbeplakat).
a) In zufälliger Sortierung gelangen die Müsli-Packungen in das für die Werbeaktion aufgebaute Regal in einem Lebensmittelgeschäft. Frau Rieger kauft jede Woche eine Packung „Früchteglück". Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie spätestens in der vierten Woche den ersten Gutschein erhält.
b) Für einen Sonderverkauf zum Abschluss der Werbewochen werden Aktionsrestbestände und nicht mit Gutscheinen versehene „Früchteglück"-Packungen gemischt, sodass der Anteil p der Packungen mit Gutschein nicht mehr bekannt ist. Herr Albers ersteht bei diesem Sonderverkauf zehn Packungen „Früchteglück". Ermitteln Sie, wie groß der Anteil p mindestens sein müsste, damit Herr Albers mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % mindestens einen Gutschein erhält.

Lösung
a) Das Ereignis A: „Frau Rieger erhält spätestens in der vierten Woche den ersten Gutschein" hat das Gegenereignis $\overline{A}$: „Frau Rieger erhält in den ersten vier Wochen keinen Gutschein". Die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Einkauf eine Packung ohne Gutschein zu erhalten, beträgt $1 - \frac{1}{4} = 0{,}75$. Somit ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit P(A): $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 = 1 - 0{,}75^4 \approx 68{,}4\,\%$.
Antwort: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Frau Rieger spätestens in der vierten Woche den ersten Gutschein erhält, beträgt ca. 68,4 %.
b) Es muss gelten: $P(\text{„In zehn Packungen mindestens ein Gutschein"}) \ge 0{,}9$.
Unter Verwendung des Gegenereignisses „In zehn Packungen kein Gutschein" ergibt sich daraus:
$1 - P(\text{„In zehn Packungen kein Gutschein"}) > 0{,}9$
$\Leftrightarrow 1 - (1-p)^{10} > 0{,}9 \Leftrightarrow (1-p)^{10} < 0{,}1 \Leftrightarrow 1 - p < \sqrt[10]{0{,}1} \Leftrightarrow p > 1 - \sqrt[10]{0{,}1} \approx 0{,}206$
Antwort: Der Anteil p muss mindestens 0,206 betragen.

Aufgabe „Gegenbeispiel"
Beurteilen Sie, ob Merle mit ihrer Aussage recht hat.

Lösung
Mithilfe einer Skizze ergibt sich die Idee, dass es doch eine gebrochen-rationale Funktion f mit den von Merle genannten Eigenschaften geben könnte, z. B. eine Funktion, die für x = 0 eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel hat und deren Graph die Asymptote mit der Gleichung y = x besitzt. Eine mögliche Funktion wäre die in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ definierte Funktion f mit $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$. Aus Grenzwertüberlegungen ergibt sich, dass f die genannten Eigenschaften besitzt: Aus $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = +\infty$ folgt $W_f = \mathbb{R}$.
Aus $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ folgt, dass G_f für x > 0 einen Tiefpunkt besitzt.
Antwort: Die Funktion f mit $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ und $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist ein Gegenbeispiel, Merle hat also nicht recht.

258

Auf den Seiten **Strategisch vorgehen** finden Sie Tipps, wie man Aufgaben, deren Lösungsweg nicht unmittelbar ersichtlich ist, lösen kann. Strategien und Hilfsmittel werden Ihnen anhand von Beispielen erläutert.

Zusatzmaterialien zu diesem Band für Schülerinnen und Schüler:
- Arbeitsheft Lambacher Schweizer 12 mit Mediensammlung (978-3-12-735025-8)
- Schulaufgabentrainer Lambacher Schweizer 12 (978-3-12-735029-6)
- Lösungen Lambacher Schweizer 12 (978-3-12-735023-4)

Dr. Theophil Lambacher (13.04.1899 – 14.12.1981) und **Wilhelm Schweizer** (11.11.1901 – 23.07.1990) lehrten beide Mathematik an der Schule. Theophil Lambacher wurde danach Oberschulamtspräsident und Ministerialrat am Kultusministerium, Wilhelm Schweizer arbeitete als Schulleiter, Fachleiter am Seminar und Dozent an der Universität. Der erste Band des Lambacher Schweizer erschien 1946: Lambacher Schweizer Mathematik für höhere Schulen, Mittelstufe 1. Teil enthielt auf 91 Seiten Algebra und Geometrie für die Klasse 7.

1. Auflage 1 5 4 3 2 1 | 2028 27 26 25 24

Alle Drucke dieser Auflage sind unverändert und können im Unterricht nebeneinander verwendet werden.
Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr des Druckes.

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Das Gleiche gilt für die Software und das Begleitmaterial. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen oder in den Lizenzbestimmungen genannten Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis § 60a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und/oder in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Fotomechanische, digitale oder andere Wiedergabeverfahren nur mit Genehmigung des Verlages.
Jede öffentliche Vorführung, Sendung oder sonstige gewerbliche Nutzung oder deren Duldung sowie Vervielfältigung (z. B. Kopieren, Herunterladen oder Streamen) und Verleih und Vermietung ist nur mit ausdrücklicher Genehmigung des Ernst Klett Verlages erlaubt.
Nutzungsvorbehalt: Die Nutzung für Text und Data Mining (§ 44b UrhG) ist vorbehalten. Dies betrifft nicht Text und Data Mining für Zwecke der wissenschaftlichen Forschung (§ 60d UrhG).

Lehrmedien/Lehrprogramm nach § 14 JuSchG

© Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2024. Alle Rechte vorbehalten. www.klett.de
Das vorliegende Material dient ausschließlich gemäß § 60b UrhG dem Einsatz im Unterricht an Schulen.

Autorinnen und Autoren: Jürgen Appel, Manfred Baum, Martin Bellstedt, Dr. Gerhard Bitsch, Boris Boor, Dr. Dieter Brandt, Gerhard Brüstle, Heidi Buck (†), Jürgen Denker, Günther Dopfer, Prof. Rolf Dürr, Dr. Sigrid Flath, Prof. Hans Freudigmann, Inga Giersemehl, Herbert Götz, Dieter Greulich, Dr. Frieder Haug, Manfred Herbst, Edmund Herd, Carolin Herrmann, Maren Herrmann, Dr. Jörg Heuß, Prof. Detlef Hoche (†), Heike Jacoby-Schäfer, Thomas Jörgens, Thorsten Jürgensen-Engl, Christine Kestler, Dr. Stefan Knorr, Dr. Michael Kölle, Ingrid Kolupa, Andreas König, Ulrike Kopizenski, Hans-Georg Kosuch, Carsten Kreutz, Prof. Dr. Detlef Lind, Prof. Dr. Hinrich Lorenzen, Dr. Johannes Novotný, Marion Rauscher, Rolf Reimer, Dr. Günther Reinelt, Dr. Ute Reinhardt, Dr. Wolfgang Riemer, Dr. Rebecca Roy, Alexander Ruf, Rüdiger Sandmann, Prof. Dr. Torsten Schatz, Hartmut Schermuly (†), Prof. August Schmid (†), Prof. Reinhard Schmitt-Hartmann, Prof. Dr. Michael Schmitz, Ulrich Schönbach, Siegfried Schwehr, Dr. Manfred Schwier (†), Dr. Maximilian Selinka, Raphaela Sonntag, Heike Spielmans, Michael Stanzel, Jörg Stark, Andrea Stühler, Barbara Sy, Thomas Thiessen, Dr. Heike Tomaschek, Dr. Thomas Weber, Prof. Dr. Ingo Weidig, Alexander Wollmann, Antje Zang, Dr. Peter Zimmermann, Prof. Manfred Zinser, Arnold Zitterbart

Entstanden in Zusammenarbeit mit dem Projektteam des Verlages.

Gestaltung: Petra Michel, Amberg
Titelbilder: Fassade: Getty Images (Moment/Roc Canals Photography), München; Blattstruktur: Getty Images (imageBROKER/Georg Stelzner), München
Satz: tiff.any GmbH, Berlin
Druck: Mohn Media Mohndruck GmbH, Gütersloh

Printed in Germany
ISBN 978-3-12-735020-3

Lambacher Schweizer

Mathematik für Gymnasien

12

Bayern

erarbeitet von

Johannes Biburger
Anke Frantzke
Manfred Herbst
Prof. Dr. Hinrich Lorenzen
Alexander Ruf
Prof. Dr. Michael Schmitz
Thomas Thiessen

Ernst Klett Verlag
Stuttgart · Leipzig · Dortmund

I Funktionenscharen, Stammfunktionen und weitere Ableitungsregeln

1	Funktionenscharen	6
2	Stammfunktionen	10
3	Ableitung von Sinus- und Kosinusfunktion	14
4	Produktregel	18
5	Verkettung von Funktionen	21
6	Kettenregel	25
	Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen	29
	Exkursion: Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion – ein Beweis	31
	Rückblick	32
	Test	33

II Natürliche Exponentialfunktion

1	Die natürliche Exponentialfunktion und ihre Ableitung	36
2	Ableitung und Grenzwerte von Verknüpfungen mit der e-Funktion	41
3	Natürlicher Logarithmus, Exponentialgleichungen und e-Funktion	46
4	Modellieren von Wachstums- und Abklingvorgängen	52
	Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen	58
	Exkursion: Die natürliche Exponentialfunktion und ihre Basis e	62
	Rückblick	64
	Test	65

III Zufallsgrößen und Binomialverteilung

1	Zufallsgrößen und deren Wahrscheinlichkeitsverteilung	68
2	Erwartungswert und Varianz einer Zufallsgröße	73
3	Ziehen aus einer Urne mit Beachtung der Reihenfolge	78
4	Ziehen aus einer Urne ohne Beachtung der Reihenfolge	82
5	Bernoulli-Experimente und Bernoulli-Ketten	86
6	Binomialverteilung	89
7	Modellieren mithilfe der Binomialverteilung	95
8	Erwartungswert und Varianz der Binomialverteilung	101
9	Axiomatische Definition von Wahrscheinlichkeit	107
	Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen	111
	Exkursion: Binomialverteilung und Mathematiksoftware	116
	Rückblick	118
	Test	119

IV Beurteilende Statistik

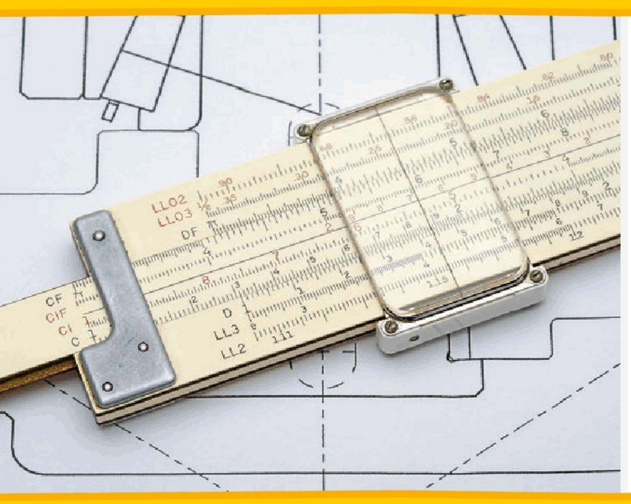
1	Einseitiger Hypothesentest	122
2	Fehler erster und zweiter Art	127
3	Konstruktion eines einseitigen Signifikanztests	135
	Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen	143
	Exkursion: Der Chi-Quadrat-Vierfeldertest	146
	Rückblick	148
	Test	149

V Quotientenregel und Funktionsuntersuchungen

1 Die Quotientenregel bei gebrochen-rationalen Funktionen 152
2 Untersuchung gebrochen-rationaler Funktionen 156
3 Die Quotientenregel und Untersuchung verknüpfter Funktionen 162
Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen 168
Exkursion: Die Regel von de L'Hôpital 171
Rückblick 172
Test 173

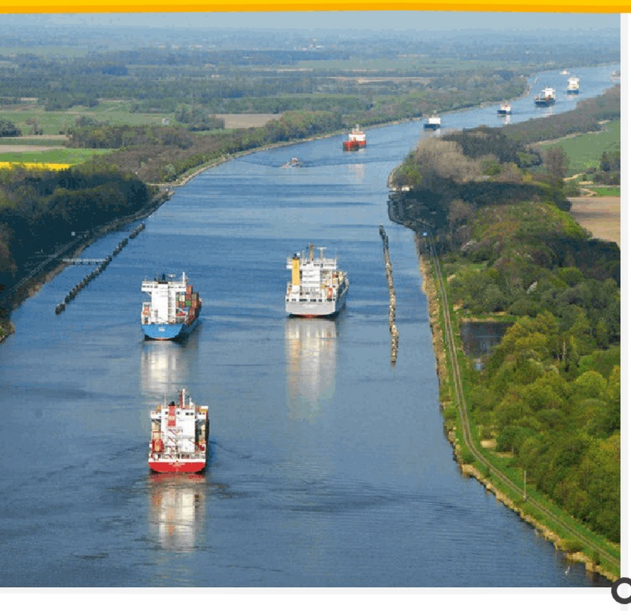
VI Wurzelfunktion

1 Die Umkehrfunktion 176
2 Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten und ihre Ableitung 181
3 Untersuchung von Verknüpfungen mit der Wurzelfunktion 186
Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen 192
Exkursion: Die Arkusfunktionen 194
Rückblick 196
Test 197



VII Natürliche Logarithmusfunktion

1 Die natürliche Logarithmusfunktion und ihre Ableitung 200
2 Ableitung und Grenzwerte von Verknüpfungen mit der ln-Funktion 205
3 Untersuchung von Verknüpfungen mit der ln-Funktion 209
Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen 214
Exkursion: Beschränktes Wachstum 216
Rückblick 218
Test 219

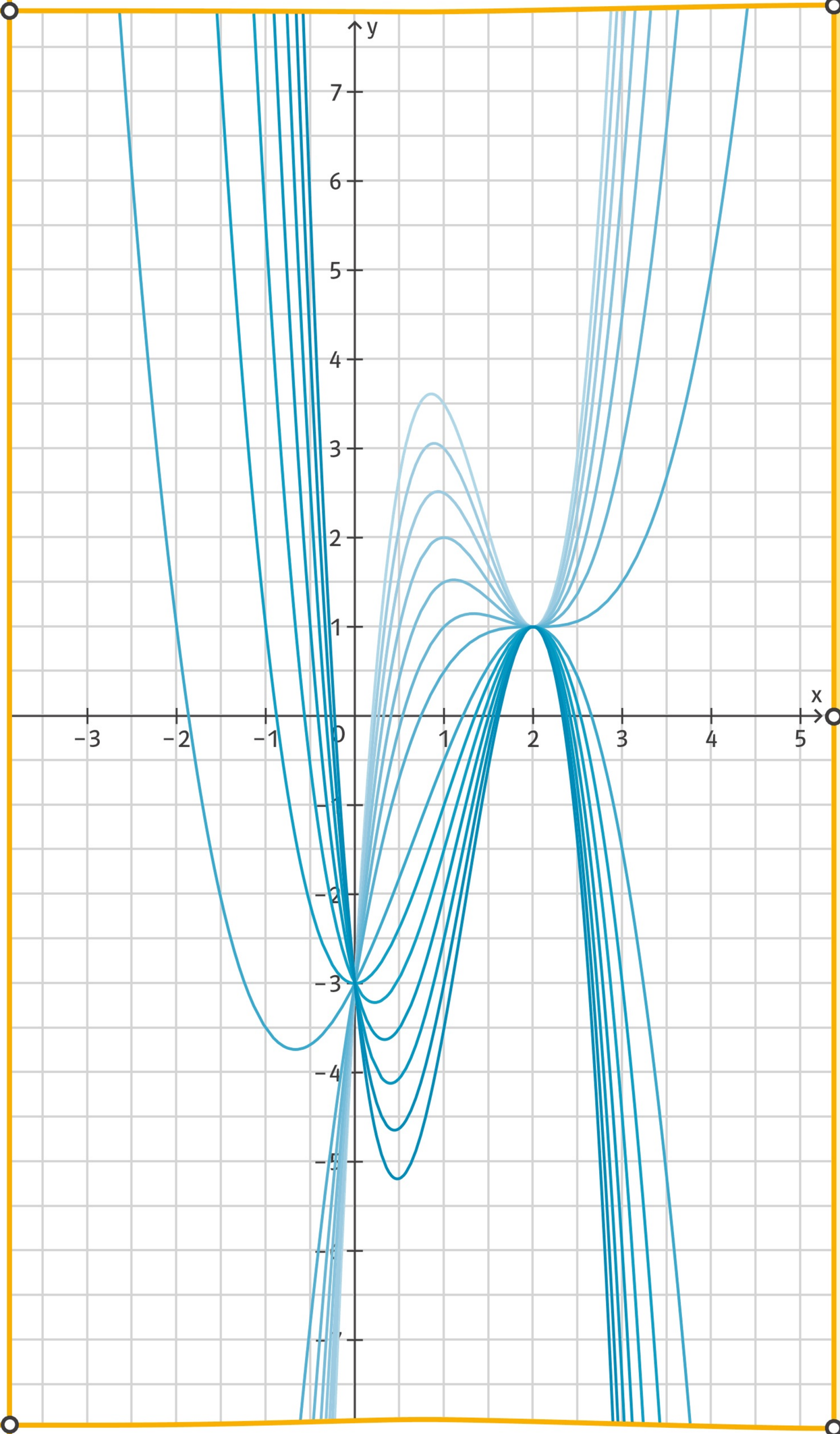


VIII Grundlagen der Koordinatengeometrie im Raum

1 Das dreidimensionale Koordinatensystem 222
2 Vektoren und Beträge von Vektoren 226
3 Addition und Subtraktion von Vektoren 230
4 Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl (S-Multiplikation) 234
5 Skalarprodukt und Winkelgrößen 238
6 Das Vektorprodukt 244
Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen 249
Exkursion: Vektoren in der Physik 252
Rückblick 254
Test 255

Strategisch vorgehen 256
Check-in 262
Lösungen zu den Kapiteln und Check-in-Aufgaben 270
Register 308
Bild- und Textquellen 312
Mathematische Begriffe und Bezeichnungen

I Funktionenscharen, Stammfunktionen und



$f(x) = 4x^5 - 3x^2 + 4x + 3$

Ableiten ↓ ↑ ?

$f'(x) = 20x^4 - 6x + 4 = g'(x)$

Ableiten ↑ ↓ ?

$g(x) = 4x^5 - 3x^2 + 4x - 7$

Das können Sie schon

- Die Steigung eines Graphen an einer Stelle bestimmen
- Die erste und zweite Ableitungsfunktion grafisch und rechnerisch bestimmen
- Die Gleichung einer Tangente an den Graphen und die Größe ihres Steigungswinkels bestimmen
- Funktionen auf Monotonie und Funktionsgraphen auf Krümmung untersuchen
- Lokale und globale Extremstellen sowie Wendestellen einer Funktion ermitteln

Test

Check-in
zu Kapitel I
Seite 262

weitere Ableitungsregeln

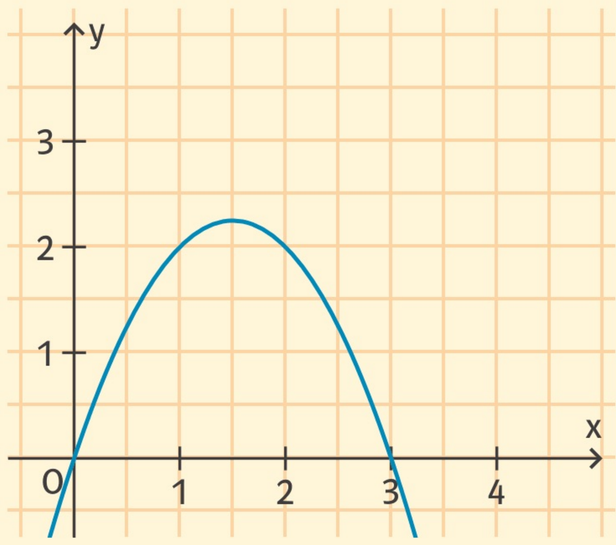
Das können Sie bald

- Funktionenscharen mit den Mitteln der Differential-rechnung untersuchen
- Stammfunktionen grafisch und rechnerisch bestimmen
- Ableitung der Sinus- bzw. Kosinusfunktion bestimmen
- Verknüpfte Funktionen mithilfe der Produkt- und der Kettenregel ableiten

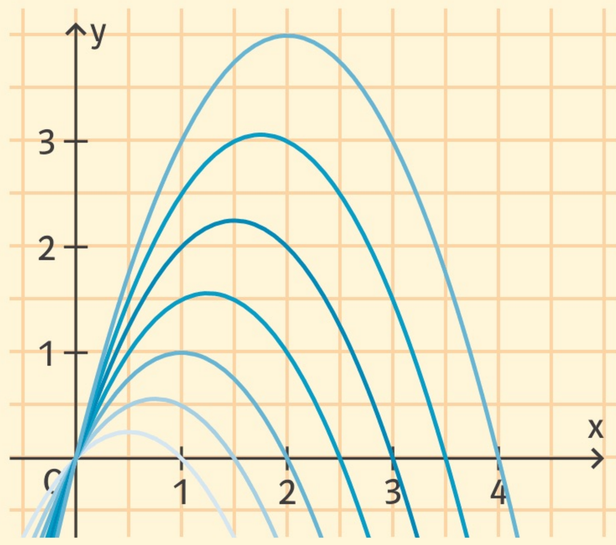
1 Funktionenscharen

„Amsel, Drossel, Fink und Star
und die ganze Vogelschar …“

Oftmals betrachtet man nicht eine einzelne Funktion, sondern eine ganze Schar ähnlicher Funktionen gleichzeitig.
Beschreiben Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Parabeln der Funktionenschar.



Der Graph einer Funktion



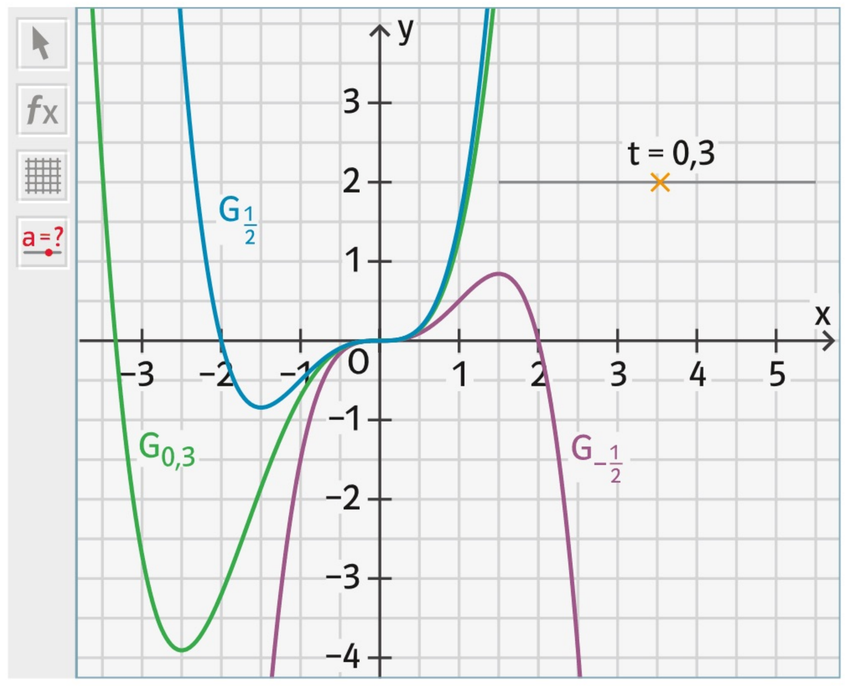
Graphen einer Funktionenschar

Häufig enthalten Funktionsterme außer der Funktionsvariablen noch eine weitere Variable, zum Beispiel $x \mapsto tx^4 + x^3$. Hier ist x die Funktionsvariable und t ein **Parameter**. Da für verschiedene Werte von t verschiedene Funktionen vorliegen, schreibt man den Parameter auch an den Funktionsbezeichner und gibt an, aus welchem Bereich seine Werte stammen, zum Beispiel $f_t: x \mapsto tx^4 + x^3 \ (t \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$. Man spricht von der **Funktionenschar** f_t.

Der Bereich, aus dem die Parameterwerte gewählt werden können, ist gegebenenfalls gemäß dem Sachproblem einzuschränken.

Oft besitzen die Funktionen einer Schar einige gemeinsame Eigenschaften und einige vom Wert des Parameters abhängige unterschiedliche Eigenschaften. Die Untersuchung der Eigenschaften einer Funktionenschar kann ähnlich zur Untersuchung einer einzelnen Funktion erfolgen.

Es wird eine Untersuchung auf Nullstellen und Extremstellen am obigen Beispiel durchgeführt. Es gilt $f_t(x) = 0 \Leftrightarrow tx^4 + x^3 = 0$
$\Leftrightarrow x^3(tx + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = -\frac{1}{t}$.
Zum Beispiel besitzt $f_{\frac{1}{2}}$ die Nullstellen 0 und -2 und $f_{-\frac{1}{2}}$ besitzt die Nullstellen 0 und 2 (vgl. Abbildung).
Für die Ableitung der Funktionenschar gilt $f_t'(x) = 4tx^3 + 3x^2$, also
$f_t'(x) = 0 \Leftrightarrow 4tx^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(4tx + 3) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ oder $x = -\frac{3}{4t}$.



Der Parameter wird wie eine Konstante behandelt.

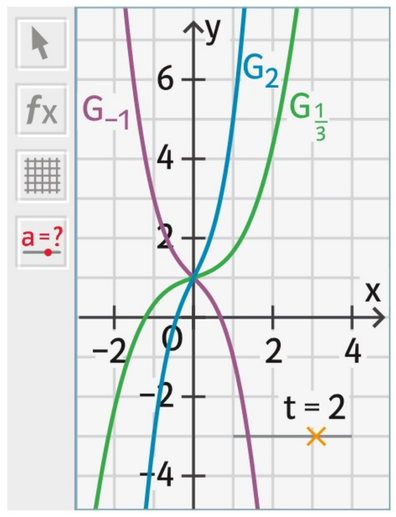
Für die zweite Ableitung gilt $f_t''(x) = 12tx^2 + 6x$, also $f_t''\left(-\frac{3}{4t}\right) = 12t\left(-\frac{3}{4t}\right)^2 + 6\left(-\frac{3}{4t}\right) = \frac{9}{4t}$.
Für $t > 0$ ist $f''\left(-\frac{3}{4t}\right) > 0$; also liegt ein Minimum vor. Für $t < 0$ liegt ein Maximum vor. Zum Beispiel besitzt $f_{\frac{1}{2}}$ ein Minimum an der Stelle $x = -\frac{3}{2}$.

Anhand des Terms $f_t'(x) = x^2(4tx + 3)$ erkennt man, dass f_t' nahe 0 keinen Vorzeichenwechsel hat. Also hat f_t an der Stelle $x = 0$ kein Extremum.

Enthält ein Funktionsterm außer der Funktionsvariablen (meist x) noch eine weitere von dieser unabhängige Variable, z. B. t, so gehört zu jedem möglichen Wert von t eine Funktion $f_t: x \mapsto f_t(x)$. Die Variable t nennt man **Parameter**. Die Menge dieser Funktionen bezeichnet man als **Funktionenschar**.

Beispiel: $f_t: x \mapsto t \cdot x^3 + t \cdot x + 1$

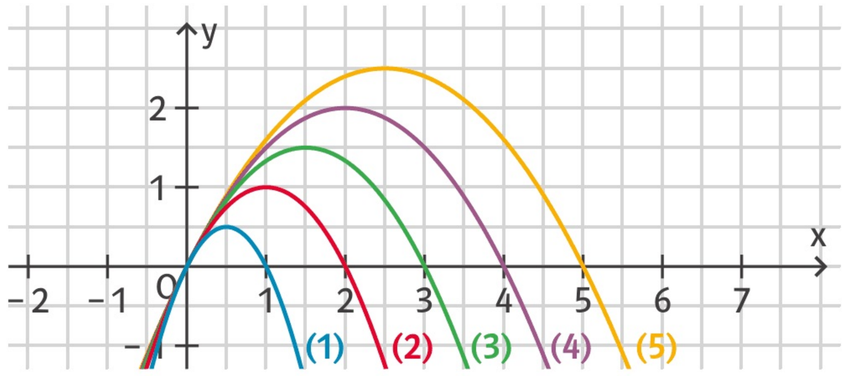
$t = -1$: $f_{-1}: x \mapsto -x^3 - x + 1$
$t = 2$: $f_2: x \mapsto 2x^3 + 2x + 1$
$t = \frac{1}{3}$: $f_{\frac{1}{3}}: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x + 1$



Beachten Sie:
Der Name des Parameters einer Funktionenschar ist frei wählbar. Zum Beispiel ist $f_b: x \mapsto b\,x^2 - b$ $(b \in \mathbb{R})$ dieselbe Funktionenschar wie $f_k: x \mapsto k\,x^2 - k$ $(k \in \mathbb{R})$. Es gibt auch Funktionenscharen mit mehr als einem Parameter, etwa $g_{a,\,b}: x \mapsto b\,x^3 - a\,x^2 + a\,b$. Für $a = 2$ und $b = 3$ erhält man beispielsweise $g_{2,\,3}: x \mapsto 3\,x^3 - 2\,x^2 + 6$.

Beispiel 1

Gegeben ist die Funktionenschar $f_t: x \mapsto -\frac{2}{t}x^2 + 2x,\ t \in \mathbb{R}^+$. Die Abbildung zeigt die Graphen einiger Funktionen dieser Schar.



a) Bestimmen Sie für die zum Graphen (3) gehörige Funktion den Wert für t.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen in Abhängigkeit von t.

c) Bestimmen Sie die x-Koordinate des Scheitels in Abhängigkeit von t.

Lösung

a) Für die zum Graphen (3) gehörige Funktion gilt $f_t(3) = 0$, also $-\frac{2}{t} \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 = 0$. Auflösen nach t liefert $t = 3$.

b) Es gilt $f_t(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{t}x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow -2x\left(\frac{1}{t}x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = t$.

c) Für die x-Koordinate des Scheitels gilt $f_t'(x) = 0$. Aus der Funktionsvorschrift erhält man $f_t'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{t}x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{t}{2}$.

Wenn bei einer Funktion kein Definitionsbereich angegeben wird, soll stets der maximale Definitionsbereich verwendet werden.

Bemerkung:
Man kann die Scheitelstelle x_S auch als Mittelwert der Nullstellen bestimmen: $x_S = \frac{0 + t}{2} = \frac{t}{2}$.

Beispiel 2

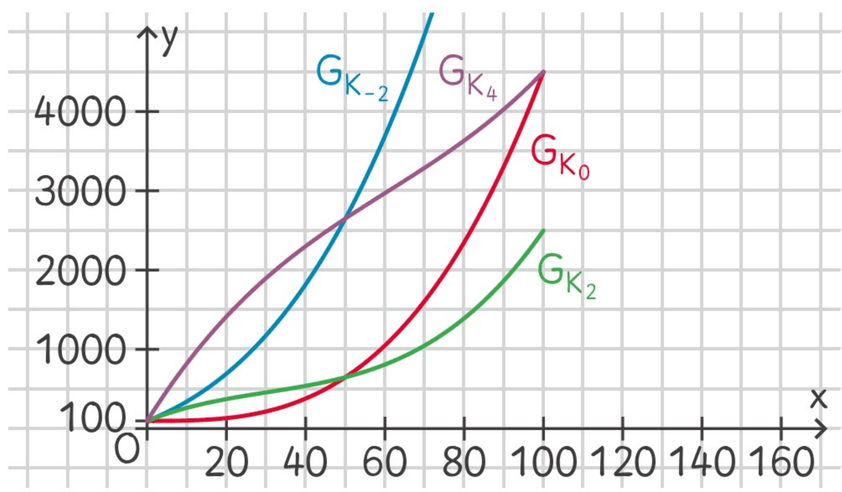
Einem Unternehmen entstehen bei einer Anzahl von x Produktionseinheiten die Gesamtkosten $K_t(x)$. Diese können im Bereich $0 \leq x \leq 100$ mit dem Parameter t $(-10 \leq t \leq 10)$ durch die Kostenfunktion K_t mit $K_t(x) = 0{,}0044\,x^3 - 0{,}2\,t\,x^2 + 5\,t^2\,x + 100$ beschrieben werden.

a) Zeichnen Sie mit einem Funktionenplotter die Graphen der Kostenfunktion für $t = -2;\ 0;\ 2$ und 4. Vergleichen und interpretieren Sie ihren Verlauf.

b) Jede Produktionseinheit wird für $6 \cdot (t + 10)\,€$ verkauft. Berechnen Sie, bei wie vielen Produktionseinheiten der Gewinn für $t = 0$ bzw. $t = -2$ am größten wird. Bestimmen Sie jeweils die Größe des Gewinns.

Lösung

a) Man sieht z. B., dass alle Graphen durch den Punkt $P(0\,|\,100)$ verlaufen. Dies bedeutet, dass es Fixkosten von 100 € gibt. Weiterhin erkennt man, dass im Bereich von 0 bis 50 Produktionseinheiten der Parameterwert $t = 0$ die niedrigsten Kosten verursacht. Für mehr als 50 Produktionseinheiten verursacht der Parameterwert $t = 2$ die geringsten Kosten.



b) Die Gewinnfunktion lautet $G_t(x) = 6 \cdot (t + 10) \cdot x - K_t(x)$. Somit gilt
$G_0(x) = -0{,}0044\,x^3 + 60\,x - 100$ und $G_{-2}(x) = -0{,}0044\,x^3 - 0{,}4\,x^2 + 28\,x - 100$.
Für $t = 0$ ist die Ableitung $G_0'(x) = -0{,}0132\,x^2 + 60$. Also gilt $G_0'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx -67{,}42$ oder $x \approx 67{,}42$. Die negative Lösung kommt aufgrund des Sachzusammenhangs nicht infrage. Es gilt $G_0''(x) = -0{,}0264\,x$, also $G_0''(67{,}42) < 0$. G_0 hat daher an der Stelle $x \approx 67{,}42$ ein Maximum. Es ist $G_0(67) \approx 2596{,}64$ und $G_0(68) \approx 2596{,}50$. Der Gewinn ist folglich für 67 Produktionseinheiten mit 2596,64 € am größten.
Für $t = -2$ ist die Ableitung $G_{-2}'(x) = -0{,}0132\,x^2 - 0{,}8\,x + 28$. Also gilt $G_{-2}'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx -85{,}43$ oder $x \approx 24{,}83$. Die negative Lösung kommt nicht infrage. Einsetzen in die zweite Ableitung zeigt, dass G_{-2} an der Stelle $x \approx 24{,}83$ ein Maximum besitzt. Es ist $G_{-2}(24) \approx 280{,}77$ und $G_{-2}(25) = 281{,}25$. Der Gewinn ist für 25 Produktionseinheiten mit 281,25 € am größten.

Zur Erinnerung:
Man verwendet zum Ableiten von ganzrationalen Funktionen die
Summenregel
$f(x) = g(x) + h(x)$
$\Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$
und die **Faktorregel**
$f(x) = k \cdot g(x)$
$\Rightarrow f'(x) = k \cdot g'(x)$.

Da nur ganzzahlige Produktionseinheiten möglich sind, berechnet man die Werte von $G_0(x)$ für $x = 67$ und $x = 68$ (analog für $t = -2$).

Aufgaben

1 Skizzieren Sie die Graphen der Funktionenschar f_a für $a = -1;\ 1;\ 2$ und 3. Beschreiben Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Graphen und was eine Erhöhung von a bewirkt. Zeichnen Sie die Graphen mit einer dynamischen Mathematiksoftware mithilfe eines Schiebereglers.

a) $f_a: x \mapsto ax^2 - 1$ **b)** $f_a: x \mapsto x^2 + ax$ **c)** $f_a: x \mapsto ax + 3$ **d)** $f_a: x \mapsto (x - a)^2$

2 Bestimmen Sie einen Term der Ableitung. Alle Parameter sind reell.

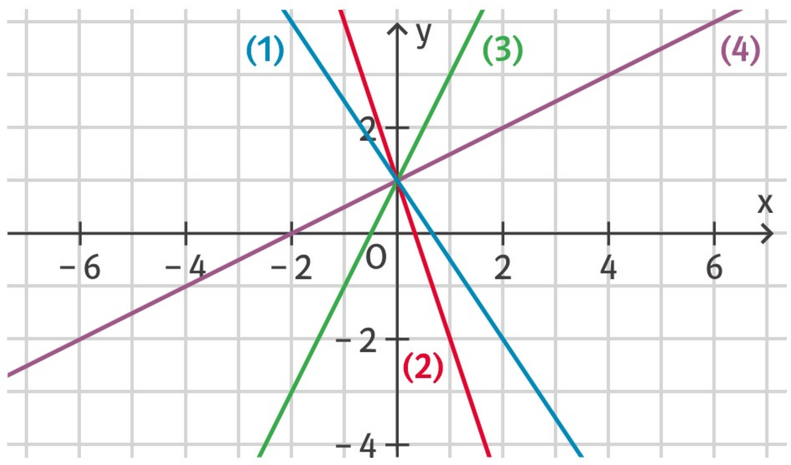
a) $f_a(x) = ax^2$ **b)** $g_t(x) = tx^3 - 2tx$ **c)** $h_k(x) = \frac{k}{3}x^3 - \frac{k}{2}x^2$ **d)** $f_t(x) = t^2x - tx^2$

3 Die angegebenen Funktionen gehören zur gleichen Funktionenschar. Geben Sie deren Funktionsterm mithilfe eines Parameters an.

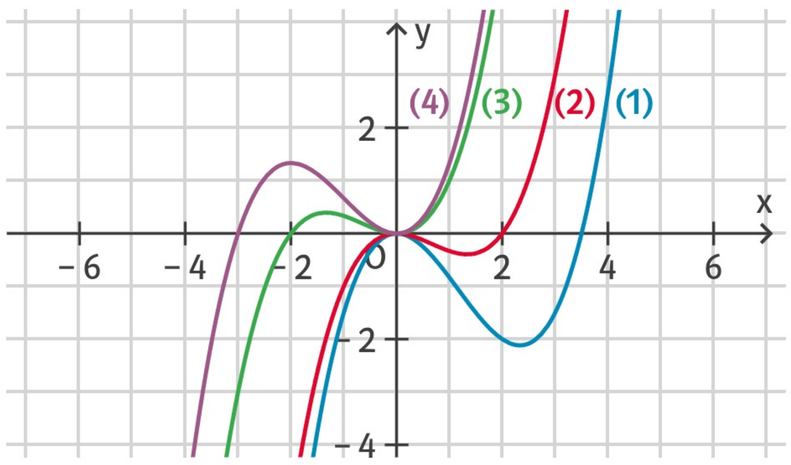
a) $x \mapsto x^2 - 1;\ x \mapsto x^2 + 2;\ x \mapsto x^2 - 3$ **b)** $x \mapsto 2x + 4;\ x \mapsto 3x + 6;\ x \mapsto -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

4 Gegeben ist eine Funktionenschar. Bestimmen Sie zu den in der Abbildung gezeichneten Graphen jeweils den zugehörigen Parameterwert.

a) $f_t: x \mapsto tx + 1$



b) $f_a: x \mapsto \frac{1}{3}(x^3 - ax^2)$



5 Gegeben ist die Funktionenschar $f_k: x \mapsto kx^4 - x^2,\ k \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle Nullstellen von f_k, Extrema von f_k und ihre Art sowie Wendestellen von f_k in Abhängigkeit von k.

→ Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

6 Gegeben ist eine Funktionenschar. Zeichnen Sie mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware und eines Schiebereglers die Graphen und beschreiben Sie sich gegenseitig den Einfluss des Parameters. Der Parameter ist reell.

a) $f_a: x \mapsto x^2 - ax$ **b)** $g_t: x \mapsto x^3 - tx$ **c)** $h_k: x \mapsto kx^3 - kx$ **d)** $g_a: x \mapsto a(x - a)^2$

Test 1

→ Lösungen | Seite 270

7 Gegeben ist die Funktionenschar $g_a: x \mapsto ax^3 - x,\ a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Bestimmen Sie alle Nullstellen, Extrema und ihre Art sowie Wendestellen von g_a in Abhängigkeit von a.

8 **a)** Gegeben sind eine Funktion f und ihr Graph G_f. Begründen Sie, dass $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ die Gleichung der Tangente an G_f im Punkt $(a\,|\,f(a))$ ist.

b) Gegeben sind die Funktion $f: x \mapsto x^2 + 1$ und ihr Graph G_f. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_f im Punkt $(2\,|\,5)$.

c) Gegeben sind die Funktion $f: x \mapsto x^2 + 1$ und ihr Graph G_f. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_f im Punkt $(a\,|\,f(a))$.

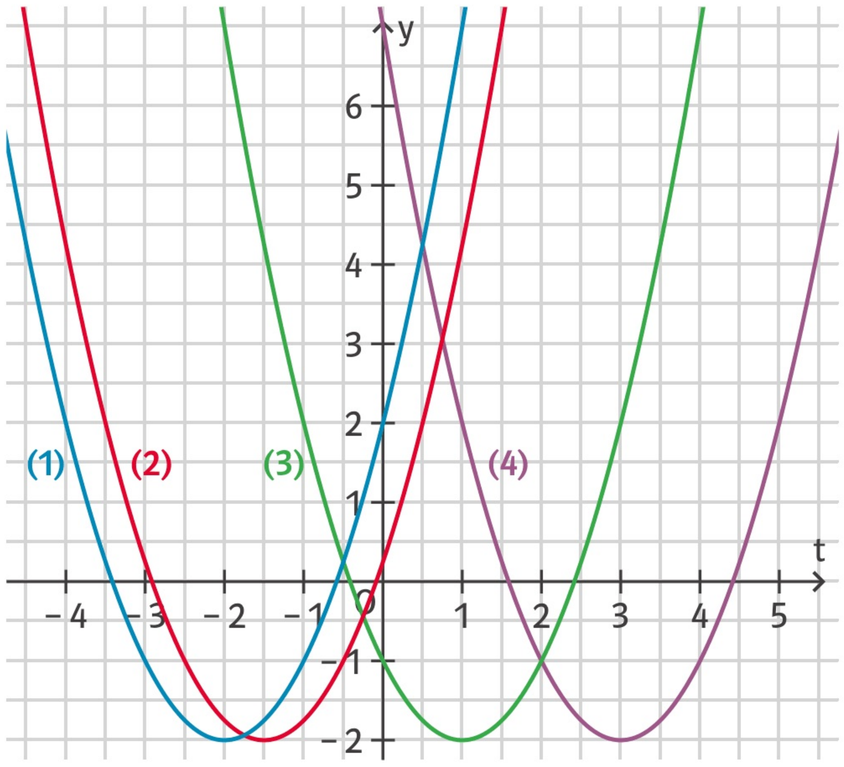
d) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe c), indem Sie in einer dynamischen Mathematiksoftware einen Schieberegler für a einführen und G_f sowie die Tangente im Punkt $(a\,|\,f(a))$ zeichnen lassen.

9 Bestimmen Sie einen Term der Ableitung. Alle Parameter sind reell.

a) $f_{a,b}(x) = ax^2 + b$ **b)** $f_{t,k}(x) = kx^2 - tx^3$

c) $g_{r,s}(z) = rsz$ **d)** $h_{a,t}(x) = (a + t)x^2 - (a - t)x$

10 Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(t) = (t - a)^2 - 2$ $(a \in \mathbb{R})$. In der Abbildung sind Graphen der Schar für verschiedene Parameterwerte dargestellt.



a) Beschreiben Sie Gemeinsamkeiten der abgebildeten Graphen.

b) Geben Sie die zu den abgebildeten Graphen gehörenden Parameterwerte an.

c) Beschreiben Sie, was eine Erhöhung von a bewirkt.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f_a mit den Koordinatenachsen.

e) Bestimmen Sie $f_a'(t)$.

→ Strategie | Seite 260 Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

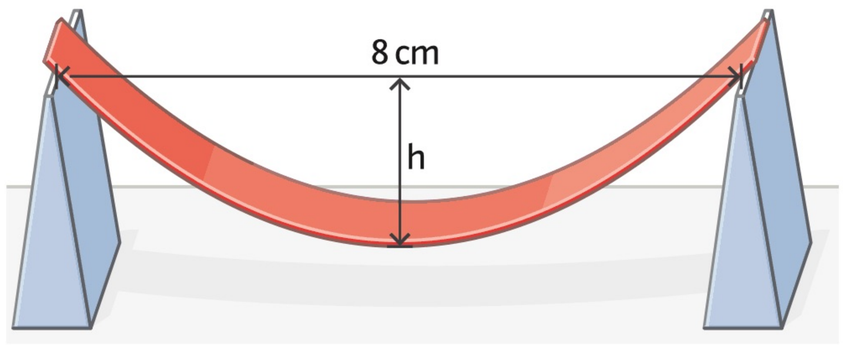
11 **Abiturprüfung 2019 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 3**

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $p_k: x \mapsto kx^2 - 4x - 3$ mit $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, deren Graphen Parabeln sind.

a) Bestimmen Sie den Wert von k so, dass der Punkt $(2\,|\,-3)$ auf der zugehörigen Parabel liegt.

b) Ermitteln Sie diejenigen Werte von k, für die die jeweils zugehörige Funktion p_k keine Nullstelle besitzt.

12 Eine Plastikleiste wird auf zwei Keile aufgelegt, die einen Abstand von 8 cm haben. Der Querschnitt der durchgebogenen Leiste soll durch eine Parabel modelliert werden.



a) Bestimmen Sie dafür eine geeignete Funktionenschar.

b) Bestimmen Sie die Steigungen an den beiden Aufhängepunkten in Abhängigkeit von h.

Test 2

→ Lösungen | Seite 270

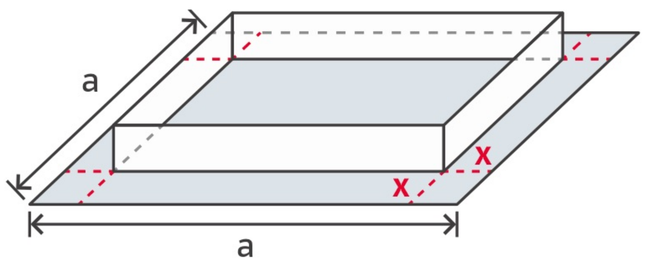
13 Gegeben ist die Funktionenschar $f_a: x \mapsto ax^3 - 2ax^2$ $(a \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$.

a) Zeigen Sie, dass $x = 2$ eine Nullstelle jeder der Funktionen dieser Schar ist.

b) Bestimmen Sie den Wert von a so, dass der Punkt $(-1\,|\,-2)$ auf dem Graphen von f_a liegt.

c) Zeigen Sie, dass die Lage der Extremstellen von f_a nicht von a abhängt, wohl aber die Art der Extremstellen.

14 Aus einem quadratischen Stück Pappe mit der Seitenlänge a (in cm) soll eine oben offene Schachtel mit möglichst großem Volumen hergestellt werden.



a) Stellen Sie einen Term für das Volumen $V_a(x)$ in Abhängigkeit von der Länge x (in cm) des Einschnitts (vgl. Abbildung) auf.

b) Bestimmen Sie das Maximum der Funktionenschar $V_a: x \mapsto V_a(x)$ in Abhängigkeit von a.

Grundwissen Test

→ Lösungen | Seite 270

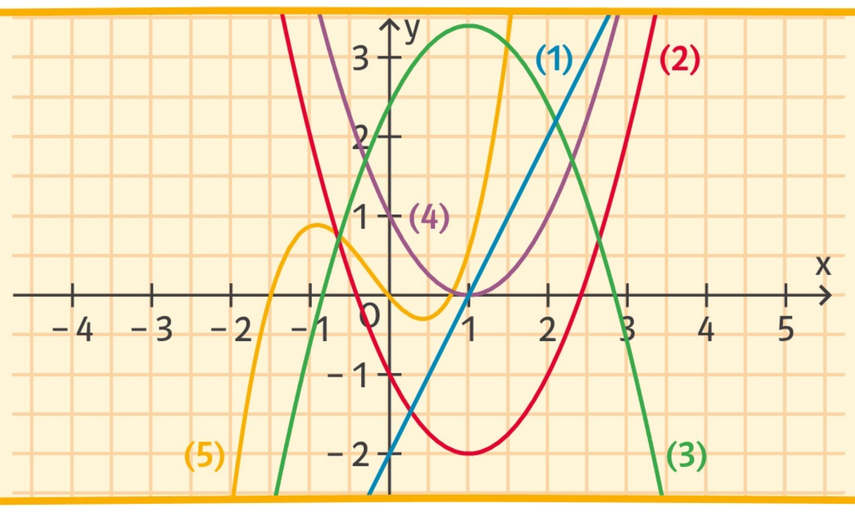
→ Strategie | Seite 260 Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

G 15 Skizzieren Sie zunächst mithilfe der Nullstellen von f den Graphen G_f von f. Bestimmen Sie dann eine Gleichung der Tangente t an G_f im Punkt $P(x_0\,|\,f(x_0))$ und berechnen Sie die Größe des kleineren Winkels zwischen t und der y-Achse.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x,\ x_0 = -3$ **b)** $f(x) = -x^2 + 1,\ x_0 = \frac{1}{2}$ **c)** $f(x) = x^3 - 2x^2,\ x_0 = 2$

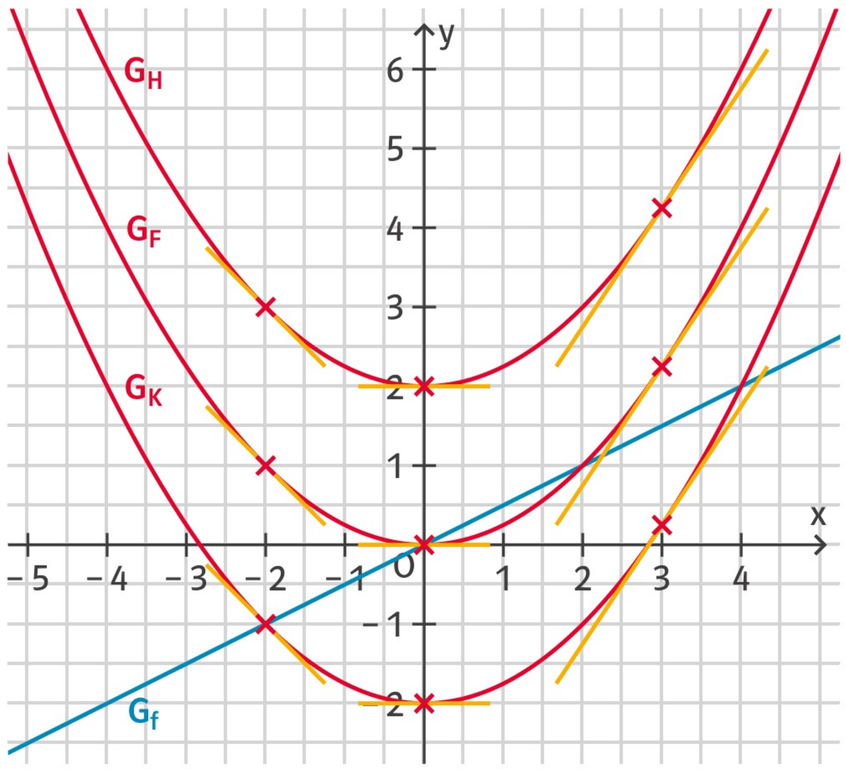
2 Stammfunktionen

Welcher der Graphen (2) bis (5) kann zu der Funktion gehören, deren Ableitung den Graphen (1) hat? Kommt mehr als ein Graph infrage? Begründen Sie Ihre Entscheidung.



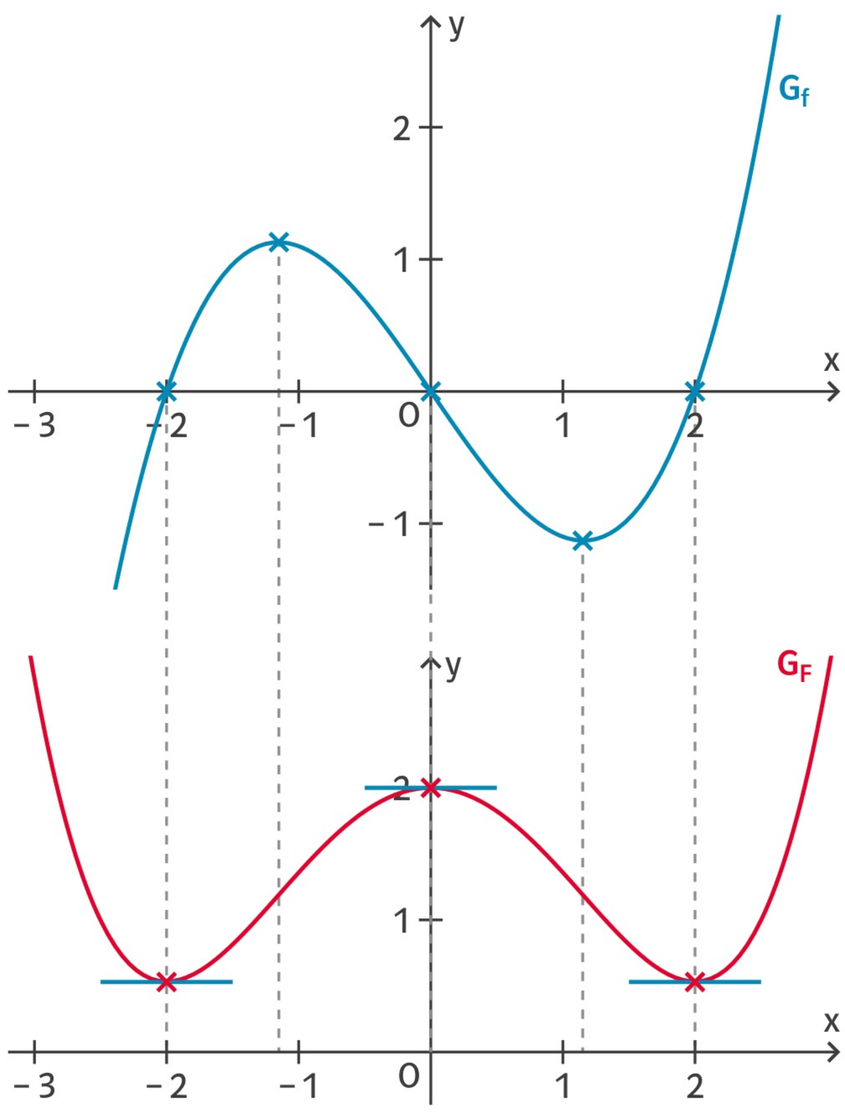
Bisher wurden die Ableitungen von gegebenen Funktionen bestimmt. Es kann auch der umgekehrte Fall auftreten: Zu einer gegebenen Funktion ist eine Funktion gesucht, die abgeleitet die gegebene Funktion ergibt.

Rechts sind rot die Graphen der Funktionen $F: x \mapsto \frac{1}{4}x^2$, $H: x \mapsto \frac{1}{4}x^2 + 2$ und $K: x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - 2$ gezeichnet.
Wegen $H(x) = F(x) + 2$ bzw. $K(x) = F(x) - 2$ entstehen die Graphen von K bzw. H aus dem Graphen von F durch Verschiebung in y-Richtung. Daher haben alle drei Parabeln an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ dieselbe Steigung. Dies bedeutet, dass F, H und K dieselbe Ableitungsfunktion $f: x \mapsto \frac{1}{2}x$, haben; dafür kann man schreiben: $F' = H' = K' = f$. Man sagt auch, dass die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{2}x$ von jeder der Funktionen F, H und K abstammt und nennt diese **Stammfunktionen** von f.



Liegt von einer Funktion f nur der Graph vor, so kann man den Graphen einer zugehörigen Stammfunktion skizzieren. Eine mögliche Vorgehensweise wird im Folgenden dargestellt.
Gegeben ist der Graph G_f der Funktion f.

- Die Funktion f hat die Nullstellen -2; 0 und 2. Es gilt $f(-2) = F'(-2) = 0$ und entsprechend $F'(0) = F'(2) = 0$. Daher hat der Graph von F an den Stellen -2; 0 und 2 jeweils eine waagerechte Tangente.
- In $[-2; 0]$ verläuft G_f außer an den einzelnen Stellen $x = -2$ und $x = 0$ oberhalb der x-Achse; also gilt dort $f(x) = F'(x) \geq 0$. Daher steigt in diesem Intervall der Graph von F streng monoton. An der Stelle $x \approx -1{,}15$ ist seine Steigung am größten, da f hier ein Maximum hat.
- In $[0; 2]$ gilt entsprechend $f(x) = F'(x) \leq 0$, d. h., G_F fällt streng monoton. Die Steigung von G_F ist an der Stelle $x \approx 1{,}15$ minimal.
- Für $x < -2$ ist $f(x) = F'(x) < 0$; also fällt G_F in diesem Bereich streng monoton.
- Für $x > 2$ ist $f(x) = F'(x) > 0$; also steigt G_F in diesem Bereich streng monoton.



In der Abbildung ist der Graph einer möglichen Stammfunktion von f skizziert. Jede Verschiebung in y-Richtung ergibt den Graphen einer weiteren Stammfunktion von f.

Bemerkung:
Kennt man zu einer Funktion eine Stammfunktion, so kennt man bereits unendlich viele Stammfunktionen. Zum Beispiel ist $F: x \mapsto \frac{1}{4}x^2$ eine Stammfunktion von $f: x \mapsto \frac{1}{2}x$, aber auch jede Funktion der Schar $F_c: x \mapsto \frac{1}{4}x^2 + c \ (c \in \mathbb{R})$ ist eine Stammfunktion von f.
Die Graphen zweier Stammfunktionen unterscheiden sich nur um eine Verschiebung in y-Richtung. Allgemein ist jede Funktion der Schar $G_c: x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \ (c \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N})$ eine Stammfunktion zu $g: x \mapsto x^n$. Man erkennt dies durch Ableiten: $G_c'(x) = \frac{n+1}{n+1}x^{n+1-1} = x^n$.

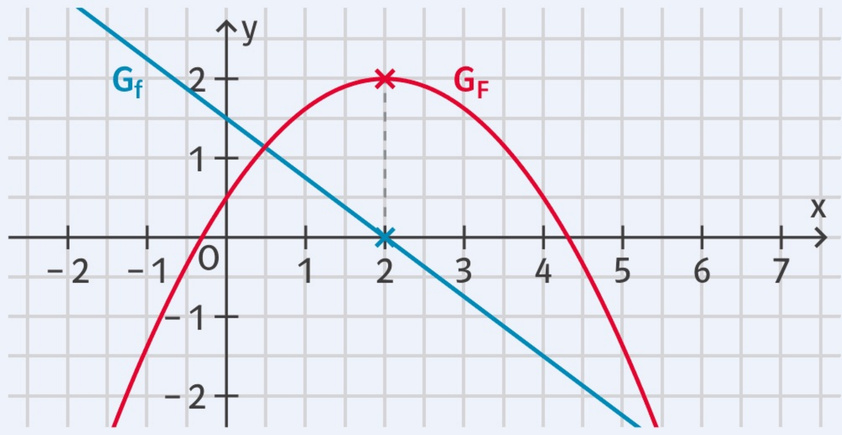
Will man prüfen, ob eine Stammfunktion vorliegt, leitet man diese ab.

Definition: Man nennt eine differenzierbare Funktion F **eine Stammfunktion** der Funktion f, wenn f die Ableitungsfunktion von F ist, d.h., wenn für jedes $x \in D_f$ gilt:

$$F'(x) = f(x).$$

Zu einer Potenzfunktion f mit $\mathbf{f(x) = x^n}$ $(n \in \mathbb{N})$ ist F mit $\mathbf{F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}}$ eine Stammfunktion.

Skizzieren von Stammfunktionen:
Um bei gegebenem Graphen einer Funktion f den Graphen einer Stammfunktion F von f zu skizzieren, nutzt man charakteristische Eigenschaften des Graphen von f wie Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrempunkte und Bereiche, in denen der Graph ober- bzw. unterhalb der x-Achse verläuft.



Beispiel 1

a) Zeigen Sie, dass $F: x \mapsto \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + x + 5$ eine Stammfunktion von $f: x \mapsto 2x^2 - 4x + 1$ ist.

b) Bestimmen Sie zwei verschiedene Stammfunktionen zu $g: x \mapsto \sqrt{2} \cdot x^3 + 3$. Wie viele weitere gibt es? Begründen Sie.

Lösung

a) Es gilt $F'(x) = \frac{2}{3} \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 1 = 2x^2 - 4x + 1 = f(x)$. Also ist F eine Stammfunktion von f.

b) Die Funktion $G: x \mapsto \frac{\sqrt{2}}{4}x^4 + 3x$ ist eine Stammfunktion zu g, weil $G'(x) = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot 4x^3 + 3 = \sqrt{2} \cdot x^3 + 3 = g(x)$ gilt. Eine weitere Stammfunktion erhält man durch Addition einer Konstanten, z.B. $H: x \mapsto \frac{\sqrt{2}}{4}x^4 + 3x + 5$. Es gibt unendlich viele weitere Stammfunktionen zu g, da man anstelle der 5 jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ verwenden kann.

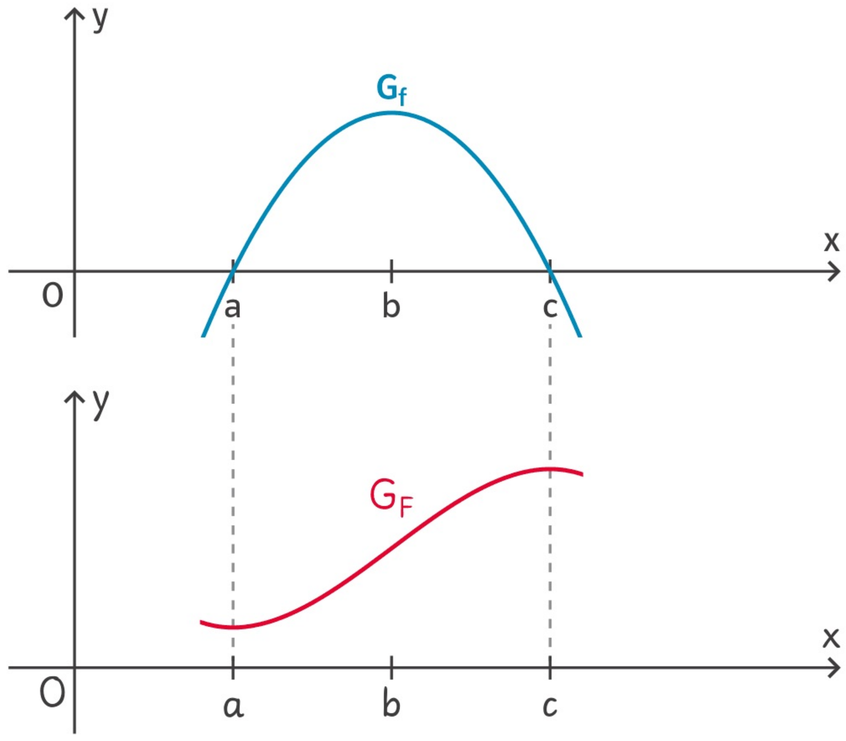
Mithilfe der Summen- und Faktorregel kann man Stammfunktionen zu jeder ganzrationalen Funktion finden.

Beispiel 2

Gegeben ist der Graph der Funktion f. Skizzieren Sie den Graphen einer Stammfunktion F von f. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

Lösung

Da $f(a) = f(c) = 0$ ist, hat G_F bei $x = a$ und $x = c$ jeweils eine waagerechte Tangente.
Da $f(x) > 0$ ist für $a < x < c$, ist G_F im Intervall $[a; c]$ streng monoton steigend.
Da $f(x) < 0$ ist für $x < a$ und für $x > c$, fällt G_F für $x < a$ und $x > c$ streng monoton.
G_F kann beliebig in y-Richtung verschoben werden, da sich die Stammfunktionen nur durch eine additive Konstante unterscheiden.



Aufgaben

1 Überprüfen Sie, ob die Funktion F eine Stammfunktion der Funktion f ist.

a) $F: x \mapsto 0{,}5x^2$ und $f: x \mapsto x$

b) $F: x \mapsto 2x - 2$ und $f: x \mapsto -2$

c) $F: x \mapsto 6x$ und $f: x \mapsto 3x^2 + 3$

d) $F: x \mapsto (x^2 + 1)^2$ und $f: x \mapsto 2(x^2 + 1)$

2 Ordnen Sie jeder Funktion f eine Stammfunktion F zu. Geben Sie zu den übrig gebliebenen Funktionen jeweils eine Stammfunktion an.

1	$F(x) = \frac{1}{2}x^3$	2	$F(x) = \frac{3}{2}x^2$	C	$f(x) = \frac{2}{3}x$	D	$f(x) = \frac{2}{3}x^3$	4	$F(x) = \frac{3}{2}x^3$
A	$f(x) = \frac{9}{4}x^2$	B	$f(x) = 3x$	3	$F(x) = \frac{1}{3}x^2$	E	$f(x) = 4{,}5x^2$	F	$f(x) = \frac{3}{2}x^2$

Test 1

Lösungen | Seite 271

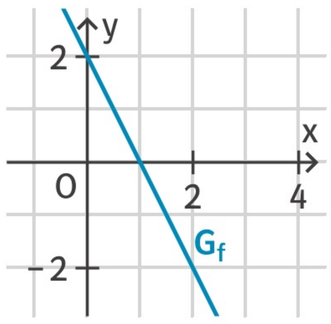
3 Überprüfen Sie, ob F eine Stammfunktion der Funktion f ist.

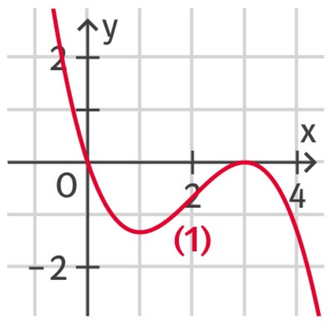
a) $F: x \mapsto -x^3 + 3$ und $f: x \mapsto -3x$

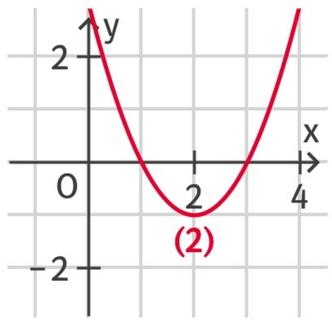
b) $F: x \mapsto (x^2 + 3)^2$ und $f: x \mapsto 4x^3 + 12x$

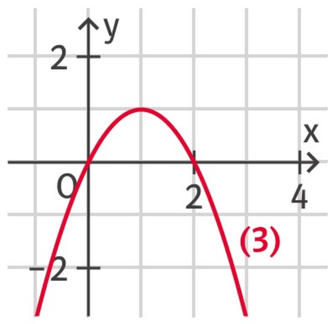
4 Gegeben sind die Graphen der Funktionen f und g sowie acht weitere Graphen, darunter die Graphen von Stammfunktionen von f und g. Ordnen Sie den Funktionen ihre Stammfunktionen zu.

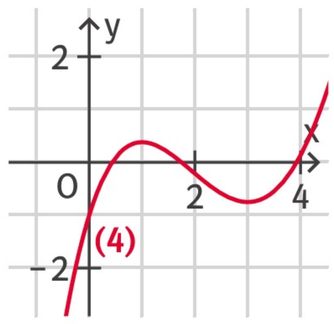
Strategie | Seite 257
Ausschlussprinzip

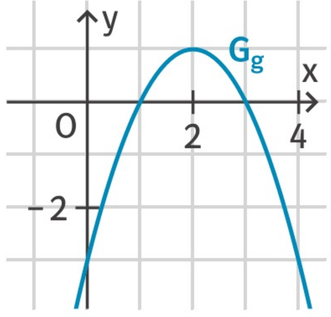


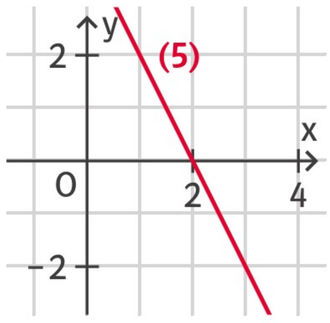


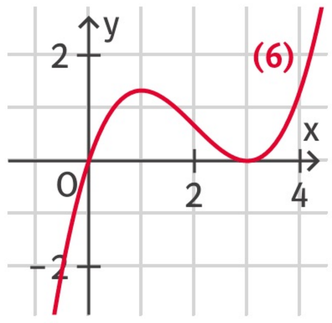


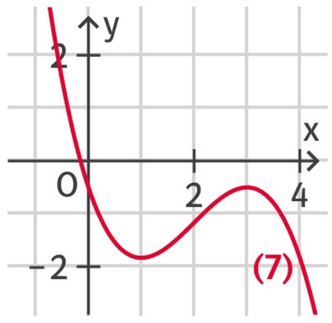


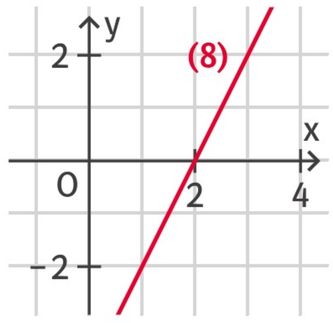






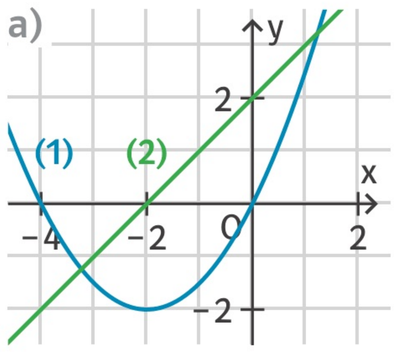




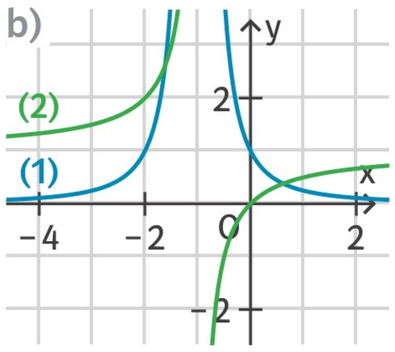


5 Im gleichen Koordinatensystem sind der Graph einer Funktion f und der Graph einer Stammfunktion F von f gezeichnet. Begründen Sie sich gegenseitig, welcher Graph der Graph von f ist und welcher der Graph von F.

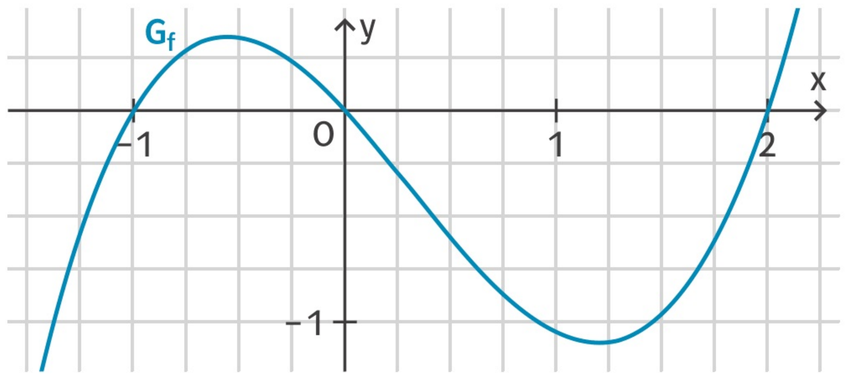
a)



b)



6 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f. Eine beliebige Stammfunktion zu f sei F. Beurteilen Sie, welche der folgenden Aussagen über F wahr sind.



(1) F ist in $[0; 2]$ streng monoton fallend.

(2) F hat bei $x \approx 1{,}2$ eine Extremstelle.

(3) F hat bei $x = -1$ ein lokales Minimum.

(4) Die Funktionswerte von F sind für $x \in [0; 1]$ negativ und für $x \in [1{,}5; 2]$ positiv.

Strategie | Seite 256
Veranschaulichen durch eine informative Figur oder Skizze

7 Die Funktion F ist eine Stammfunktion der Funktion f. Geben Sie einen möglichen Wert für a an.

a) $f(x) = 3x^2$; $F(x) = x^a$

b) $f(x) = 2x$; $F(x) = x^2 - a$

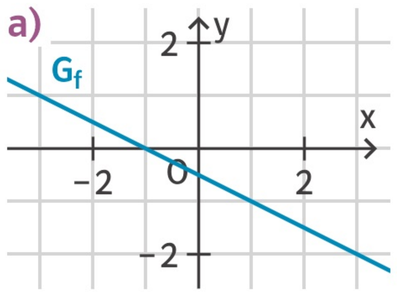
c) $f(x) = 4x^3$; $F(x) = x^4 + 1 + a$

d) $f(x) = (a + 1) \cdot x$; $F(x) = x^{a+1}$

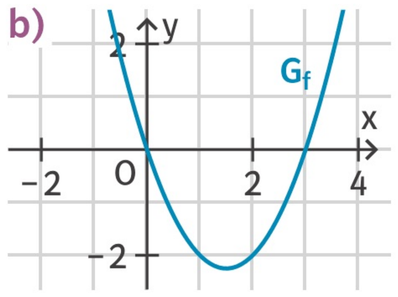
8 Skizzieren Sie zum Graphen G_f der Funktion f in Ihrem Heft den Graphen G_F einer Stammfunktion F von f und beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

→ Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

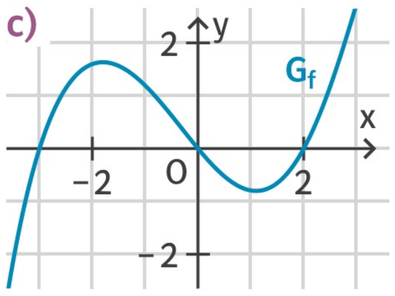
a)



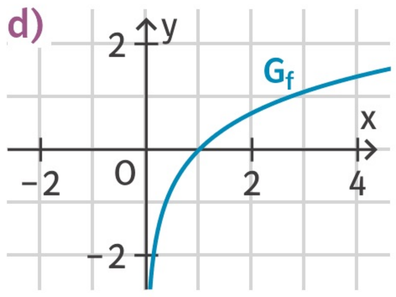
b)



c)



d)



9 Die Funktion $F: x \mapsto \frac{1}{2}x^3$ ist eine Stammfunktion von $f: x \mapsto \frac{3}{2}x^2$.

a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen F und f mit einer geeigneten Mathematiksoftware in ein gemeinsames Koordinatensystem.

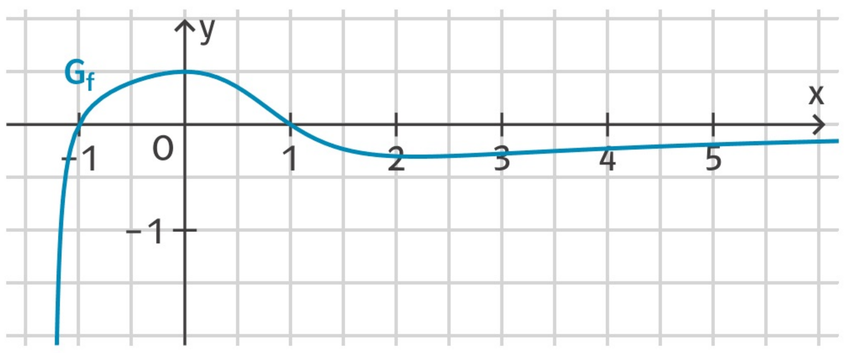
b) Geben Sie die Steigung des Graphen von F im Punkt $P(0{,}8\,|\,F(0{,}8))$ an. Entscheiden und begründen Sie, ob es einen weiteren Punkt S gibt, in dem G_F die gleiche Steigung besitzt.

c) Geben Sie zwei weitere Stammfunktionen G und H von f an und zeichnen Sie die zugehörigen Graphen in das Koordinatensystem von Teilaufgabe a) ein.

d) Beschreiben Sie, wie die Graphen von F, G und H zusammenhängen.

e) Geben Sie diejenige Stammfunktion K von f an, für die $K(2) = 11$ gilt.

10 Gegeben ist eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f. Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F ist die Stammfunktion von f, deren Graph G_F durch den Punkt $T(-1\,|\,2)$ verläuft. Außerdem gilt $F(1) \approx 3{,}5$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 2$.



a) Begründen Sie mithilfe der Abbildung, dass G_F im Punkt T einen Tiefpunkt besitzt.

b) Übertragen Sie G_f ins Heft und skizzieren Sie G_F mithilfe der Abbildung.

Test 2

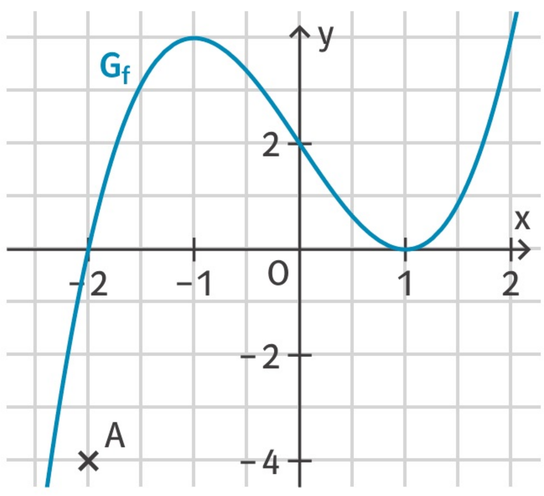
→ Lösungen | Seite 271

11 Gegeben sind der Graph G_f einer Funktion f und ein Punkt A.

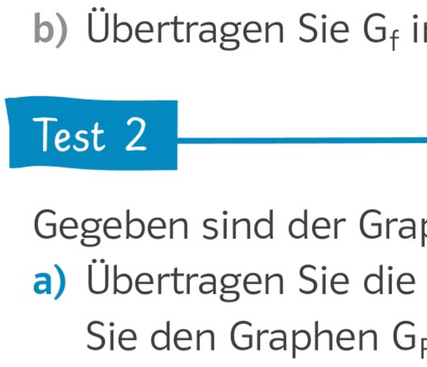
a) Übertragen Sie die Abbildung ins Heft und skizzieren Sie den Graphen G_F derjenigen Stammfunktion F von f mit $A \in G_F$.

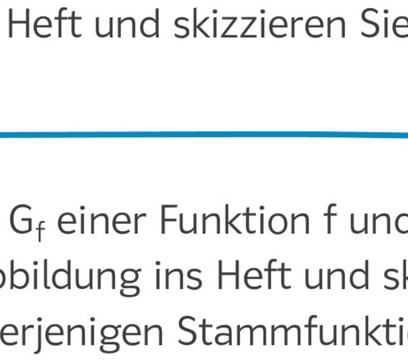
b) Der Funktionsterm von f ist von der Form $f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2)^2$. Bestimmen Sie x_1 und x_2 und dann den Funktionsterm von F.

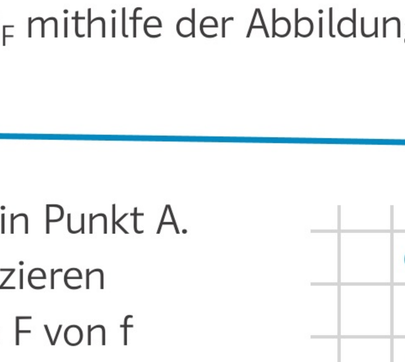
c) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse aus den Teilaufgaben a) und b) mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.

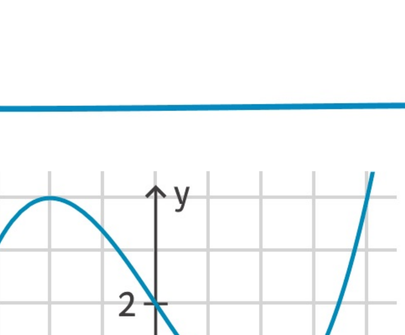


12 Gegeben sind die vier Graphen A, B, C und D. Darunter ist der Graph einer Funktion f, der ihrer Ableitung f' und der einer Stammfunktion F. Begründen Sie, welche drei Graphen dies sind.









Grundwissen Test

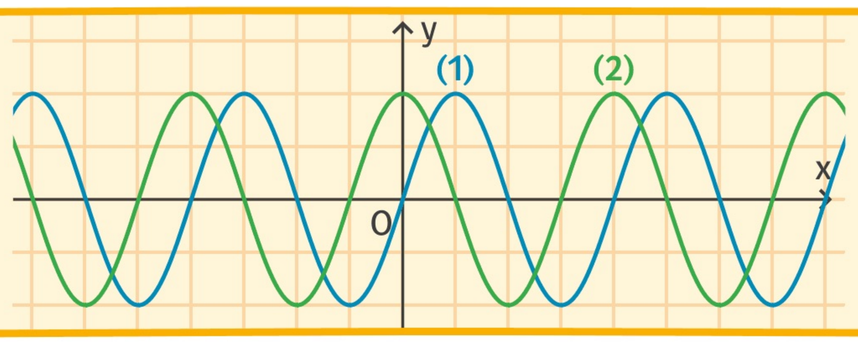
→ Lösungen | Seite 271

G 13 Geben Sie alle Polstellen der Funktion f an und bestimmen Sie ihre Art.

a) $f: x \mapsto \frac{4}{(x-1)(x+1)}$ **b)** $f: x \mapsto \frac{x+2}{(2x+6)^2}$ **c)** $f: x \mapsto \frac{x^2-3}{x^2+2x+1}$

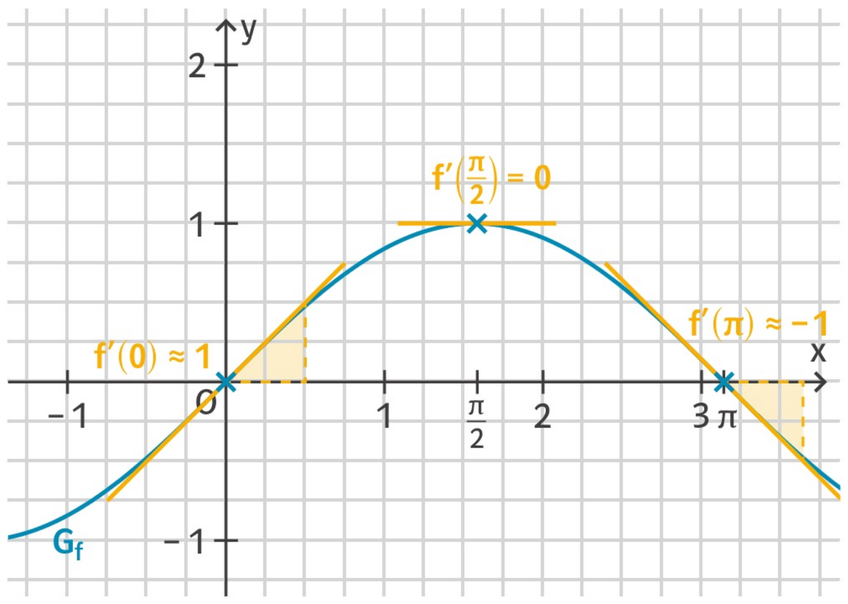
3 Ableitung von Sinus- und Kosinusfunktion

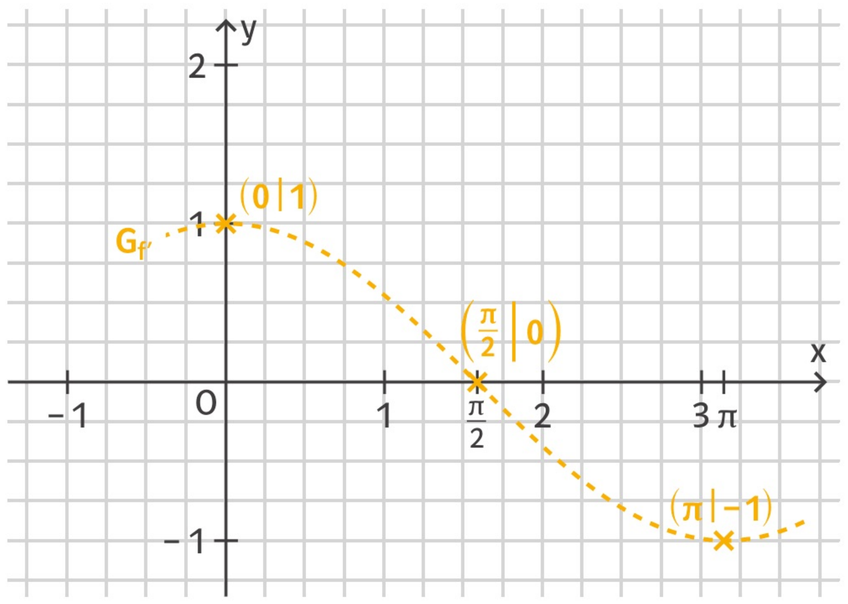
In der Abbildung sehen Sie die Graphen zweier Funktionen. Beurteilen Sie, ob es sich bei einer der beiden um die Ableitungsfunktion der anderen handeln kann.



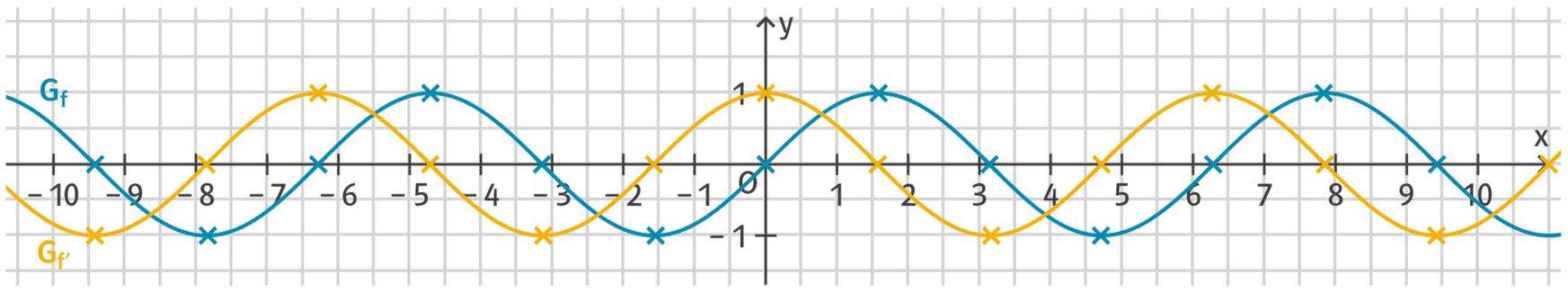
Mit den bisher bekannten Ableitungsregeln kann man die Sinus- und Kosinusfunktion nicht ableiten.

Der blaue Graph ist der Graph der Sinusfunktion $f: x \mapsto \sin(x)$.
Um die Ableitung f′ zu bestimmen, versucht man zunächst, den Graphen von f′ zu skizzieren. Eine Möglichkeit besteht darin, zuerst markante Stellen von f zu suchen, an denen die Steigungen der Tangenten an G_f gut ablesbar sind. Man zeichnet also im Punkt $P(x \mid f(x))$ eine Tangente und trägt deren Steigung als Funktionswert von f′ in ein neues Koordinatensystem wie in der unteren Abbildung ein.
Bei der Sinusfunktion sind solche markanten Stellen z. B. $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ und $x = \pi$. Man liest ab: $f'(0) \approx 1$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ und $f'(\pi) \approx -1$.
Darüber hinaus untersucht man das Steigungsverhalten des Graphen der Sinusfunktion zwischen diesen markanten Stellen. Im Intervall $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ist z. B. zu erkennen, dass die Steigung vom Wert 1 bis zum Wert 0 zunächst langsam, dann immer stärker abnimmt. Entsprechend skizziert man den Verlauf des Graphen von f′ ins neue Koordinatensystem.





Führt man dieses Verfahren für mehrere Punkte bzw. Intervalle durch, so kann man nach und nach den Graphen der Ableitung der Sinusfunktion skizzieren.



Es liegt die Vermutung nahe, dass die Kosinusfunktion die Ableitung der Sinusfunktion ist.

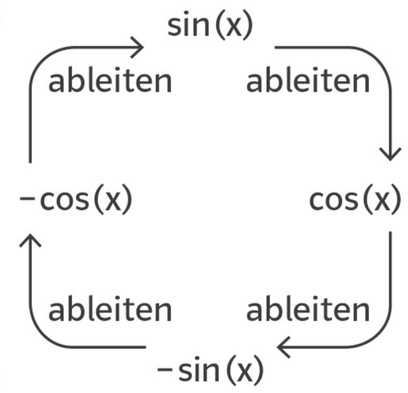
Analog betrachtet man den Graphen der Kosinusfunktion und kommt so zur Vermutung, dass die Funktion $x \mapsto -\sin(x)$ die Ableitung der Kosinusfunktion bildet.

Aus der Kenntnis der Ableitungen von Sinus- und Kosinusfunktion erhält man direkt deren Stammfunktionen. Jede Funktion der Schar F_c mit $F_c(x) = \sin(x) + c$ $(c \in \mathbb{R})$ ist eine Stammfunktion der Kosinusfunktion und jede Funktion der Schar G_c mit $G_c(x) = -\cos(x) + c$ $(c \in \mathbb{R})$ ist eine Stammfunktion der Sinusfunktion.

In Aufgabe 12 wird eine andere Methode behandelt, um die Ableitung der Kosinusfunktion herzuleiten.

Leitet man die Ableitungsfunktion f' einer Funktion f ab, erhält man die zweite Ableitung f''. Leitet man diese erneut ab, erhält man die dritte Ableitung f''' und so weiter. Man schreibt auch $f^{(3)}$ anstelle von f'''. Leitet man eine Funktion n-mal ab, nennt man dies die **n-te Ableitung** der Funktion und schreibt $f^{(n)}$. Beispielsweise gilt für $f(x) = \sin(x)$: $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$ und $f^{(3)}(x) = -\cos(x)$.
Die Gültigkeit des folgenden Satzes wird in der Exkursion auf Seite 31 nachgewiesen.

Satz: Für die Funktion f mit $\mathbf{f(x) = \sin(x)}$ gilt $\mathbf{f'(x) = \cos(x)}$ und für die Funktion g mit $\mathbf{g(x) = \cos(x)}$ gilt $\mathbf{g'(x) = -\sin(x)}$.
Jede Funktion der Schar F_c mit $\mathbf{F_c(x) = -\cos(x) + c}$ $(c \in \mathbb{R})$ ist eine **Stammfunktion der Sinusfunktion** und jede Funktion der Schar G_c mit $\mathbf{G_c(x) = \sin(x) + c}$ $(c \in \mathbb{R})$ ist eine **Stammfunktion der Kosinusfunktion**.



Beispiel 1

Geben Sie den Term der Ableitungsfunktion an.

a) $f(x) = 3 \cdot \sin(x)$ **b)** $g(x) = \frac{\cos(x)}{2}$

c) $h(x) = x^2 - 4 \cdot \cos(x)$ **d)** $i(x) = \sin(x) - \cos(x)$

Lösung

a) $f'(x) = 3 \cdot \cos(x)$ **b)** $g'(x) = -\frac{\sin(x)}{2}$

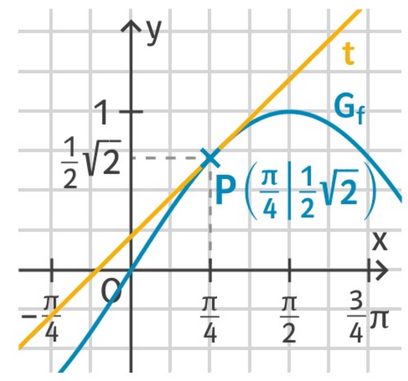
c) $h'(x) = 2x + 4 \cdot \sin(x)$ **d)** $i'(x) = \cos(x) + \sin(x)$

Beispiel 2

Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente in $P\left(\frac{\pi}{4} \middle| \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ an den Graphen von $f: x \mapsto \sin(x)$.

Lösung

Es ist $f'(x) = \cos(x)$ und somit $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Mit dem Ansatz $y = mx + t$ erhält man $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,x + t$. Einsetzen der Koordinaten von P in diese Gleichung liefert $\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{4} + t$, also $t = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$. Die Gleichung der Tangente lautet $y = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot x + \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.



Beispiel 3

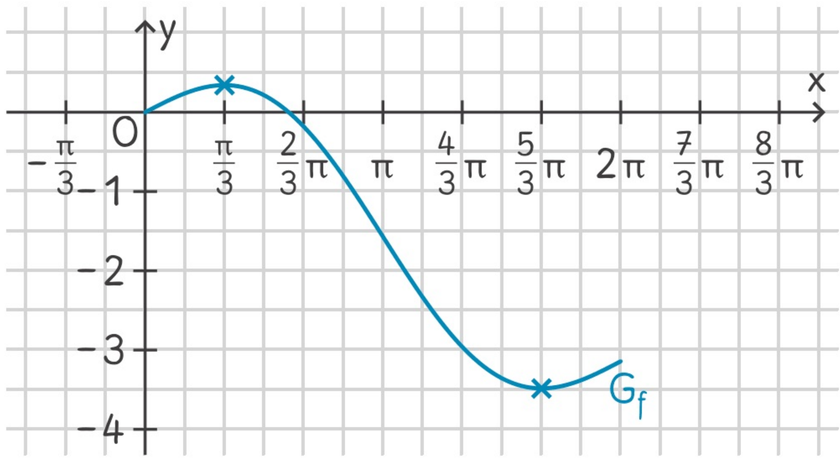
Bestimmen Sie Lage und Art der Extrempunkte des Graphen von $f: x \mapsto \sin(x) - \frac{1}{2}x$ im Intervall $[0; 2\pi]$. Skizzieren Sie den Graphen von f im angegebenen Intervall.

Lösung

Es gilt $f'(x) = \cos(x) - \frac{1}{2}$ und daher

$$f'(x) = 0 \iff \cos(x) - \frac{1}{2} = 0 \iff \cos(x) = \frac{1}{2}$$
$$\iff x = \frac{\pi}{3} \text{ oder } x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi.$$

Die Stellen $\frac{\pi}{3}$ und $\frac{5}{3}\pi$ erfüllen also die notwendige Bedingung für lokale Extrema. Für eine hinreichende Bedingung bildet man zusätzlich die zweite Ableitung.



Es gilt $f''(x) = -\sin(x)$. Man berechnet $f''\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx -0{,}87 < 0$ und $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \approx 0{,}34$. Also ist $\left(\frac{\pi}{3} \middle| \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ ein Hochpunkt. Man berechnet $f''\left(\frac{5}{3}\pi\right) \approx 0{,}87 > 0$ und $f\left(\frac{5}{3}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{6}\pi \approx -3{,}48$. Also ist $\left(\frac{5}{3}\pi \middle| -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{6}\pi\right)$ ein Tiefpunkt.

Die Bedingung $f'(x) = 0$ ist zwar notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für eine lokale Extremstelle.
Die Bedingung $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$ ist eine hinreichende Bedingung für ein lokales Maximum (Minimum) an der Stelle x.

Aufgaben

1 Bestimmen Sie $f'(x)$ und berechnen Sie $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

a) $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}\cos(x)$ **b)** $f(x) = -9 \cdot \sin(x)$ **c)** $f(x) = \frac{3}{4}\sin(x) + \frac{1}{8}x$ **d)** $f(x) = \pi \cdot \cos(x) - \frac{\sin(x)}{\pi}$

Wenn für die Aufgaben ein Taschenrechner verwendet wird, sollte dieser auf das Bogenmaß (RAD oder R) eingestellt sein.

2 Bestimmen Sie $f'(x)$.

a) $f(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2}$ **b)** $f(x) = x - \pi \cdot \sin(x)$ **c)** $f(x) = 3 \cdot (x^2 - \cos(x))$ **d)** $f(x) = \cos(\pi) \cdot (-x^2)$

3 Bestimmen Sie die Koordinaten aller Punkte, in denen der Graph von $f: x \mapsto \sin(x)$ dieselbe Steigung besitzt wie

a) die Gerade mit der Gleichung $y = x$,
b) eine Parallele zur x-Achse,
c) die Gerade mit der Gleichung $y = -x$,
d) die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x$.

4 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in $P\left(\frac{3}{4}\pi \,\middle|\, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ an den Graphen von $f: x \mapsto \cos(x)$.

Test 1

Lösungen | Seite 271

5 Auf den Kärtchen sind die Terme von Funktionen und zugehörigen Ableitungen gegeben. Bestimmen Sie die passenden Paare.

$a(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sin(x)$

$b(x) = 3\sin(x) - 7x + 9$

$c(x) = x^3 - x^2$

$d(x) = 3x^2 + \sin(x)$

$e(x) = 3\cos(x) - 7$

$f(x) = 3x^2 - 2x$

$g(x) = x + \cos(x)$

$h(x) = x^3 - \cos(x)$

$i(x) = 3(\cos(x) + 4x^2)$

$j(x) = 24x - 3\sin(x)$

6 Geben Sie zwei verschiedene Stammfunktionen an.

a) $f(x) = 3 \cdot \sin(x)$ **b)** $g(x) = \cos(x) + 3$ **c)** $h(x) = \frac{1}{2}x - \sin(x)$ **d)** $i(x) = \frac{\cos(x) - 2 \cdot \sin(x)}{4}$

7 **a)** Bestimmen Sie, wie oft man die Funktion $f: x \mapsto \sin(x)$ ableiten müsste, um wieder dieselbe Funktion zu erhalten.

b) Bestimmen Sie, wie oft man die Funktion $g: x \mapsto \cos(x)$ ableiten müsste, um wieder dieselbe Funktion zu erhalten.

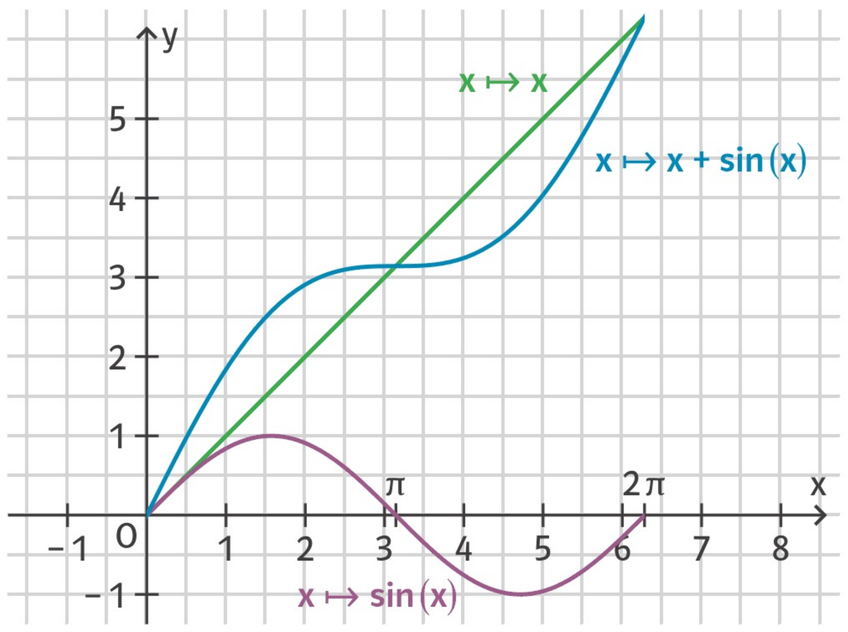
c) Bestimmen Sie die 713. Ableitung von $f: x \mapsto \sin(x)$ und die 135. Ableitung von $g: x \mapsto \cos(x)$.

8 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = x + \sin(x)$ und $g(x) = x + \cos(x)$. Ihre Graphen werden mit G_f und G_g bezeichnet.

a) In der Abbildung ist G_f gezeichnet. Erläutern Sie sich gegenseitig, wie man diesen Graphen mithilfe der anderen beiden eingezeichneten Graphen erhalten kann, und skizzieren Sie analog G_g für $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$.

b) Bestimmen Sie zuerst grafisch, dann rechnerisch die Koordinaten der Punkte auf G_g, in denen die zugehörige Tangente parallel zu der Geraden mit der Gleichung $y = 2x$ ist.

c) Zeigen Sie, dass sowohl G_f als auch G_g an keiner Stelle eine negative Steigung haben.

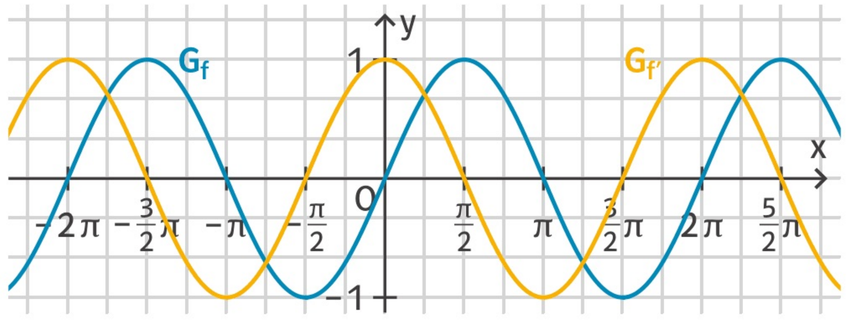


9 Skizzieren Sie mithilfe einer Wertetabelle oder wie in Aufgabe 8 den Graphen von $f: x \mapsto \sin(x) + g(x)$, wobei $g: x \mapsto mx + t$ eine lineare Funktion mit selbst gewählten Werten $m, t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist. Bestimmen Sie grafisch die Ableitung an zwei Stellen und kontrollieren Sie die Werte rechnerisch.

10 Bestimmen Sie Lage und Art der Extremstellen von $f: x \mapsto 2\cos(x) + \frac{x}{3}$ im Intervall $[0; 2\pi]$.

11 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \sin(x) + \cos(x)$. Berechnen Sie $f'(2)$ und $f'\left(\frac{3}{2}\pi\right)$. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie näherungsweise die Steigungen der Tangenten mit einer geeigneten Mathematiksoftware ablesen.

12 Gegeben sind die Funktion $f: x \mapsto \sin(x)$ und ihre Ableitung $f': x \mapsto \cos(x)$. Die Abbildung zeigt die Graphen von f und f'.



a) Beschreiben Sie, wie der Graph von f' aus dem von f hervorgeht, und geben Sie eine reelle Zahl a so an, dass $f'(x) = \sin(x + a)$ gilt.

b) Begründen Sie sich gegenseitig, dass $f''(x) = \sin(x + \pi)$ gilt, und beschreiben Sie, was dies anschaulich bedeutet.

c) Begründen Sie mithilfe der Teilaufgaben a) und b), dass $g: x \mapsto -\sin(x)$ die Ableitung der Kosinusfunktion ist.

13 Gegeben sind die Funktionen $f: x \mapsto \sin(x)$ und $g: x \mapsto \cos(x)$. Ihre Graphen werden mit G_f und G_g bezeichnet.

Strategie | Seite 256
Veranschaulichen durch eine informative Figur oder Skizze

a) Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Graphen im Intervall $[0; \pi]$.

b) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, unter dem die durch S verlaufenden Tangenten jeweils die x-Achse schneiden.

c) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, unter dem sich die durch S verlaufenden Tangenten schneiden.

d) Bestimmen Sie zwei Stellen x_1 und x_2 im Intervall $[0; \pi]$ derart, dass die Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_1 die Tangente an den Graphen von g an der Stelle x_2 unter einem Winkel der Größe 90° schneidet. Untersuchen und diskutieren Sie, ob es weitere solche Stellen im Intervall $[0; \pi]$ gibt.

Ist m die Steigung der Tangente an den Graphen von f in einem Punkt, so ist $-\frac{1}{m}$ die Steigung der Normalen an den Graphen in diesem Punkt.

14 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt P und die Größe des Steigungswinkels dieser Tangente.

Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

a) $f(x) = \sin(x)$, $P(0 \mid f(0))$

b) $f(x) = 2\cos(x) - 5\sin(x)$, $P\left(\frac{3}{4}\pi \,\middle|\, f\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)$

15 Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangente und der Normalen an den Graphen von f im Punkt P.

a) $f(x) = \sin(x)$, $P\left(\frac{1}{3}\pi \,\middle|\, f\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right)$

b) $f(x) = x + 2 \cdot \sin(x)$, $P\left(\frac{1}{4}\pi \,\middle|\, f\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right)$

Test 2

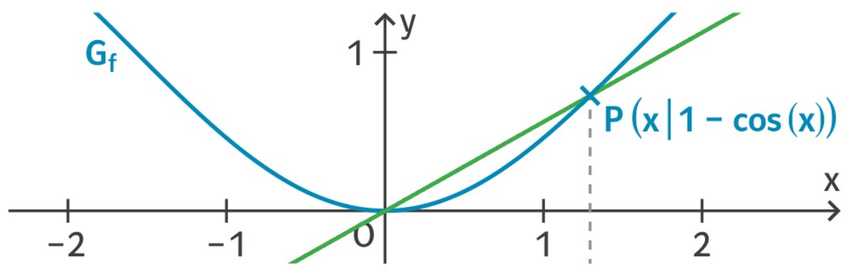
Lösungen | Seite 271

16 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt P und die Größe des Steigungswinkels dieser Tangente.

a) $f(x) = 3 \cdot \sin(x)$, $P\left(\frac{5}{3}\pi \,\middle|\, f\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right)$

b) $f(x) = \cos(x)$, $P\left(\frac{1}{4}\pi \,\middle|\, f\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right)$

17 Geben Sie zuerst die Steigung der eingezeichneten Sekante OP an und erläutern Sie damit und anhand der Abbildung, dass $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$ ist.



Haben zwei Funktionsgraphen an einer Stelle x_0 dieselbe Tangente, so sagt man: Die Funktionsgraphen berühren sich im Punkt $(x_0 \mid f(x_0))$.

18 Bestimmen Sie, für welche $c \in \mathbb{R}$ sich die Graphen von $f: x \mapsto \sin(x)$ und $g_c: x \mapsto \cos(x) + c$ berühren.

Lösungen | Seite 271

Grundwissen Test

G 19 Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Graph der Funktion achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse oder punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs ist oder keine dieser Symmetrien aufweist.

Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

a) $f: x \mapsto -x^6 - 2x^2 + 3$

b) $g: x \mapsto -\frac{4x}{3x^2 - 2}$

c) $h: x \mapsto \frac{-2}{x - 4} + 6$

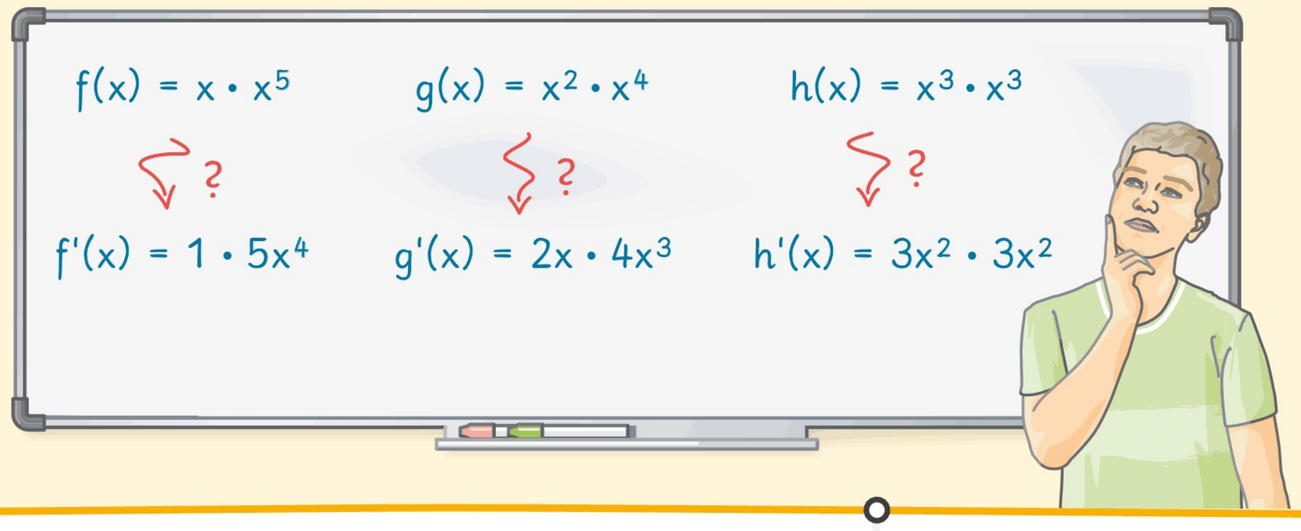
d) $p: x \mapsto x^5 - 4x^3 - 5$

e) $k: x \mapsto x^2 \cdot (3 - x)^2$

f) $q: x \mapsto x \cdot \sin(x)$

4 Produktregel

Matteo denkt sich: „Eine Funktion, die man als Produkt schreiben kann, lässt sich ganz einfach ableiten."
Beschreiben Sie Matteos Vorgehensweise und begründen Sie, dass seine Regel nicht stimmen kann.



Laut Summenregel ist die Ableitungsfunktion der Summe zweier Funktionen u und v gleich der Summe der Ableitungsfunktionen u′ und v′.
Beispiele zeigen jedoch, dass die Bestimmung der Ableitung eines Produkts zweier Funktionen anders als bei der Summenregel erfolgt.

Betrachtet man z. B. $f: x \mapsto x^2 \cdot 3x$, so ist wegen $x^2 \cdot 3x = 3x^3$ die Ableitungsfunktion $f': x \mapsto 9x^2$.
Das Produkt der Ableitungen der einzelnen Faktoren $u(x) = x^2$ und $v(x) = 3x$ ist dagegen $u'(x) \cdot v'(x) = (2x) \cdot 3 = 6x \neq 9x^2$ (für $x \neq 0$).

Bei Produkten von ganzrationalen Funktionen kann man vor dem Ableiten stets ausmultiplizieren, nicht aber bei Produkten von Funktionen, bei denen ein Faktor z. B. die Funktion $x \mapsto \sin(x)$ ist.

Eine Ableitungsregel für das Produkt zweier Funktionen erhält man durch Betrachtung des Differentialquotienten für die Funktion f mit $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ an einer beliebigen Stelle x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) \cdot v(x) \overbrace{- u(x_0) \cdot v(x) + u(x_0) \cdot v(x)}^{= 0} - u(x_0) \cdot v(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{u(x_0) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} v(x) \cdot \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} u(x_0) \cdot \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \left(\lim_{x \to x_0} v(x)\right) \cdot \left(\lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}\right) + u(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}$$

$= v(x_0) \cdot u'(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0)$, vorausgesetzt u und v sind an der Stelle x_0 differenzierbar.

Es werden die folgenden Rechenregeln für Grenzwerte verwendet:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

und

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right).$$

Damit ist der folgende Satz bewiesen.

Satz (Produktregel): Sind die Funktionen u und v differenzierbar, so gilt für die Funktion $f = u \cdot v$ mit $f(x) = u(x) \cdot v(x)$:

$$\mathbf{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).}$$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Bemerkung:
Die Faktorregel ist ein Spezialfall der Produktregel. Betrachtet man nämlich $f(x) = k \cdot v(x)$ und setzt $u(x) = k$, so gilt $u'(x) = 0$ und man erhält mit der Produktregel
$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 0 \cdot v(x) + k \cdot v'(x) = k \cdot v'(x)$, was auch die Faktorregel liefert.

Beispiel 1

Bestimmen Sie auf zwei verschiedene Weisen die Ableitung f′ zu $f: x \mapsto (x-1)(x^2+2)$ und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

Lösung

Mit der Produktregel:

Es gilt $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ mit $u(x) = x - 1$ und $v(x) = x^2 + 2$. Also folgt $u'(x) = 1$ und $v'(x) = 2x$.

Die Produktregel liefert

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 1 \cdot (x^2 + 2) + (x - 1) \cdot (2x) = 3x^2 - 2x + 2$.

Durch Ausmultiplizieren:

Es gilt $f(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + 2) = x^3 - x^2 + 2x - 2$, also $f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$.

Beispiel 2

Bestimmen Sie Terme der ersten und zweiten Ableitung von $f(x) = x^3 \cdot \sin(x)$ und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

Lösung

Es gilt $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ mit $u(x) = x^3$ und $v(x) = \sin(x)$. Also folgt $u'(x) = 3x^2$ und $v'(x) = \cos(x)$.

Die Produktregel liefert

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 3x^2 \cdot \sin(x) + x^3 \cdot \cos(x)$.

Mit der Summen- und Produktregel folgt

$f''(x) = 6x \cdot \sin(x) + 3x^2 \cdot \cos(x) + 3x^2 \cdot \cos(x) - x^3 \cdot \sin(x) = \sin(x) \cdot (6x - x^3) + 6x^2 \cdot \cos(x)$.

In der Regel werden die Terme höherer Ableitungen von nicht-ganzrationalen Funktionen bei Anwendung der Produktregel komplexer.

Aufgaben

1 Bestimmen Sie einen Term der Ableitung auf zwei verschiedene Weisen.

a) $f(x) = (x^3 - 2x - 1)(x^2 + 3)$

b) $h(x) = (x - 1)(x + 3)$

c) $g(x) = (2x^2 - x + 2)(0{,}5x^2 - x - 3)$

d) $i(x) = (x^4 - x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2)$

2 Bestimmen Sie einen Term der Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = x \cdot \sin(x)$

b) $f(x) = 3x \cdot \cos(x)$

c) $f(x) = (5 - 3x) \cdot \sin(x)$

d) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

e) $f(x) = \sin(x) \cdot (x^3 - 17x + 1)$

f) $f(x) = (x^2 + 3x) \cdot \sin(x)$

3 Hier wurde falsch abgeleitet. Beschreiben und korrigieren Sie die Fehler.

A $f(x) = (x^2 + 1) \cdot (2x^3 - 3x)$

$f'(x) = (2x) \cdot (6x^2 - 3)$

B $f(x) = (3x + 8) \cdot \sin(x)$

$f'(x) = 3 \cdot \cos(x)$

C $f(x) = (3x + 8) \cdot \cos(x)$

$f'(x) = 3 \cdot \cos(x) + (3x + 8) \cdot \sin(x)$

4 Erläutern Sie anhand eines selbst gewählten Beispiels die Anwendung der Produktregel.

→ Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

5 Weisen Sie nach, dass f eine Stammfunktion von g ist.

a) $f(x) = (2x^3 - x) \cdot \sin(x) + 6$; $g(x) = (6x^2 - 1) \cdot \sin(x) + (2x^3 - x) \cdot \cos(x)$

b) $f(x) = x^2 \cdot \cos(x) + 3x^2 \cdot \cos(x)$; $g(x) = 4x \cdot (2\cos(x) - x \cdot \sin(x))$

Test 1

→ Lösungen | Seite 272

6 Bestimmen Sie einen Term der Ableitungsfunktion.

a) $g(x) = x \cdot \cos(x)$

b) $f(x) = (x^2 + 3) \cdot \sin(x)$

c) $h(x) = 5^2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$

d) $l(x) = 4x^3 - x^2 + (x^3 - 12x) \cdot \sin(x)$

7 Bestimmen Sie Terme der ersten und zweiten Ableitung. Der Parameter ist reell.

a) $f_a(x) = \sin(x) \cdot (ax^2 - x)$

b) $g(x) = 3x^2 \cdot \cos(x) - 2x^2 \cdot \cos(x)$

c) $h_t(z) = t \cdot \sin(z) \cdot \cos(z)$

d) $f(t) = 2\sin(t) \cdot \frac{t^3}{3}$

e) $g_k(x) = (x^2 + k^2) \cdot (x^2 - k^2)$

f) $h(r) = 3r^2 - 3r^2 \cdot \cos(r)$

8 Gegeben sind zwei differenzierbare Funktionen g und h. Es gilt $h(x) = x \cdot g(x)$, an der Stelle 3 hat g den Funktionswert 5 und der Graph von g die Steigung 2. Bestimmen Sie die Steigung der Tangente an den Graphen von h an der Stelle 3.

9 Gegeben ist der Term einer Funktion f. Geben Sie einen Term einer Stammfunktion von f an.

a) $f(x) = (-3) \cdot \sin(x)$ **b)** $f(x) = \sin(x) + (x + 2)\cos(x)$

c) $f(x) = 2x \cdot \cos(x) - (x^2 + 1) \cdot \sin(x)$ **d)** $f(x) = 2\cos(x) - 2x \cdot \sin(x)$

10 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (3x + 1)\sin(x) + x^2\cos(x)$. Bestimmen Sie Lage und Art aller Extrempunkte des Graphen von f auf dem Intervall $[-6; 6]$.

11 Gegeben ist eine dreimal differenzierbare Funktion g. Bestimmen Sie Terme der ersten und zweiten Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = x^2 \cdot g(x)$ **b)** $f(x) = x \cdot g'(x)$ **c)** $f(x) = (g(x))^2$ **d)** $f(x) = g(0) \cdot g(x)$

12 Der Graph der Funktion f berührt die x-Achse im Punkt $P(2\,|\,0)$. Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion g mit $g(x) = x \cdot f(x)$ ebenfalls die x-Achse im Punkt P berührt.

13 Für zwei Funktionen g und h ist $(g + h)' = g' + h'$. In einem Lehrbuch findet man bei der Produktregel die Anmerkung $(g \cdot h)' \neq g' \cdot h'$. Erläutern Sie, ob dies für alle Funktionen g und h gilt.

14 Es ist $f_1(x) = (x - 1)(x - 2)$, $f_2(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ usw. Bestimmen Sie f_1', f_2' usw. Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen den Ableitungen. Verallgemeinern Sie für n Faktoren.

Test 2

→ Lösungen | Seite 272

15 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x \cdot \sin(x) + (1 - x^2) \cdot \cos(x)$. Bestimmen Sie Lage und Art aller Extrempunkte des Graphen von f auf dem Intervall $[-5; 5]$.

16 Der Graph von f hat im Punkt $P(0\,|\,1)$ eine waagerechte Tangente. Untersuchen Sie, ob dies auch für die Graphen der Funktionen g und h mit $g(x) = f(x) \cdot \cos(x)$ und $h(x) = (x + 1) \cdot f(x)$ gilt.

17 **a)** Gegeben sind die Funktionen g und h mit $g(x) = x \cdot \sin(x)$ und $h(x) = \cos(x)$. Berechnen Sie $g'(x)$ und $h'(x)$. Weisen Sie damit nach, dass die Funktion $f = g \cdot h$ die Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = \sin(x) \cdot \cos(x) + x \cdot (\cos(x))^2 - x \cdot (\sin(x))^2$ besitzt.

b) Gegeben sind drei differenzierbare Funktionen u, v und w und die Funktion $f = u \cdot v \cdot w$. Bestimmen Sie einen allgemeinen Funktionsterm $f'(x)$ für die Ableitung.

18 **a)** Ergänzen Sie den Satz zu einer korrekten Regel: Lässt eine natürliche Zahl n bei Division durch 4 den Rest 2, so lautet die n-te Ableitung der Sinusfunktion …

b) Formulieren Sie wie in Teilaufgabe a) eine Regel für natürliche Zahlen, die bei Division durch 4 den Rest 1 (0; 3) lassen.

c) Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x \cdot \sin(x)$. Bestimmen Sie Terme der ersten, zweiten und dritten Ableitung von f. Ermitteln Sie einen Term der 15. Ableitung von f.

→ Strategie | Seite 256
Systematisches Probieren

Grundwissen Test

→ Lösungen | Seite 272

G 19 Mia würfelt dreimal nacheinander mit einem fairen Würfel. Die geworfenen Augenzahlen a_1, a_2 und a_3 addiert sie sukzessive. Es ergeben sich also die Summen $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$ und $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$. Ist keine dieser drei Augensummen s_1, s_2 und s_3 durch 3 teilbar, so hat Mia gewonnen; anderenfalls hat sie verloren.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Mia gewinnt.

5 Verkettung von Funktionen

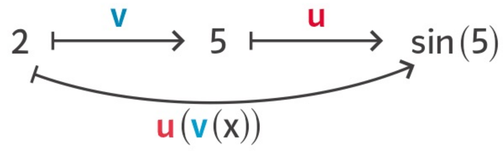
Für die Umrechnung einer Temperaturangabe von der Kelvin-Skala in die Celsius-Skala gilt die Vorschrift $c(k) = k - 273$ (k: Temperatur in Kelvin; $c(k)$: Temperatur in °C), von der Celsius-Skala in die Fahrenheit-Skala rechnet man mittels $f(c) = 1{,}8\,c + 32$ um (c: Temperatur in °C; $f(c)$: Temperatur in °F). Damit kann man jede beliebige Temperaturangabe in Kelvin in zwei Schritten in Grad Fahrenheit umrechnen. Erläutern Sie, wie dies in einem Schritt geht.

Bisher wurden Funktionsterme addiert, subtrahiert, multipliziert oder dividiert und auch Regeln erarbeitet, wie man die so verknüpften Funktionen gegebenenfalls ableiten kann. Eine neue Art der Verknüpfung ist die Verkettung von Funktionen.

Aus zwei Funktionen u und v kann man eine neue Funktion bilden, indem man die Funktionswerte der einen in die andere einsetzt. Gilt etwa $u(x) = \sin(x)$ und $v(x) = x^2 + 1$, so erhält man für $x = 2$ beispielsweise zuerst $v(2) = 5$ und dann $u(v(2)) = u(5) = \sin(5)$. Allgemein gilt $u(v(x)) = u(x^2 + 1) = \sin(x^2 + 1)$ und man erhält als neue Funktion $f: x \mapsto \sin(x^2 + 1)$.

Die Bestimmung des Funktionswertes $f(2)$ kann folgendermaßen dargestellt werden.

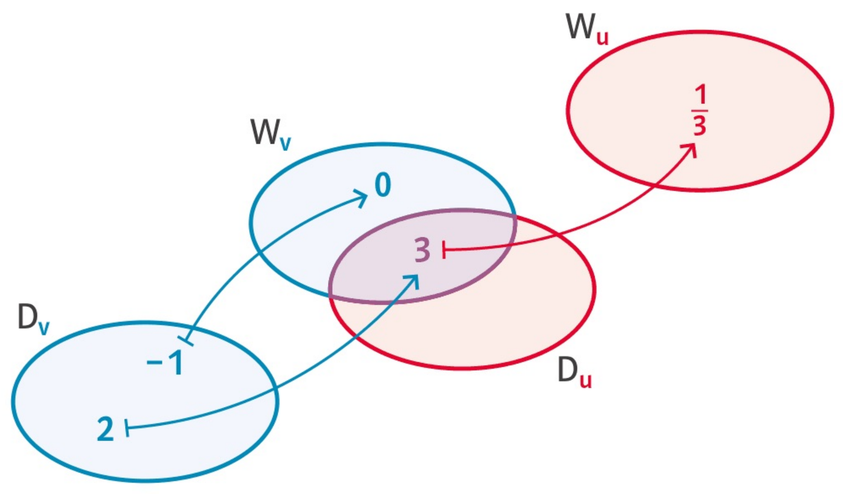
x	v(x)	u(v(x))
2	v(2) = 5	u(5) = sin(5)



Diese Darstellung verdeutlicht, dass die Funktionen v und u hintereinander ausgeführt werden. Zunächst wird $v(2)$ gebildet und anschließend wird die Funktion u auf $v(2)$ angewendet.

Man nennt f auch **Verkettung** u nach v und schreibt für $f(x) = u(v(x))$ auch kurz $f = u \circ v$.

Manchmal besitzt die Verkettung eine eingeschränkte Definitionsmenge. Ist z. B. $v(x) = x^2 - 1$ und $u(x) = \frac{1}{x}$, so ist u nur für $x \neq 0$ definiert. Damit $u(v(x))$ gebildet werden kann, dürfen in $u(x)$ also nur Werte mit $v(x) \neq 0$ eingesetzt werden. $v(x)$ ist genau dann gleich null, wenn $x \in \{-1; 1\}$ ist.
Für die Definitionsmenge von $u \circ v$ gilt also $D_{u \circ v} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.



Für $x = 2$ kann $u \circ v$ gebildet werden.
Für $x = -1$ kann $u \circ v$ **nicht** gebildet werden.

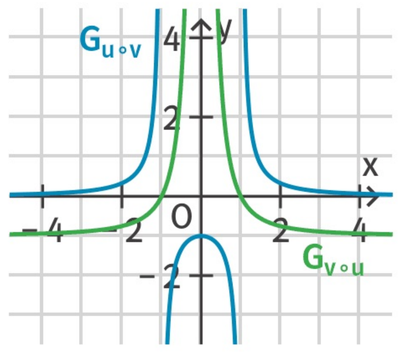
Bei der Verkettung $x \mapsto (u \circ v)(x) = u(v(x))$ nennt man v die **innere** und u die **äußere Funktion**. Es gilt dann

$u(v(x)) = u(x^2 - 1) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

Bildet man dagegen die Verkettung $v \circ u$, so ist u die innere und v die äußere Funktion. In diesem Fall gilt

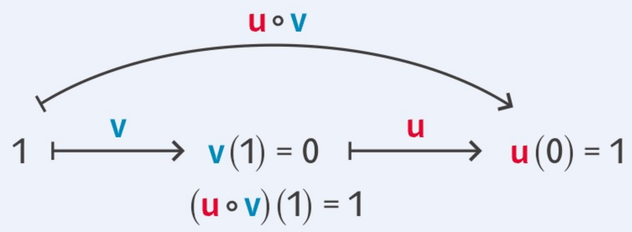
$v(u(x)) = v\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1 = \frac{1}{x^2} - 1$.

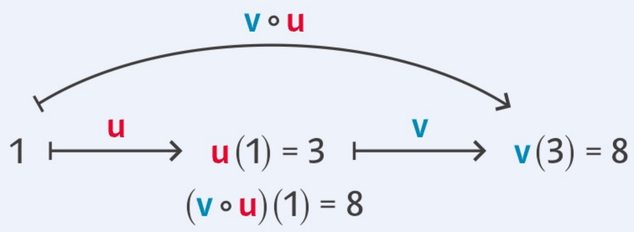
Es gilt also $u \circ v \neq v \circ u$. Das Verketten zweier Funktionen ist nicht kommutativ.

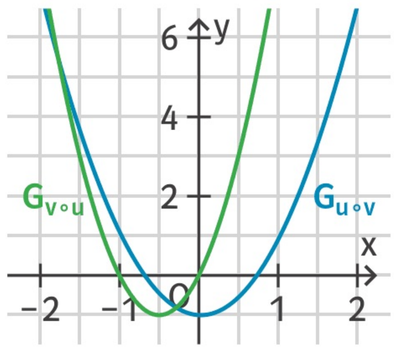


Für zwei Funktionen u und v gibt es zwei mögliche Verkettungen:
Die **Verkettung u nach v**: $u \circ v\colon x \mapsto u(v(x))$.
Die **Verkettung v nach u**: $v \circ u\colon x \mapsto v(u(x))$.
Das Verketten zweier Funktionen ist nicht kommutativ; im Allgemeinen gilt $u \circ v \neq v \circ u$.

Beispiel: $u\colon x \mapsto 2x + 1$ und $v\colon x \mapsto x^2 - 1$







Komplexere Funktionen wie $f\colon x \mapsto 5^{3x-2}$ lassen sich oft als Verkettung einfacherer Funktionen darstellen. Wählt man $v(x) = 3x - 2$ als innere Funktion, erhält man als äußere Funktion $u(x) = 5^x$. Damit ist $f = u \circ v$. Die Darstellung einer Funktion als Verkettung ist nicht eindeutig. Beispielsweise ist eine andere Möglichkeit der Darstellung als Verkettung $v(x) = 3x$ und $u(x) = 5^{x-2}$.

Beispiel 1

Gegeben sind die Funktionen $u\colon x \mapsto \frac{1}{2x}$ und $v\colon x \mapsto \sin(x)$ mit $D_u = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $D_v = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Funktionsterme von $u \circ v$ und $v \circ u$ und geben Sie jeweils die maximale Definitionsmenge an.

Lösung

$(u \circ v)(x) = u(v(x)) = \frac{1}{2\sin(x)}$. Damit $2\sin(x) \neq 0$ ist, muss $\sin(x) \neq 0$ sein, also $x \notin \{\ldots -2\pi; -\pi; 0; \pi; 2\pi \ldots\}$. Daher gilt $D_{u\circ v} = \mathbb{R}\setminus\{\ldots -2\pi; -\pi; 0; \pi; 2\pi \ldots\} = \mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

$(v \circ u)(x) = v(u(x)) = \sin\left(\frac{1}{2x}\right)$. Damit $2x \neq 0$ ist, muss $x \neq 0$ sein. Daher gilt $D_{v\circ u} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

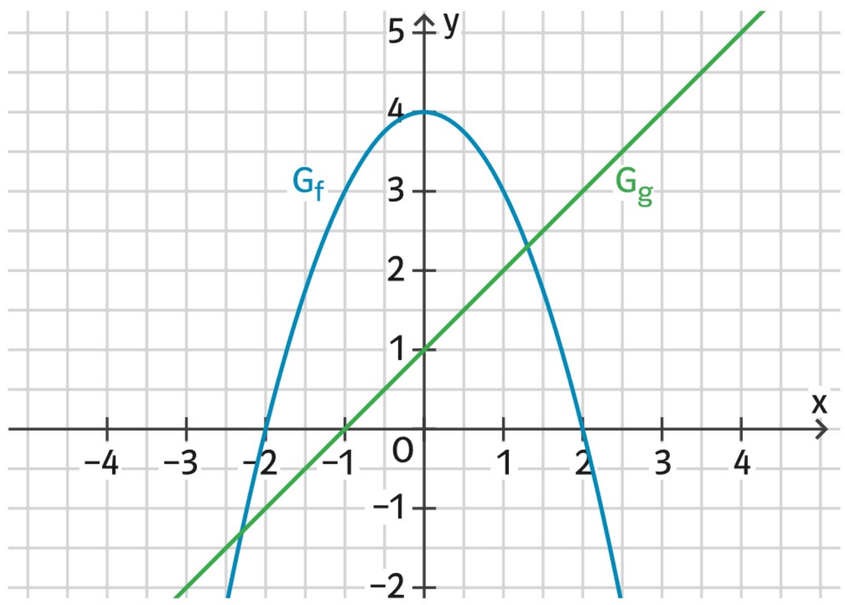
Beispiel 2

Die Abbildung zeigt die Graphen der quadratischen Funktion f und der linearen Funktion g.

a) Bestimmen Sie $(f \circ g)(0)$ und $(g \circ f)(0)$.

b) Bestimmen Sie alle Werte für x mit $(f \circ g)(x) = 0$.

c) Untersuchen Sie das Verhalten von $f \circ g$ für $x \to \pm\infty$.



Lösung

a) Mit $g(0) = 1$ ist $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(1) = 3$.
Es ist $f(0) = 4$, also
$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(4) = 5$.

b) Es ist $f(-2) = 0$ und $f(2) = 0$. Damit $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 0$ gilt, muss also $g(x) = -2$ oder $g(x) = 2$ sein. Dies ist für $x_1 = -3$ und $x_2 = 1$ erfüllt.

c) Für $x \to +\infty$ gilt $g(x) \to +\infty$ und $f(g(x)) \to -\infty$. Für $x \to -\infty$ gilt $g(x) \to -\infty$ und $f(g(x)) \to -\infty$.

Aufgaben

1 Geben Sie Funktionsterme und die maximalen Definitionsmengen der Funktionen $f = u \circ v$ und $g = v \circ u$ an.

a) $u(x) = 3x,\ v(x) = x - 1$

b) $u(x) = \frac{2}{x},\ v(x) = x + 5$

c) $u(x) = \cos(x),\ v(x) = 4 - x$

d) $u(x) = x^2 + x,\ v(x) = x - 2$

e) $u(x) = \frac{1}{5}x^2 + x,\ v(x) = -7x$

f) $u(x) = \frac{1}{x+1},\ v(x) = \cos(x) + 1$

2 Gegeben sind die Funktionen u, v und w mit $u(x) = x^2$, $v(x) = \frac{1}{x-2}$ und $w(x) = \sin(x)$. Geben Sie Funktionsterme und die maximalen Definitionsmengen der Funktionen $u + v$, $u \cdot v$, $w \cdot v$, $u \circ v$, $w \circ v$ und $v \circ w$ an.

3 Berechnen Sie für $u(x) = 1 - 3x$ und $v(x) = 1 + 2x^2$ den angegebenen Funktionswert.

a) $u(v(0))$ **b)** $v(u(0))$ **c)** $u(v(1))$ **d)** $v(v(2))$

e) $(u \circ v)(3)$ **f)** $(v \circ u)(3)$ **g)** $(u \circ u)(-2)$ **h)** $u((v \circ v)(1))$

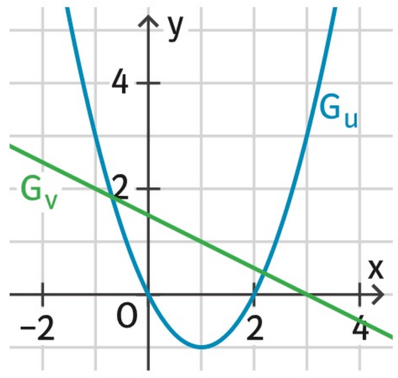
4 Zeigen Sie anhand eines selbst gewählten Beispiels, dass die Verkettung von Funktionen nicht kommutativ ist.

5 Gegeben sind die Graphen der quadratischen Funktion u und der linearen Funktion v. Es ist $f = u \circ v$ und $g = v \circ u$.

a) Bestimmen Sie grafisch die Funktionswerte von f und g an den Stellen 0 und 1.

b) Begründen Sie mithilfe der Graphen, dass die Funktionen f und g die gleichen Nullstellen haben.

c) Untersuchen Sie das Verhalten von f und g für $x \to \pm\infty$.



Test 1

Lösungen | Seite 272

6 Geben Sie Funktionsterme und die maximalen Definitionsmengen der Funktionen $f = u \circ v$ und $g = v \circ u$ an.

a) $u(x) = 3x + 1$, $v(x) = x^2$ **b)** $u(x) = \cos(x + 1)$, $v(x) = x - 1$

c) $u(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = x^2 + 1$ **d)** $u(x) = x + \frac{1}{x}$, $v(x) = x^2 - 1$

7 Geben Sie Funktionsterme für Funktionen u und v so an, dass $f = u \circ v$ gilt.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ **b)** $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$ **c)** $f(x) = (\sin(x))^2$ **d)** $f(x) = \sin(x^2)$

8 **a)** Gegeben sind die Funktionen u, v und w. Geben Sie zuerst die Funktion $u \circ v \circ w$ und anschließend arbeitsteilig alle weiteren möglichen Verkettungen dieser drei Funktionen an.

b) Stellen Sie die Funktion $f: x \mapsto \sin(x^2 + \pi)$ als Verkettung dreier Funktionen dar.

$v: x \mapsto x^2$

$u: x \mapsto 2x + 3$

$w: x \mapsto \frac{3}{x}$

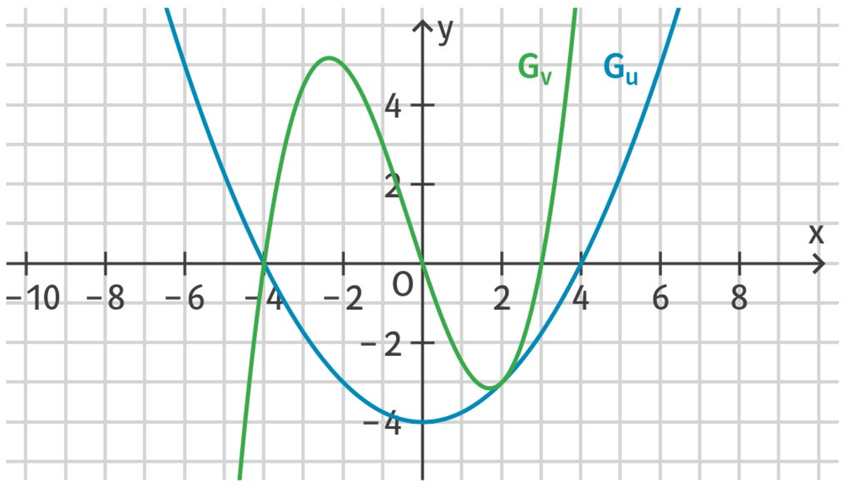
9 Von den Funktionen u und v sind folgende Ausschnitte aus ihren Wertetabellen bekannt.

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5
u(x)	4	3	1	2	3	2	3	5
v(x)	−2	1	0	−1	0	1	−1	−2

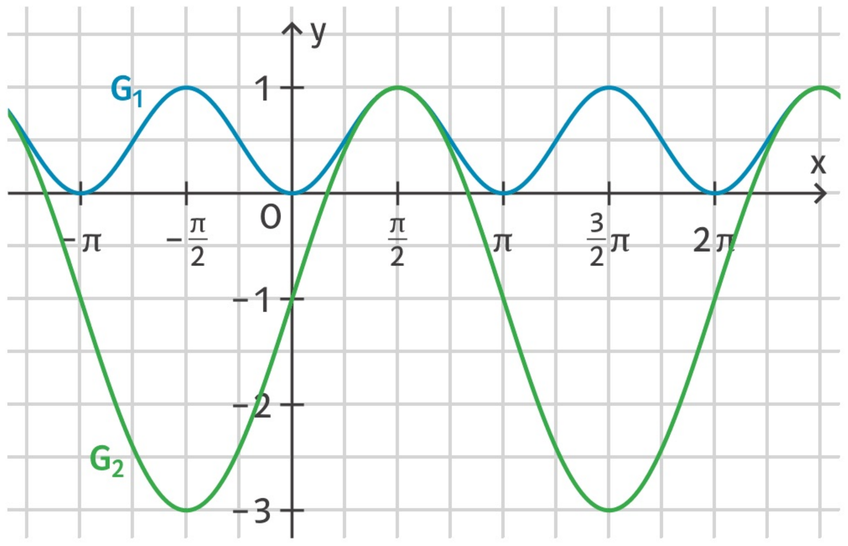
Erstellen Sie entsprechende Wertetabellen für die Funktionen f und g mit $f = u \circ v$ und $g = v \circ u$.

10 Dargestellt sind die Graphen G_u und G_v zweier Funktionen u und v. Vervollständigen Sie mithilfe der Abbildung näherungsweise die Wertetabelle von $f = u \circ v$.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
f(x)								



11 Gegeben sind folgende Funktionen:
$u: x \mapsto 2x - 1$, $v: x \mapsto x^2$ und $w: x \mapsto \sin(x)$.
In der Abbildung sind die Graphen der Verkettung von je zwei dieser Funktionen dargestellt.
Bestimmen Sie die zu den Graphen gehörigen Verkettungen.



12 Geben Sie Funktionsterme für Funktionen u und v so an, dass $f = u \circ v$ gilt.

a) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)$ **b)** $f(x) = \frac{3}{\cos(x) + 1}$ **c)** $f(x) = \sin\left(\frac{-3x + 4}{2x^3 - x^2}\right)$ **d)** $f(x) = 3\left(\frac{x^2 + 1}{1 - x^3}\right)^2$

13 **a)** Zeigen Sie: Die Verkettung zweier linearer Funktionen $u: x \mapsto m_1 x + t_1$ und $v: x \mapsto m_2 x + t_2$ ist wieder eine lineare Funktion der Form $f: x \mapsto m x + t$.

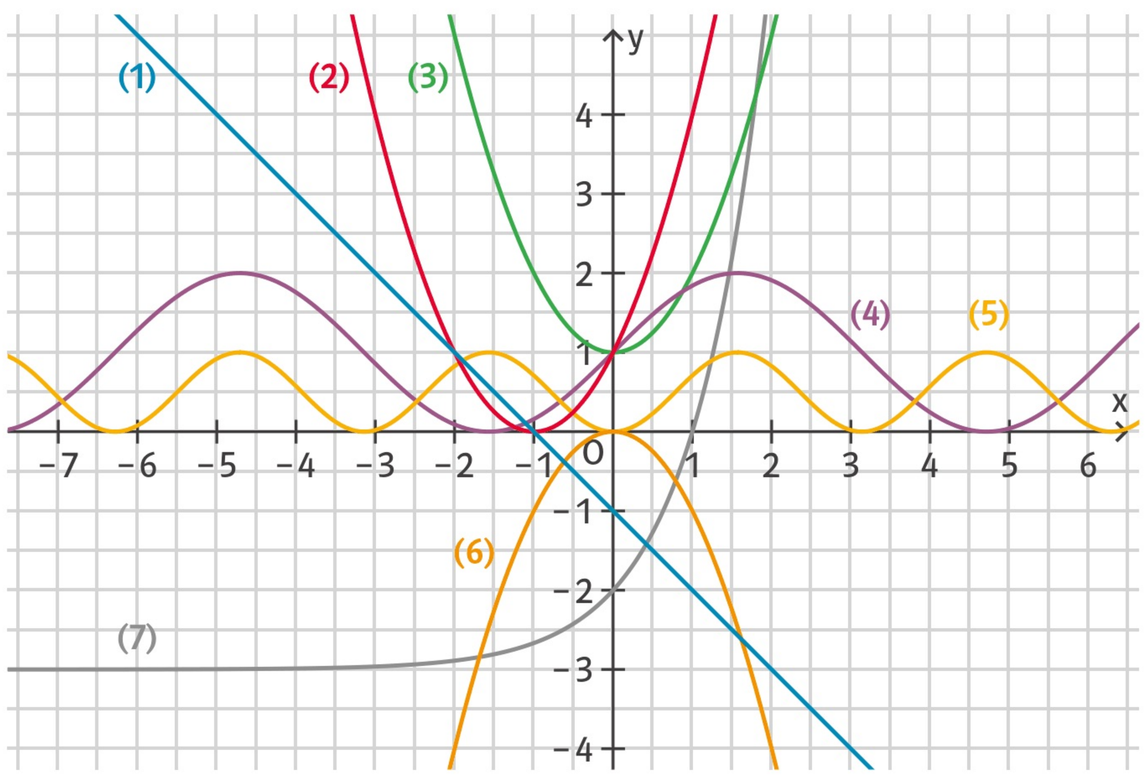
b) Zeigen Sie, dass eine entsprechende Aussage für quadratische Funktionen nicht gilt.

Test 2

→ Lösungen | Seite 272

14 In der Abbildung sind Graphen von Verkettungen von zwei der Funktionen $f: x \mapsto x^2$, $g: x \mapsto x + 1$, $h: x \mapsto \sin(x)$, $p: x \mapsto 3^x - 4$ und $q: x \mapsto -x$ dargestellt. Geben Sie die zu den Graphen gehörigen Verkettungen an.

→ Strategie | Seite 257
Ausschlussprinzip



15 **a)** Gegeben sind eine Funktion v, deren Graph symmetrisch zur y-Achse ist, und eine beliebige Funktion u. Außerdem gilt $f = u \circ v$. Zeigen Sie, dass der Graph von f symmetrisch zur y-Achse ist.

b) Gegeben sind eine Funktion v, deren Graph punktsymmetrisch zum Ursprung ist, und eine beliebige Funktion u. Außerdem gilt $f = u \circ v$. Zeigen Sie, dass der Graph von f im Allgemeinen nicht punktsymmetrisch zum Ursprung sein muss.

c) Der Graph von v sei punktsymmetrisch zum Ursprung. Geben Sie eine zusätzliche Voraussetzung für u so an, dass der Graph von $f = u \circ v$ symmetrisch zur y-Achse ist.

d) Der Graph von v sei punktsymmetrisch zum Ursprung. Geben Sie eine zusätzliche Voraussetzung für u so an, dass der Graph von $f = u \circ v$ punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

Zur Erinnerung:
Der Graph einer Funktion h ist genau dann zur y-Achse symmetrisch, wenn $h(x) = h(-x)$ für alle $x \in D$ gilt.
Er ist punktsymmetrisch zum Ursprung, falls $h(-x) = -h(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

Grundwissen Test

→ Lösungen | Seite 272

G 16 Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung. Überprüfen Sie stets, ob Ausklammern sinnvoll ist.

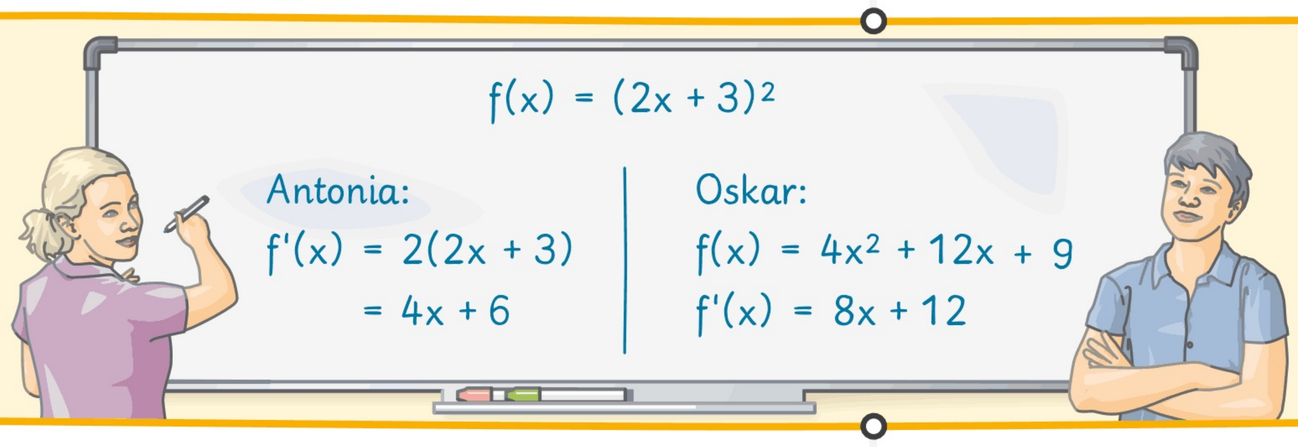
a) $(3x - 1)(2 + x) = 0$ **b)** $-5t^2 \cdot (4 - 3t^2) = 0$ **c)** $(x + 1) \cdot (3x - 3) = 3$

d) $3x^4 + 9x^3 + 6x^2 = 0$ **e)** $x^2 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^x = 0$ **f)** $(4^t \cdot t^2 - 4^t)(2^t - 8) = 0$

g) $3x^3 - x = 2x^2$ **h)** $3x^2 - 6x^{-2} + 2 = 2$ **i)** $(t - 1) \cdot (t - 3) - 3t = 0$

6 Kettenregel

Antonia und Oskar sollen die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (2x + 3)^2$ bilden. Beschreiben Sie, wie die beiden vorgegangen sind, und begründen Sie, welcher Ableitungsterm richtig ist.



Funktionen wie $g: x \mapsto \sin(x^2 + 2x)$ kann man mit den bisher bekannten Regeln nicht ableiten. Fasst man solche Funktionen aber als Verkettungen geeigneter Funktionen auf, so kann man deren Ableitungen ermitteln.

Die Funktion $f: x \mapsto (4x - 5)^2$ kann man mit den bisherigen Regeln ableiten, wenn man zunächst ausmultipliziert: $f(x) = (4x - 5)^2 = 16x^2 - 40x + 25 \implies f'(x) = 32x - 40$.

Alternativ kann man $f: x \mapsto (4x - 5)^2$ als verkettete Funktion der Form $f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x))$ auffassen.
Innere Funktion: $v(x) = 4x - 5$. Äußere Funktion: $u(x) = x^2$.

Für die Funktionen u und v lassen sich dann die Ableitungen bestimmen.
Ableitung der inneren Funktion: $v'(x) = 4$. Ableitung der äußeren Funktion: $u'(x) = 2x$.

Man ermittelt die Ableitung von u an der Stelle $v(x)$: $u'(v(x)) = u'(4x - 5) = 2(4x - 5) = 8x - 10$.

Vergleicht man die oben ermittelte Ableitung f' mit u' und v', so gilt für $f = u \circ v$:
$f'(x) = u'(v(x)) \cdot 4 = u'(v(x)) \cdot v'(x)$.

Die Betrachtung weiterer Beispiele erhärtet die Vermutung, dass die beobachtete Regel stets erfüllt ist. Diese soll nun bewiesen werden.
Es sei $f(x) = u(v(x))$. Die innere Funktion v sei an der Stelle x_0 differenzierbar, die äußere Funktion u an der Stelle $v(x_0)$. Um zu untersuchen, ob die Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, betrachtet man den Differenzenquotienten von f und versucht, diesen mithilfe der Differenzenquotienten von u und v darzustellen. Für $x \neq x_0$ gilt:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{u(v(x)) - u(v(x_0))}{x - x_0} = \frac{u(v(x)) - u(v(x_0))}{x - x_0} \cdot \underbrace{\frac{v(x) - v(x_0)}{v(x) - v(x_0)}}_{= 1} = \frac{u(v(x)) - u(v(x_0))}{v(x) - v(x_0)} \cdot \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}$$

$$\implies f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{u(v(x)) - u(v(x_0))}{v(x) - v(x_0)} \cdot \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \right) = \left(\lim_{x \to x_0} \frac{u(v(x)) - u(v(x_0))}{v(x) - v(x_0)} \right) \cdot \left(\lim_{x \to x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \right)$$

$= u'(v(x_0)) \cdot v'(x_0)$, vorausgesetzt u bzw. v ist an der Stelle $v(x_0)$ bzw. x_0 differenzierbar.

Im letzten Umformungsschritt wird ausgenutzt, dass mit $x \to x_0$ auch $v(x) \to v(x_0)$ gilt.

Satz (Kettenregel): Ist $f = u \circ v$ eine Verkettung zweier differenzierbarer Funktionen u und v, so ist auch f mit $f(x) = u(v(x))$ differenzierbar und es gilt

$$\mathbf{f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)}.$$

Merkregel:
„äußere Ableitung“
mal
„innere Ableitung“

Man nennt $u'(v(x))$ die **äußere Ableitung** und $v'(x)$ die **innere Ableitung**. Das Bilden des Faktors $v'(x)$ wird auch **Nachdifferenzieren** genannt.
Nun kann man die oben betrachtete Funktion $g: x \mapsto \sin(x^2 + 2x)$ ableiten. Mit $v(x) = x^2 + 2x$, $u(x) = \sin(x)$, $v'(x) = 2x + 2$ und $u'(x) = \cos(x)$ folgt $g'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) = \cos(x^2 + 2x) \cdot (2x + 2)$.

Beispiel 1

Bestimmen Sie mithilfe der Kettenregel einen Term der Ableitung. Geben Sie zunächst die innere Funktion v und die äußere Funktion u an.

→ Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

a) $f: x \mapsto (2 - 6x)^5$ **b)** $f: x \mapsto \sin(x^3 - 4x^2)$

Lösung

a) Innere Funktion: $v(x) = 2 - 6x$, äußere Funktion: $u(x) = x^5$.
Innere Ableitung: $v'(x) = -6$, äußere Ableitung: $u'(x) = 5x^4$.
Mit der Kettenregel folgt $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) = 5(2 - 6x)^4 \cdot (-6) = -30(2 - 6x)^4$.

b) Innere Funktion: $v(x) = x^3 - 4x^2$, äußere Funktion: $u(x) = \sin(x)$.
Innere Ableitung: $v'(x) = 3x^2 - 8x$, äußere Ableitung: $u'(x) = \cos(x)$.
Mit der Kettenregel folgt $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) = \cos(x^3 - 4x^2) \cdot (3x^2 - 8x)$.

Beispiel 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x^2 - x - 6)^7$. Bestimmen Sie alle Stellen, an denen die Tangente an den Graphen von f horizontal verläuft.

Lösung

Mit der Kettenregel erhält man einen Term der Ableitungsfunktion: $f'(x) = 7(x^2 - x - 6)^6 \cdot (2x - 1)$.
Die Tangente an den Graphen von f verläuft genau dann horizontal, wenn $f'(x) = 0$ ist.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \text{ oder } 2x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - 3) \cdot (x + 2) = 0 \text{ oder } x = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ oder } x = -2 \text{ oder } x = \frac{1}{2}$$

Aufgaben

1 Bestimmen Sie einen Term der Ableitungsfunktion.

a) $f(x) = (1 + x^2)^3$ **b)** $g(z) = \frac{1}{18}(3z + 2)^6$ **c)** $i(x) = \sin(2x)$ **d)** $r(x) = 3\cos(x^2)$

e) $j(t) = \frac{1}{4}\sin(2t + 1)$ **f)** $t(x) = x^2 - \cos(x^3 - 7)$ **g)** $l(z) = 3z^2 - (z^2 - 1)^3$ **h)** $h(t) = (1 - t + t^3)^2$

Merkregel:
Nachdifferenzieren
nicht vergessen!

2 **a)** Beim Ableiten haben sich Fehler eingeschlichen. Beschreiben Sie diese jeweils und verbessern Sie sie.

A $f(x) = (x^4 + 2)^3$ $f'(x) = 4x \cdot (x^4 + 2)^2$

B $f(x) = 4\sin(3x)$ $f'(x) = 12\cos(x)$

C $f(x) = (2x - 5)^5$ $f'(x) = 5(2x - 5)^4$

D $f(x) = \sin(x^2)$ $f'(x) = \cos(2x)$

b) Notieren Sie ähnliche fehlerhafte Ableitungen und überprüfen Sie sich gegenseitig.

3 Bestimmen Sie $f'(2)$.

a) $f(x) = \left(\frac{1}{5}x + 1\right)^2$ **b)** $f(z) = (5 - z)^2$ **c)** $f(t) = (2 - 3t + t^2)^3$ **d)** $f(x) = 2\sin(2 - x)$

4 Übertragen Sie die Tabelle ins Heft und vervollständigen Sie sie. Es gilt stets $f = u \circ v$.

	$f(x)$	$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$	$u'(v(x))$	$f'(x)$
a)	$\sin(2x)$						
b)		$\frac{1}{8}x^7$	$\frac{1}{2} - x^2$				
c)		x^2	$15x - 3$				
d)	$\frac{1}{3}(\cos(x))^2$						

5 Beurteilen Sie, ob F eine Stammfunktion von f ist.

a) $f: x \mapsto 3 \cdot \cos(3x - 1)$
$F: x \mapsto 2 \cdot \sin(3x - 1)$

b) $f: x \mapsto 7 \cdot \left(\frac{2}{3}x - 4\right) \cdot \left(\frac{1}{3}x^2 - 4x\right)^6$
$F: x \mapsto \left(\frac{1}{3}x^2 - 4x\right)^7 + 11$

6 Bestimmen Sie Terme der ersten und zweiten Ableitung von f.

a) $f(x) = (1 - x)^5$ **b)** $f(x) = 3 \cdot \cos(4x)$ **c)** $f(x) = (x^2 + 1)^6$ **d)** $f(x) = \sin(x^3)$

Test 1

→ Lösungen | Seite 272

7 Bestimmen Sie einen Term der Ableitungsfunktion.

a) $f(x) = (2x + 5)^8$ **b)** $f(x) = 2\cos(x^2)$ **c)** $f(z) = \frac{3}{4}z - \sin(3z - 1)$ **d)** $f(t) = (t^3)^2$

8 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{9}(3x + 2)^3$.

a) Bestimmen Sie die Steigung des Graphen von f im Punkt $P(2 \mid f(2))$.

b) Beurteilen Sie, ob der Graph von f Punkte mit waagerechter Tangente besitzt.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten aller Punkte, an denen die Tangente einen Steigungswinkel der Größe 45° hat.

9 Bestimmen Sie einen Term der Ableitungsfunktion. Alle Parameter sind reell.

a) $f_a(t) = (at^3 + 1)^2$ **b)** $f_{a,b}(x) = \sin(a + bx)$ **c)** $g_a(z) = \cos(a^2 z)$ **d)** $f_a(x) = (\sin(ax))^2$

e) $f_a(t) = \sin(at^2)$ **f)** $f_a(x) = \sin((ax)^2)$ **g)** $h_x(z) = z \cdot \sin(x^2 + 1)$ **h)** $f_{a,x}(t) = t \cdot \sin((ax)^2)$

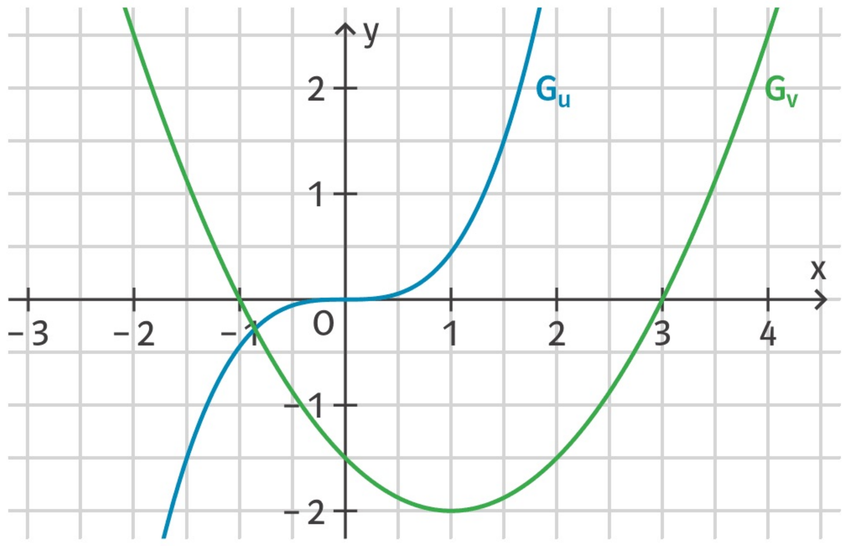
10 Begründen Sie, dass $f'(x) = \cos(\sin(x)) \cdot \cos(x)$ und $g'(x) = \sin(\cos(x)) \cdot \sin(x)$ Terme der Ableitungsfunktionen von $f\colon x \mapsto \sin(\sin(x))$ und $g\colon x \mapsto \cos(\cos(x))$ sind.

11 In der Abbildung sind die Graphen zweier Funktionen u und v dargestellt. Es gilt $f = u \circ v$.

a) Bestimmen Sie grafisch die Werte $f(0)$ und $f'(0)$.

b) Bestimmen Sie grafisch alle Nullstellen der Ableitungsfunktion f'.

c) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(0 \mid f(0))$ schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt.



12 Gegeben ist eine differenzierbare Funktion g.

a) Begründen Sie, dass die Ableitungsfunktion der Funktion f mit $f(x) = g(x^2)$ den Term $f'(x) = 2x \cdot g'(x^2)$ hat. Bestimmen Sie eine Nullstelle der Ableitungsfunktion f'.

b) 👥 Es gilt $g'(x) > 0$ für alle $x \in D$. Entscheiden und begründen Sie, ob die Funktionen f_1 und f_2 mit $f_1(x) = g(3x)$ und $f_2(x) = g(1 - x^3)$ lokale Extrema besitzen können.

13 Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Berechnen Sie $f_a'(x)$ und geben Sie einen Funktionsterm $f_a^{(21)}(x)$ für die 21. Ableitung von f_a an.

a) $f_a(x) = \cos(ax)$ **b)** $f_a(x) = (ax + 5)^{21}$ **c)** $f_a(x) = \sin(-a^2 x)$

14 Die Funktion f sei differenzierbar und es ist $c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Bestimmen Sie einen Term der Ableitung von f.

Beispiel: $g(x) = c \cdot f(x^n)$. Dann gilt $g'(x) = c \cdot f'(x^n) \cdot n \cdot x^{n-1}$.

a) $g(x) = f(cx)$ **b)** $g(x) = c \cdot f(x)$ **c)** $g(x) = f(x) + c$ **d)** $g(x) = f(x + c)$

e) $g(x) = f(x^n)$ **f)** $g(x) = (f(x))^n$ **g)** $g(x) = f(nx + c)$ **h)** $g(x) = f(nx) + c$

15 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto 3\sin(1 + 2x)$ mit maximaler Definitionsmenge.

a) Bestimmen Sie die Definitions- und Wertemenge von f.

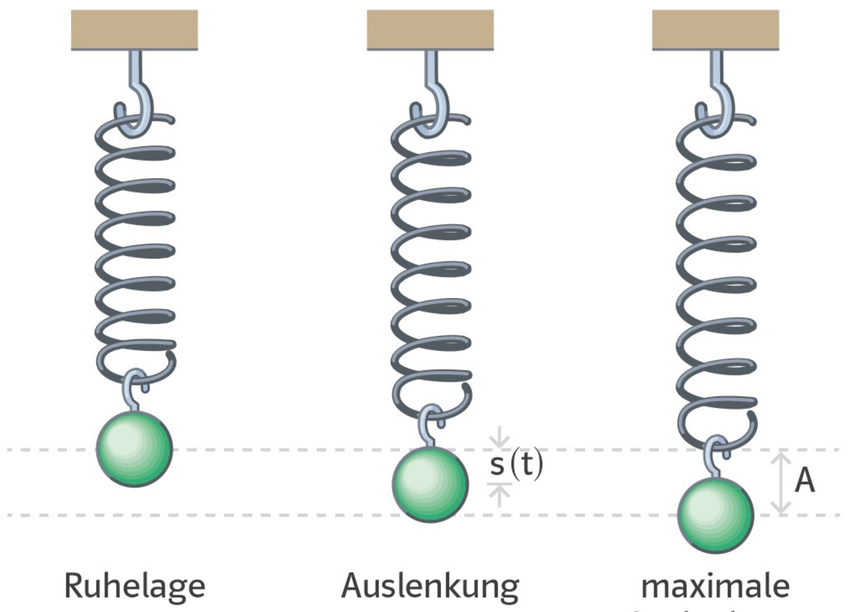
b) Berechnen Sie im Intervall $[-6; 5]$ die Nullstellen und Extrema von f, untersuchen Sie f dort auf Monotonie und skizzieren Sie den Graphen von f im angegebenen Bereich.

16 Für den zeitlichen Verlauf der Auslenkung eines Federpendels gilt $s(t) = A \cdot \sin(\omega t)$. ω hängt von den Eigenschaften der Feder und der Masse des schwingenden Körpers ab.

a) Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen der Auslenkung $s(t)$ und der Geschwindigkeit $v(t)$.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit beim Durchgang durch die Ruhelage.

c) Die Beschleunigungsfunktion ist die Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion. Bestimmen Sie die Beschleunigung $a(t)$.



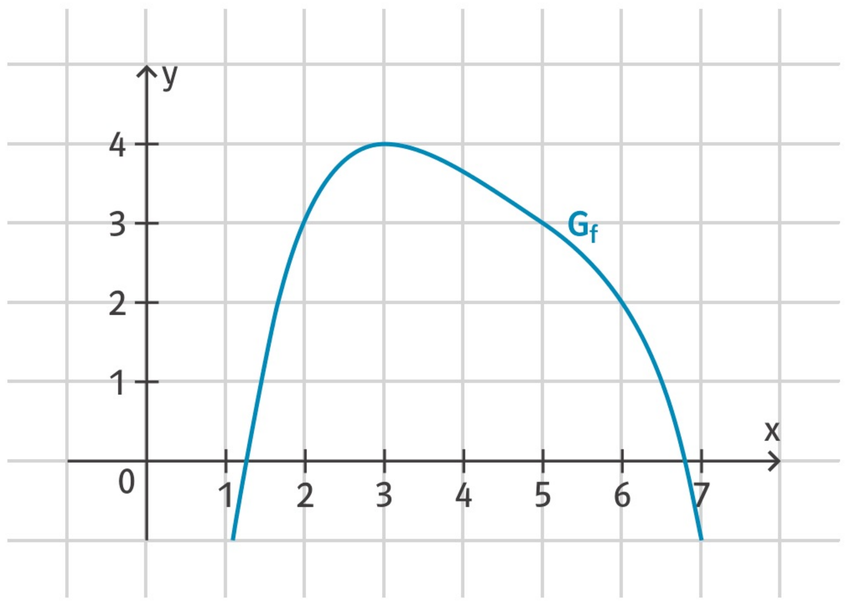
Tipp zu Aufgabe 16 b):
Beim Durchgang durch die Ruhelage ist die Geschwindigkeit maximal.

17 **Abiturprüfung 2022 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 3**

Der Graph G_f der in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f besitzt nur an der Stelle $x = 3$ eine waagrechte Tangente (vgl. Abb.). Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g mit $g(x) = f(f(x))$.

a) Geben Sie mithilfe der Abbildung die Funktionswerte $f(6)$ und $g(6)$ an.

b) Gemäß der Kettenregel gilt $g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$. Ermitteln Sie damit und mithilfe der Abbildung alle Stellen, an denen der Graph von g eine waagrechte Tangente besitzt.



Test 2

→ Lösungen | Seite 273

18 Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = \cos(x^2)$ für $x \in [-2; 2]$.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion und geben Sie die Wertemenge der Funktion an.

b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von g im Intervall $[-2; 2]$.

c) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte von G_g im Intervall $[-2; 2]$.

19 Geben Sie für die Funktionen $u': x \mapsto 3x^2$ und $v': x \mapsto 32x^3 + 2$ eine Funktion $f = u \circ v$ an, bestimmen Sie deren Ableitung und skizzieren Sie den Graphen G_f.

20 Gegeben ist eine differenzierbare Funktion f.

a) Zeigen Sie mithilfe der Kettenregel: Wenn der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung ist, dann ist der Graph von f' symmetrisch zur y-Achse.

b) Zeigen Sie mithilfe der Kettenregel: Wenn der Graph von f symmetrisch zur y-Achse ist, dann ist der Graph von f' punktsymmetrisch zum Ursprung.

Zur Erinnerung:
Der Graph einer Funktion h ist genau dann zur y-Achse symmetrisch, wenn $h(x) = h(-x)$ für alle $x \in D$ gilt. Er ist punktsymmetrisch zum Ursprung, falls $h(-x) = -h(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

21 **a)** Die Funktion $f: x \mapsto (\sin(2x))^2$ kann als Verkettung $f = u \circ v \circ w$ mit $u: x \mapsto x^2$, $v: x \mapsto \sin(x)$ und $w: x \mapsto 2x$ betrachtet werden. Bestimmen Sie die Ableitung von f durch zweimaliges Anwenden der Kettenregel.

b) Gegeben sind differenzierbare Funktionen u, v und w. Formulieren Sie eine allgemeine Regel zur Bestimmung eines Terms der Ableitungsfunktion der Funktion $f = u \circ v \circ w$.

Grundwissen Test

→ Lösungen | Seite 273

G 22 Die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 3x + 1 = 0$ seien a und b. Zeigen Sie, dass dann $a^3 + b^3 = 18$ gilt. (Hinweis: Sind a und b Lösungen, so gilt $x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - a) \cdot (x - b) = 0$.)

Wiederholen

1 Die Funktion f kann als Verkettung $u \circ v$ aufgefasst werden. Geben Sie geeignete Funktionen u und v an und bilden Sie f'.

a) $f(x) = (2x - 5)^3$

b) $f(x) = 3 \cdot \sin(x^2 + 2x)$

c) $f(x) = (\sin(x) + 1)^3$

d) $f(x) = \cos(\sin(x))$

2 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente und der Normalen an den Graphen von f im Punkt $P\left(\frac{\pi}{2} \middle| f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

3 Bilden Sie $f(x) = u(v(x))$ und $g(x) = v(u(x))$ mit den Termen $u(x)$ und $v(x)$ und geben Sie die maximalen Definitionsmengen von f und g an.

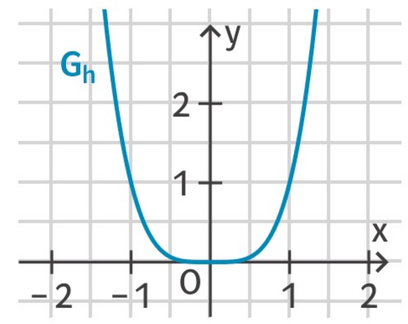
a) $u(x) = x^3 + 1$ und $v(x) = \frac{2}{x}$

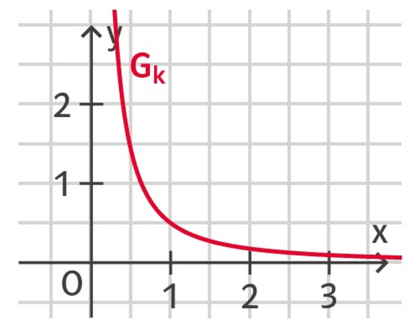
b) $u(x) = x^2 - 2$ und $v(x) = \sin(x)$

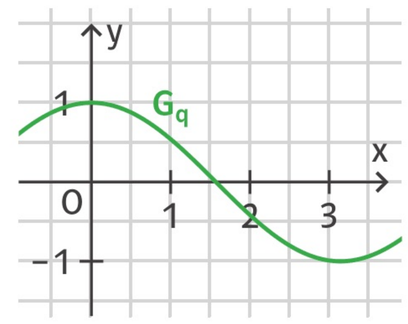
c) $u(x) = x^2$ und $v(x) = \cos(x)$

4 Am Rand sind drei Graphen von Funktionen und drei Graphen von zugehörigen Stammfunktionen abgebildet. Finden Sie die passenden Paare.

5 Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x): x \mapsto -\frac{1}{8}(a^2x^3 - 12ax^2 + 36x)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}$. Ihre Graphen werden mit G_a bezeichnet. Untersuchen Sie G_a auf Symmetrie zur y-Achse bzw. zum Ursprung. Bestimmen Sie die Nullstellen von f_a sowie Lage und Art der Extrempunkte von G_a. Skizzieren Sie anschließend G_2.







Vertiefen

6 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen einer Funktion f.

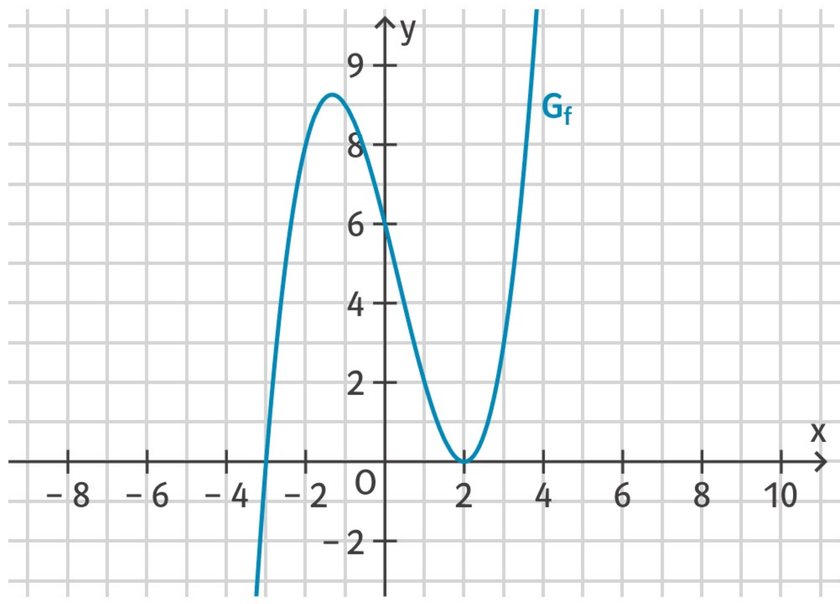
a) Erläutern Sie, welche Aussagen Sie über Nullstellen und Extremstellen einer Stammfunktion F von f machen können.

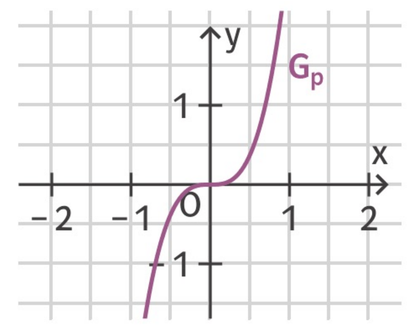
b) Skizzieren Sie einen möglichen Graphen von F in der Umgebung der Stelle $x = 2$.

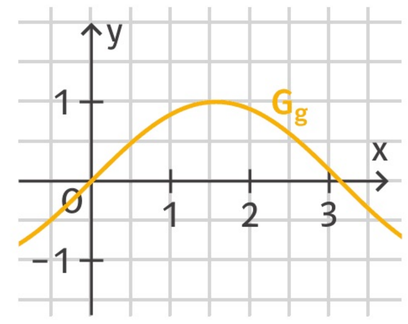
c) Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm von f.

d) Geben Sie die Stammfunktion F_1 von f an, die an der Stelle $x = 2$ eine Nullstelle hat.

e) Geben Sie, falls möglich, die Stammfunktion F_2 von f an, die an der Stelle $x = 3$ ein Maximum hat, oder begründen Sie, warum eine solche Stammfunktion nicht existiert.







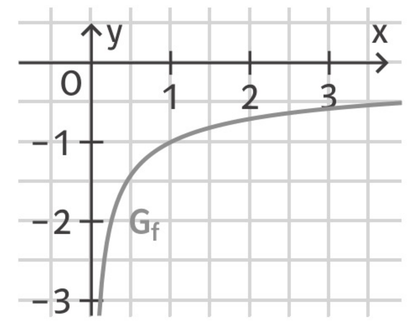
7 Gegeben ist die Funktionenschar $f_t: x \mapsto x^3 - tx$ mit $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$.

a) Skizzieren Sie die Graphen von f_t für verschiedene Werte von t in ein gemeinsames Koordinatensystem. Beschreiben Sie, was eine Vergrößerung von t bewirkt.

b) Bestimmen Sie den Wert von t, für den der Graph von f_t durch den Punkt $P(1|-3)$ geht.

c) Bestimmen Sie die Steigung der Graphen von f_t im Ursprung.

d) Bestimmen Sie den Wert von t, für den der Graph von f_t an der Stelle $x = 2$ die Steigung 8 hat.



8 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$ mit $D_f = [0; 6]$.

a) Zeigen Sie, dass der Graph von f bei $x = 3$ einen Hochpunkt hat.

b) Geben Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte des Graphen von f mit der Geraden mit der Gleichung $y = m \cdot x$ in Abhängigkeit von m an.

→ Strategie | Seite 256
Veranschaulichen durch eine informative Figur oder Skizze

Vernetzen

9 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 0{,}5x^3 - 2x$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) G_f schneidet die negative x-Achse im Punkt N. Berechnen Sie die Koordinaten von N.

b) Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten t_O bzw. t_N an G_f im Ursprung bzw. in N.

c) Die Tangenten t_O, t_N und die x-Achse schließen eine Dreiecksfläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.

10 **a)** Gegeben sind Funktionen der Form $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ $(a \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ b, c \in \mathbb{R})$ sowie die beiden Punkte $P(x_1 | f(x_1))$ und $Q(x_2 | f(x_2))$.
Beschreiben Sie, welche besondere Lage der Berührpunkt der Tangente an den Graphen von f hat, die zur Sekante PQ parallel ist. Zeichnen Sie hierzu mit einem Funktionenplotter einige Funktionsgraphen, formulieren Sie eine Vermutung und begründen Sie diese algebraisch.

b) Untersuchen Sie, ob diese besondere Lage auch für Funktionen der Form $f: x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ b, c, d \in \mathbb{R})$ vorliegt.

11 Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = ax^4 - (2a + 1)x^3 + (a + 2)x^2$, $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Ihre Graphen werden mit G_a bezeichnet.

a) Untersuchen Sie die Graphen G_a auf gemeinsame Punkte. Weisen Sie nach, dass der Graph $G_{\frac{1}{4}}$ zur Geraden mit der Gleichung $x = \frac{3}{2}$ symmetrisch ist. Verschieben Sie dazu den Graphen $G_{\frac{1}{4}}$ so, dass der verschobene Graph symmetrisch zur y-Achse ist.

b) Untersuchen Sie, für welche Werte von a der Graph G_a genau eine Nullstelle besitzt.

c) Eine geradlinige Straße führt von $A(-10 | 0)$ nach $B(0 | 0)$, eine zweite geradlinige Straße von $C(1 | 1)$ nach $D(7 | 7)$. Diese beiden Straßen sollen zwischen B und C knickfrei miteinander verbunden werden.
Zeigen Sie, dass jeder Graph G_a im Intervall $[0; 1]$ eine solche Verbindung beschreibt.

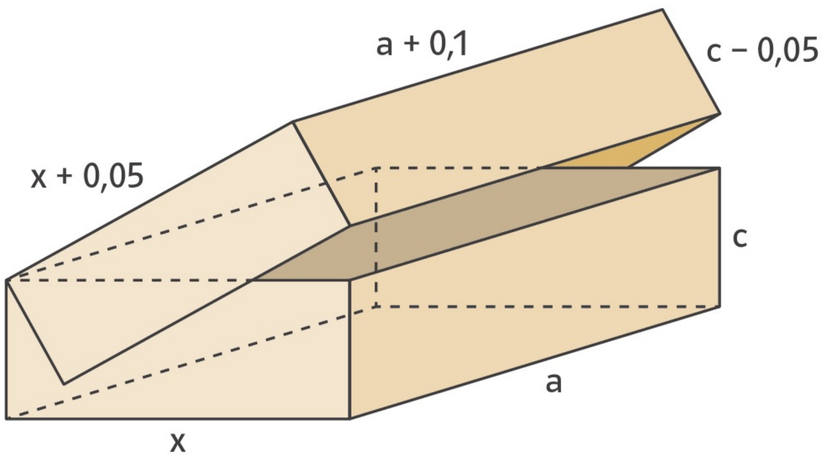
→ Strategie | Seite 256
Veranschaulichen durch eine informative Figur oder Skizze

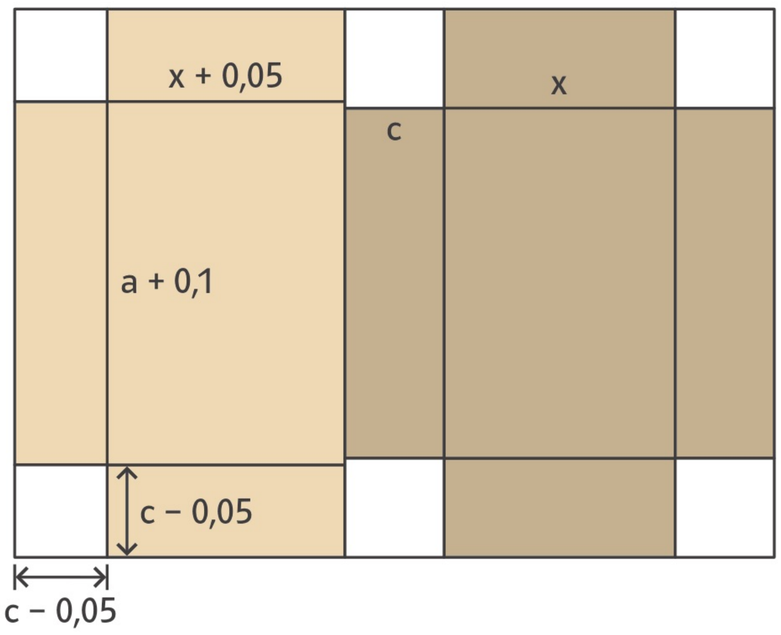
12 Eine Pralinenschachtel hat die unten abgebildete Form. Sie soll ein Volumen von 1200 cm^3 haben.

a) Zeigen Sie mithilfe des abgebildeten Netzes, dass für den Inhalt A der rechteckigen Fläche des Kartons, aus dem die Schachtel ausgeschnitten, gefaltet und geklebt wird, gilt:
$A = \frac{2400}{c} + 4cx + \frac{3600}{x} + 6c^2$.

b) Bestimmen Sie für die Funktionenschar $f_c: x \mapsto \frac{2400}{c} + 4cx + \frac{3600}{x} + 6c^2$, $c > 0$, die Koordinaten der Tiefpunkte der Graphen und bestimmen Sie c auf zwei Dezimalen genau so, dass der Tiefpunkt möglichst tief liegt.

c) Welche Bedeutung haben die Koordinaten des tiefsten Tiefpunktes aus Teilaufgabe b) im Hinblick auf eine Optimierung des Materialverbrauchs für die Herstellung der oben beschriebenen Pralinenschachtel? Begründen Sie Ihre Antwort.
Geben Sie die Abmessungen einer hinsichtlich des Materialverbrauchs optimierten Pralinenschachtel auf mm gerundet an.





Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion – ein Beweis

Es wird gezeigt, wie die bereits bekannte Ableitung der Sinusfunktion hergeleitet werden kann. Um die Ableitung der Sinusfunktion $f: x \mapsto \sin(x)$ an einer Stelle x_0 zu bestimmen, betrachtet man zunächst den Differenzenquotienten:

$$(*)\quad \frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} = \frac{2\cos\left(\frac{x_0+h+x_0}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x_0+h-x_0}{2}\right)}{h} = \frac{\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

Bei nebenstehender Umformung wurde folgende Formel benutzt:
$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

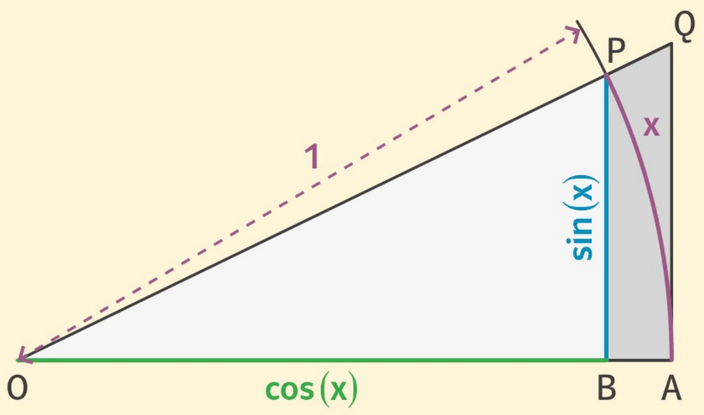
Mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms wird $\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$ für $h \to 0$ untersucht.

Die in der nebenstehenden Tabelle berechneten Werte lassen vermuten, dass $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = 1$ gilt.

	A	B	C
1	**h**	**sin(h/2)**	**sin(h/2)/(h/2)**
2	−0,2	−0,09983342	0,99833417
3	0,2	0,09983342	0,99833417
4	−0,02	−0,00999983	0,99998333
5	0,02	0,00999983	0,99998333
6	−0,002	−0,00100000	0,99999983
7	0,002	0,00100000	0,99999983

Um zu sehen, wie sich Termwerte entwickeln, kann man mit einem Tabellenkalkulationsprogramm arbeiten.

Im Folgenden wird dies näher begründet:



In nebenstehender Abbildung ist $x \neq 0$ die Bogenlänge und OBP und OAQ sind rechtwinklige Dreiecke in B bzw. in A mit $|\overline{OA}| = 1$. Da nach Voraussetzung $\overline{BP} \parallel \overline{AQ}$ gilt, folgt mithilfe des 2. Strahlensatzes nun $\frac{|\overline{OB}|}{|\overline{BP}|} = \frac{|\overline{OA}|}{|\overline{AQ}|}$. Mit den gegebenen Bezeichnungen folgt daraus $\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{|\overline{AQ}|}$, nach Bildung des Kehrwertes also $|\overline{AQ}| = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

→ Strategie | Seite 256
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

Aus der Abbildung ist auch zu erkennen, dass $|\overline{BP}| \leq x$ und $x \leq |\overline{AQ}|$ gilt. Einsetzen von $|\overline{BP}| = \sin(x)$ und $|\overline{AQ}| = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ liefert

$$\sin(x) \leq x \text{ und } x \leq \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Dividiert man die Ungleichungen durch x und multipliziert die zweite mit $\cos(x)$, erhält man

$$\frac{\sin(x)}{x} \leq 1 \text{ und } \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x},$$

woraus die folgende Ungleichungskette entsteht:

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1.$$

Diese gilt auch für $x < 0$ (vgl. Aufgabe 3). Wegen $\lim\limits_{x\to 0}\cos(x) = \cos(0) = 1$ folgt damit

$$1 \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1, \text{ also } \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Somit gilt für $f(x) = \sin(x)$:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} \overset{(*)}{=} \lim_{h\to 0}\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \lim_{h\to 0}\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot 1 = \cos(x_0).$$

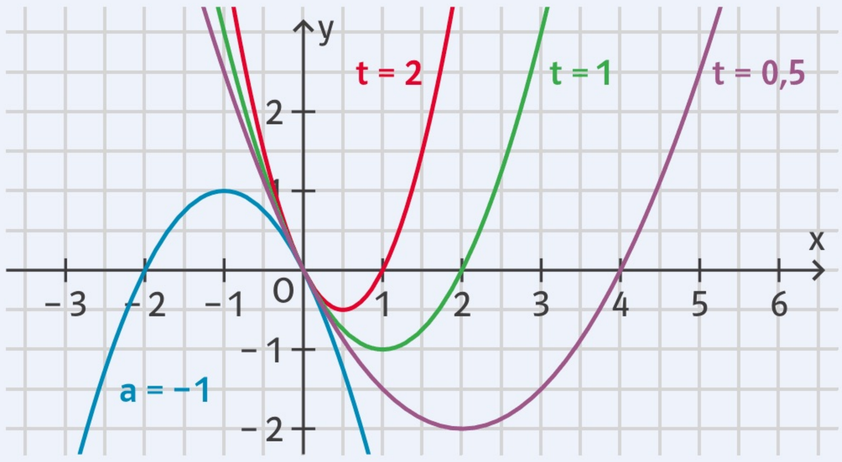
1 Fassen Sie in eigenen Worten die wesentlichen Schritte der obigen Herleitung zusammen.

2 Zeigen Sie in analoger Weise, dass für die Funktion $g: x \mapsto \cos(x)$ gilt: $g'(x) = -\sin(x)$.
Benutzen Sie dabei die Formel $\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

3 Oben wurde die Ungleichung $\frac{1}{\cos(x)} \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \cos(x)$ für alle $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ bewiesen.
Zeigen Sie, dass diese Ungleichung auch für alle $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ gilt.

Funktionenscharen

Enthält ein Funktionsterm außer der Funktionsvariablen noch eine weitere Variable, z. B. t, so gehört zu jedem möglichen Wert von t eine Funktion $f_t: x \mapsto f_t(x)$. Die Menge dieser Funktionen bezeichnet man als **Funktionenschar**.

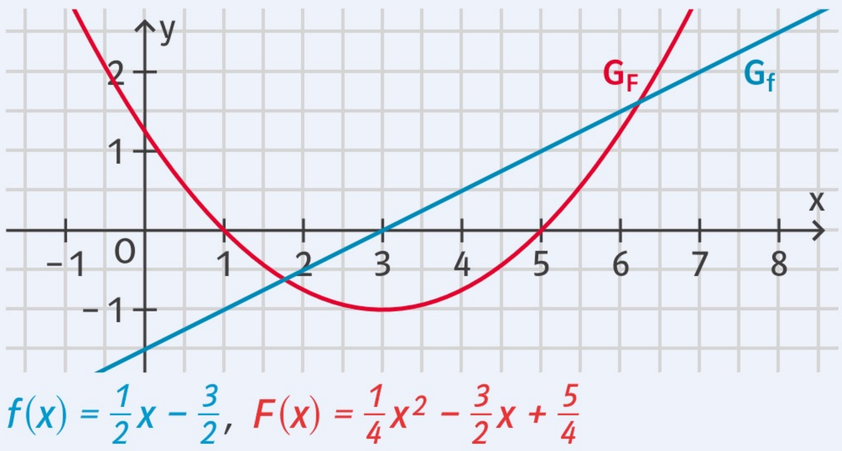


$f_t: x \mapsto tx^2 - 2x,\ t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Stammfunktionen

Man nennt eine differenzierbare Funktion F **eine Stammfunktion** der Funktion f, wenn f die Ableitungsfunktion von F ist, d. h., wenn $F'(x) = f(x)$ für jedes $x \in D_f$ gilt.

Zu einer Potenzfunktion f mit $\mathbf{f(x) = x^n}$ $(n \in \mathbb{N})$ ist F mit $\mathbf{F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}}$ eine Stammfunktion.



$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2},\ F(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$

Ableitung von Sinus- und Kosinusfunktion

$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$

$g(x) = \cos(x) \Rightarrow g'(x) = -\sin(x)$

Jede Funktion der Schar F_c mit $F_c(x) = -\cos(x) + c$ $(c \in \mathbb{R})$ ist eine **Stammfunktion der Sinusfunktion**.

Jede Funktion der Schar G_c mit $G_c(x) = \sin(x) + c$ $(c \in \mathbb{R})$ ist eine **Stammfunktion der Kosinusfunktion**.

$f(x) = -2x + 3\sin(x)$

Ableitung: $f'(x) = -2 + 3\cos(x)$.

Eine Stammfunktion: $F(x) = -x^2 - 3\cos(x)$.

Produktregel

Sind u und v differenzierbare Funktionen, so gilt:

$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

$f(x) = \sin(x) \cdot (x^2 + 3)$

$\Rightarrow f'(x) = \cos(x) \cdot (x^2 + 3) + \sin(x) \cdot 2x$

Verkettung von Funktionen

Für zwei Funktionen u und v gibt es zwei mögliche Verkettungen:

Die **Verkettung u nach v**: $u \circ v: x \mapsto u(v(x))$.

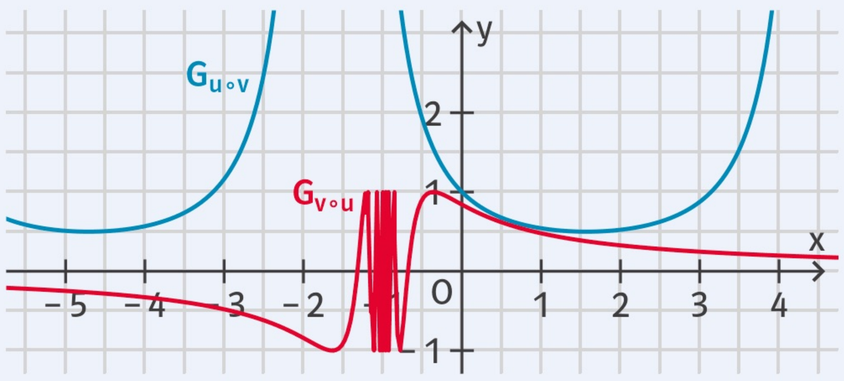
Die **Verkettung v nach u**: $v \circ u: x \mapsto v(u(x))$.

Im Allgemeinen gilt $u \circ v \neq v \circ u$.

$u(x) = \frac{1}{x+1},\ v(x) = \sin(x)$

$(u \circ v)(x) = u(v(x)) = u(\sin(x)) = \frac{1}{\sin(x) + 1}$

$(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v\left(\frac{1}{x+1}\right) = \sin\left(\frac{1}{x+1}\right)$



Kettenregel

Sind u und v differenzierbare Funktionen, so gilt

$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$.

Man nennt $u'(v(x))$ die **äußere Ableitung** und $v'(x)$ die **innere Ableitung**.

Das Bilden des Faktors $v'(x)$ wird auch **Nachdifferenzieren** genannt.

$f(x) = \sin(x^2 - 1)$

$u(x) = \sin(x),\ v(x) = x^2 - 1$

$u'(x) = \cos(x),\ v'(x) = 2x$

Äußere Ableitung: $u'(v(x)) = \cos(x^2 - 1)$.

Innere Ableitung: $v'(x) = 2x$.

$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) = \cos(x^2 - 1) \cdot 2x$

→ Lösungen | Seite 273

1 Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion f′ von f und geben Sie eine Stammfunktion F von f an.

a) $f: x \mapsto 4x^3 + 2x - 1$ **b)** $f: x \mapsto 2x^2 - 3x^3$ **c)** $f: x \mapsto -2x^3 + 4x^2$

d) $f: x \mapsto -3x + \sin(x)$ **e)** $f: x \mapsto x^5 + \cos(x)$ **f)** $f: x \mapsto 4x^2 - 2 + x^3$

g) $f: x \mapsto 5 \cdot (x - 2)^2 + 3$ **h)** $f: x \mapsto x \cdot (2x^4 - 3)$ **i)** $f: x \mapsto \frac{1}{3}(6\sin(x) - 9\cos(x))$

2 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -(x - 1)^2 + 1$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Skizzieren Sie G_f in Ihr Heft.

b) Skizzieren Sie den Graphen $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f′ im selben Koordinatensystem.

c) Skizzieren Sie den Graphen G_F einer Stammfunktion F von f im selben Koordinatensystem.

3 Geben Sie Funktionsterme und die maximalen Definitionsmengen der Funktionen $f = u \circ v$ und $g = v \circ u$ an.

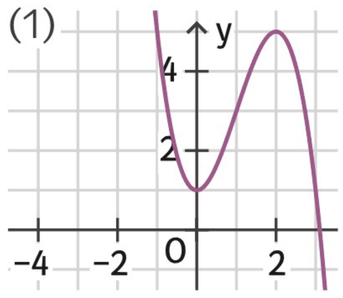
a) $u(x) = 1 - x,\ v(x) = x^3$ **b)** $u(x) = \sin(2x + 3),\ v(x) = x + 1$

c) $u(x) = \frac{1}{x^2},\ v(x) = x^2$ **d)** $u(x) = 2x - \frac{3}{x},\ v(x) = 2x^3 + 4$

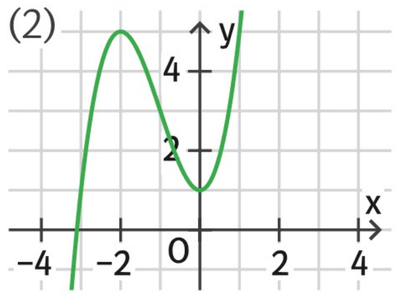
4 Gegeben ist die Funktionenschar f_t mit $f_t(x) = x^3 + 3tx^2 + t,\ t \in \mathbb{R}$. Ihre Graphen werden mit G_t bezeichnet.

a) Begründen Sie, dass drei der abgebildeten Graphen nicht zu einer Funktion f_t gehören. Der verbleibende Graph gehört zu einer Funktion f_t. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert von t.

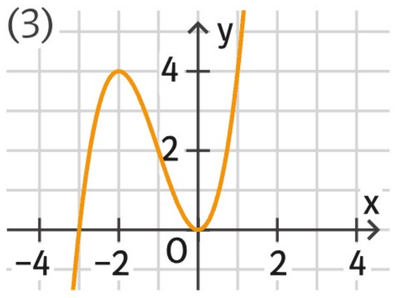
(1)



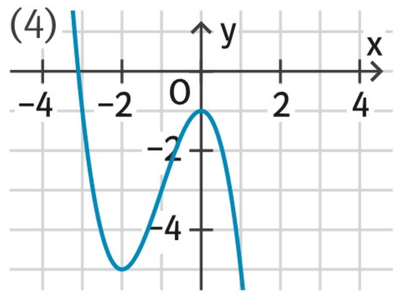
(2)



(3)



(4)



b) Bestimmen Sie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte von G_t in Abhängigkeit von t.

c) Zeigen Sie, dass alle Wendepunkte von G_t auf dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = -2x^3 - x$ liegen.

5 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in D_f$ und $g(x) = x^2 \cdot f(x)$. Weisen Sie nach, dass die Graphen von f und g genau zwei Schnittpunkte haben, sich dort aber nicht berühren.

6 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos(x)$. Bestimmen Sie Lage und Art aller Extrempunkte des Graphen von f im Intervall $[-5; 5]$.

7 Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = \sin(x^2)$ für $x \in [-2; 2]$. Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.

a) Skizzieren Sie G_g und geben Sie die Wertemenge von g an.

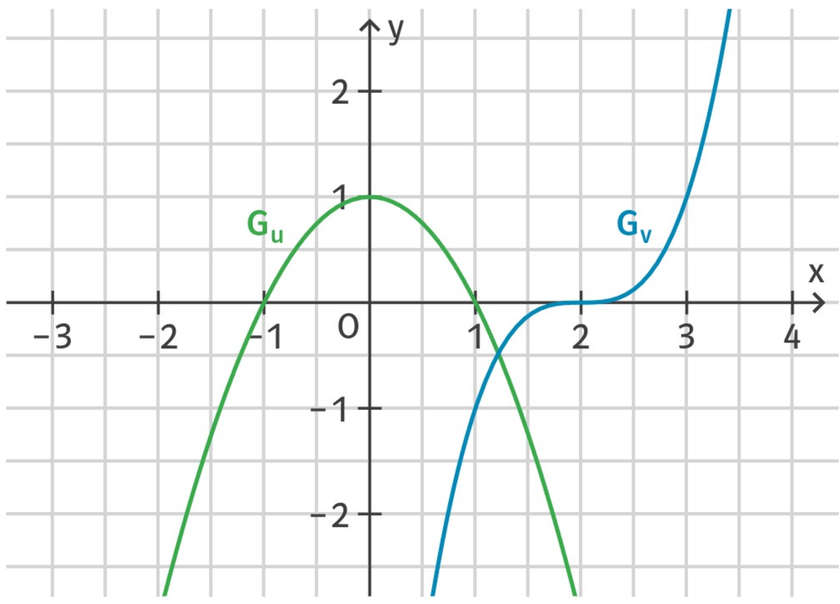
b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von g im Intervall $[-2; 2]$.

c) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte von G_g im Intervall $[-2; 2]$.

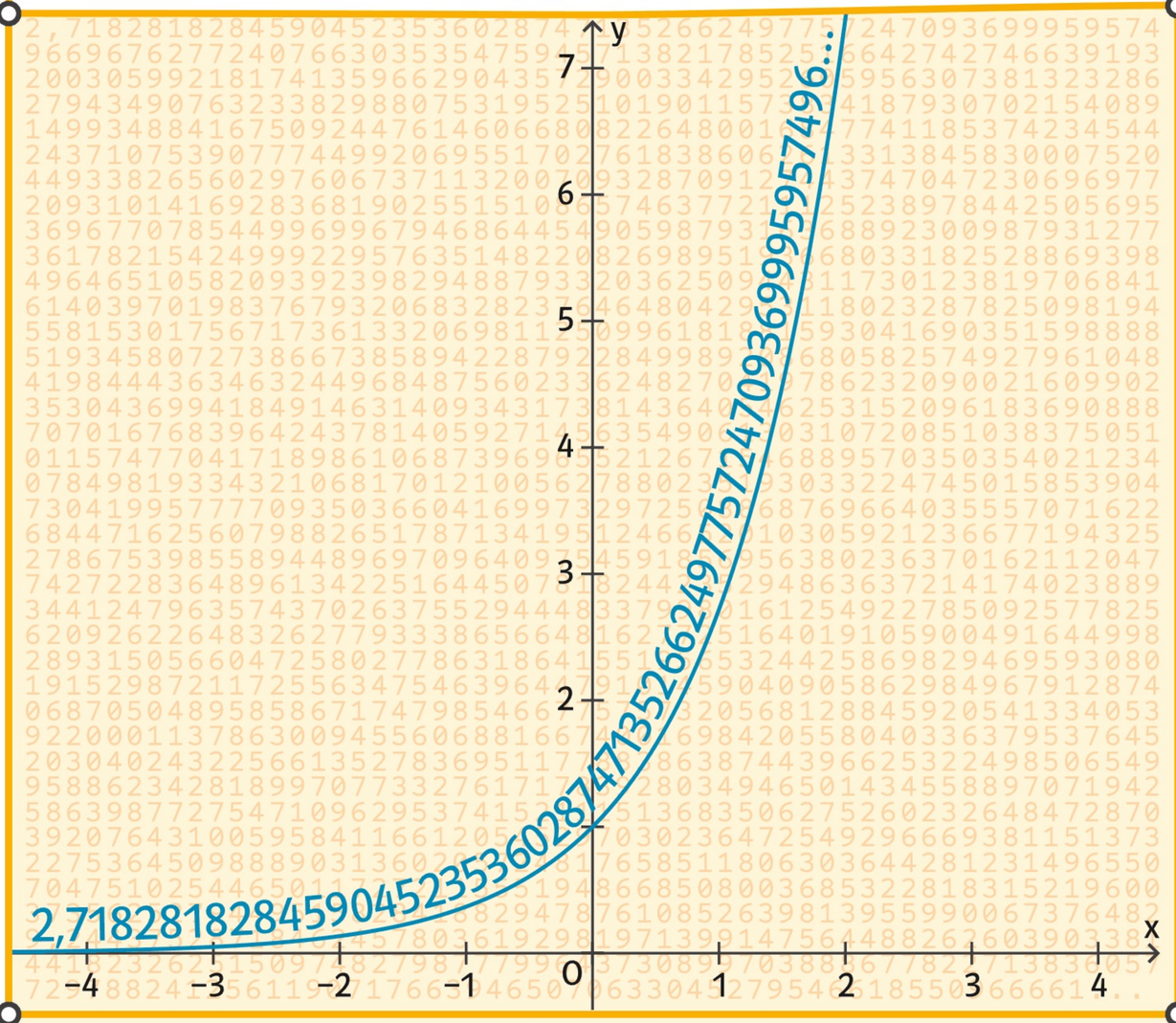
8 In der Abbildung sind die Graphen einer quadratischen Funktion u und einer kubischen Funktion v dargestellt. Die Funktion f mit $f(x) = u(v(x))$ ist die Verkettung von u und v.

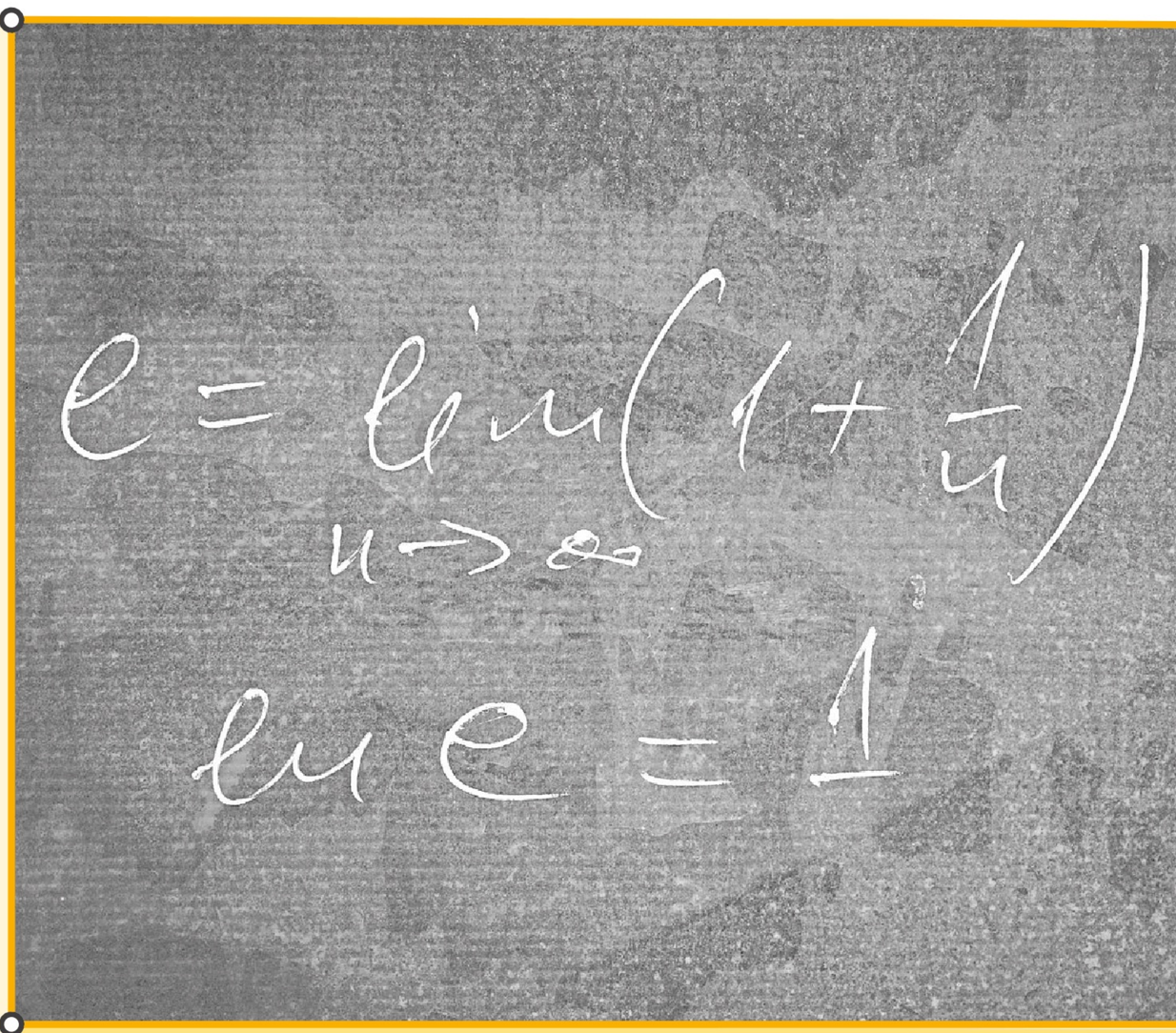
a) Bestimmen Sie anhand der Abbildung $f(1)$ und eine weitere Stelle mit demselben Funktionswert.

b) Die Normale an den Graphen von f im Punkt $P(1 \mid f(1))$ schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt.



II Natürliche Exponentialfunktion





„Jeder Tag weiter bestehenden exponentiellen Wachstums treibt das Weltsystem näher an die Grenzen des Wachstums."

Dennis L. Meadows (*1942),
US-amerikanischer Ökonom

Das können Sie schon

- Die Ketten- und die Produktregel anwenden
- Ganzrationale Funktionen und ihre Graphen untersuchen
- Das Verhalten einer einfachen gebrochen-rationalen Funktion für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ bestimmen
- Eigenschaften von Exponentialfunktionen und deren Graphen beschreiben
- Exponentialgleichungen mit dem Logarithmus lösen
- Wachstums- und Abklingvorgänge modellieren

Test

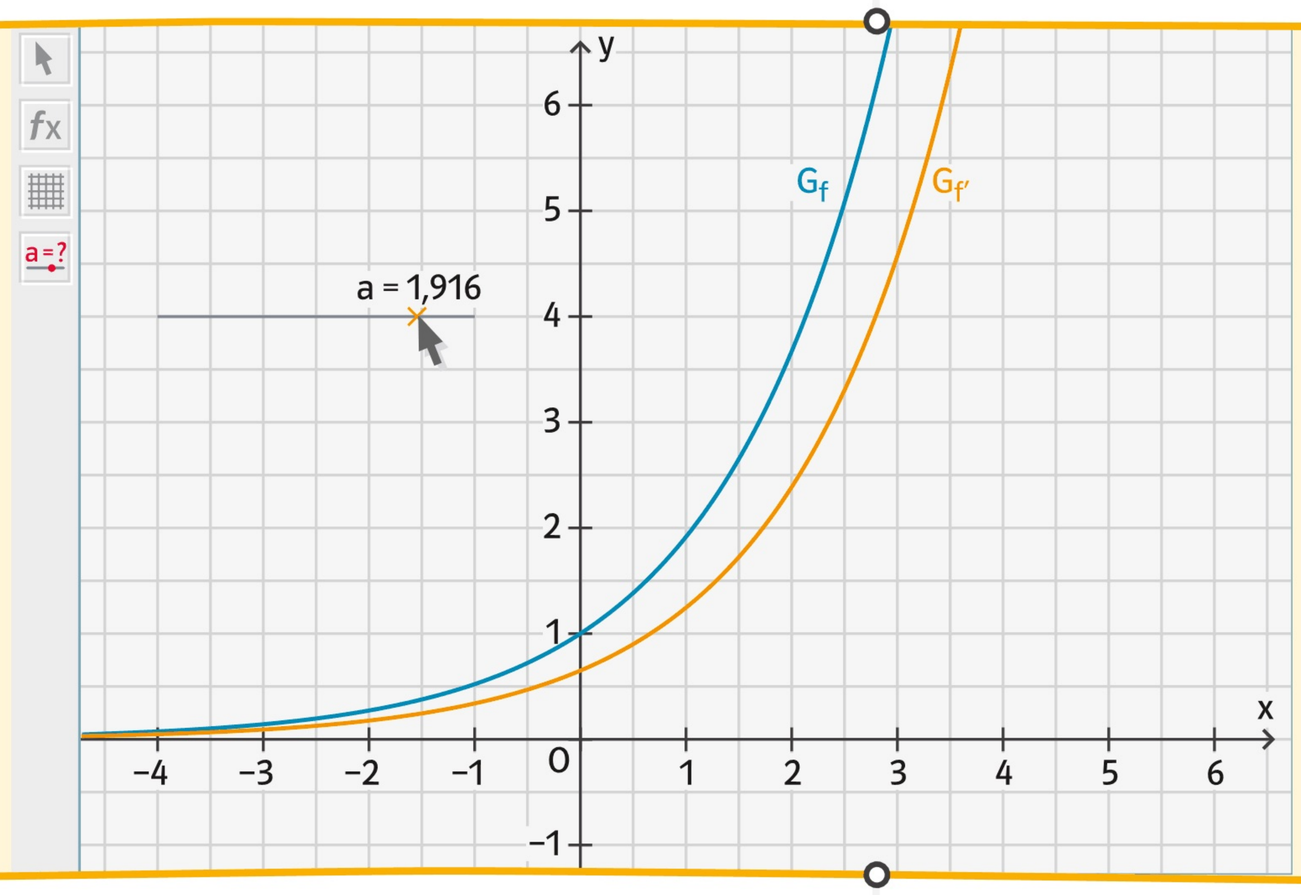
Check-in
zu Kapitel II
Seite 263

Das können Sie bald

- Eigenschaften der natürlichen Exponentialfunktion beschreiben, Verknüpfungen mit der e-Funktion ableiten, ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$ bestimmen und Eigenschaften der Verknüpfungen und ihrer Graphen untersuchen
- Den natürlichen Logarithmus anwenden, um Exponentialgleichungen zu lösen
- Wachstums- und Abklingvorgängen mithilfe der e-Funktion modellieren

1 Die natürliche Exponentialfunktion und ihre Ableitung

Zeichnen Sie mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware unter Verwendung eines Schiebereglers den Graphen einer Exponentialfunktion $f: x \mapsto a^x \ (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$. Zeichnen Sie außerdem den Graphen der Ableitung f′ von f.
Beschreiben Sie, was geschieht, wenn Sie den Wert des Parameters a variieren.



Die Ableitung einer Exponentialfunktion der Form $f: x \mapsto a^x \ (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$ lässt sich nicht mit den bisher bekannten Regeln zur Ableitung von ganzrationalen Funktionen bestimmen. Stattdessen muss man auf die Definition der Ableitung an der Stelle x_0 zurückgreifen und betrachtet den Differentialquotienten:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x_0 + h} - a^{x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x_0} \cdot a^h - a^{x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x_0} \cdot (a^h - 1)}{h} = a^{x_0} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$
$$= f(x_0) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Da der Faktor a^{x_0} nicht von h abhängt, kann man ihn vor „$\lim_{h \to 0} \ldots$“ schreiben.

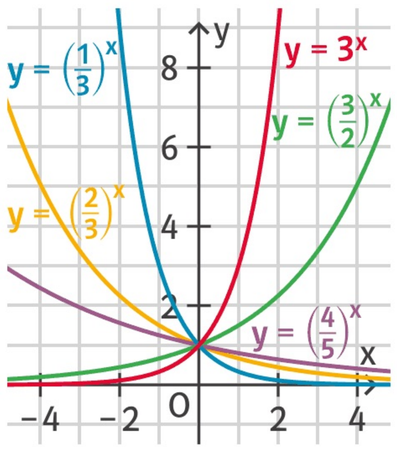
Für $x_0 = 0$ gilt wegen $f(0) = a^0 = 1$ daher $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$.

Da die Tangente an der Stelle 0 existiert, existiert auch der Grenzwert $\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$; sein Wert hängt nur von a ab.

Schreibt man kurz $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = c_a$, ergibt sich für die Ableitungsfunktion f′ von f:
$f'(x) = c_a \cdot f(x)$.

Die Ableitung der Exponentialfunktion lässt sich also als Produkt aus der Exponentialfunktion und der Zahl $c_a = f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$ schreiben.

Zur Erinnerung:
Exponentialfunktionen



Mit einem Tabellenkalkulationsprogramm lässt sich der Grenzwert $\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$ für verschiedene Werte von a näherungsweise berechnen:

C3 = =($B3^C$2-1)/C$2

	A	B	C	D	E	F	G
1			h				
2			0,1	0,001	0,00001	0,0000001	0,000000001
3	a	1,5	0,413797440	0,405547320	0,405465930	0,405465117	0,405465217
4		2	0,717734625	0,693387463	0,693149583	0,693147204	0,693147095
5		2,5	0,959582264	0,916710654	0,916294930	0,916290774	0,916290821
6		3	1,161231740	1,099215984	1,098618323	1,098612350	1,098612312
7		3,5	1,334615817	1,253548004	1,252770816	1,252763047	1,252763004
8		4	1,486983550	1,387255711	1,386303970	1,386294457	1,386294413
9							

Besonders interessant ist der Fall, bei dem der Grenzwert 1 ist, bei dem also der Funktionsterm und der Term der Ableitungsfunktion übereinstimmen. Die Tabelle legt nahe, dass es zwischen 2,5 und 3 einen solchen Wert für a gibt. Diese besondere Basis heißt **Euler'sche Zahl**.

Bestimmung der Euler'schen Zahl

Damit $\lim\limits_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$ gilt, muss für Werte von h, die nahe bei 0 liegen, gelten:

$a^h - 1 \approx h$, also $a^h \approx 1 + h$ und somit $a \approx (1 + h)^{\frac{1}{h}}$.

Mithilfe der Substitution $\frac{1}{h} = n$ und damit $h = \frac{1}{n}$ erhält man $a \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Wenn h nahe bei 0 liegt, ist n sehr groß. Der obige Grenzwert wird also dann 1, wenn gilt:

$a = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Mit einem Taschenrechner oder einem Tabellenkalkulationsprogramm berechnet man:

n	1	10^2	10^4	10^6	10^8
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	2	≈ 2,704 813 8	≈ 2,718 145 9	≈ 2,718 280 5	≈ 2,718 281 8

In der Exkursion auf Seite 62 wird ein weiteres Verfahren gezeigt, mit dem die Euler'sche Zahl näherungsweise berechnet werden kann.

Der Schweizer Mathematiker Leonhard Euler hat als Erster nachgewiesen, dass der Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existiert und eine irrationale Zahl ist. Er bezeichnete diese Zahl mit e; sie wurde später ihm zu Ehren Euler'sche Zahl genannt. Es ist $e = 2{,}718\,281\,828\,459\ldots$

Leonhard Euler (1707 – 1783), Schweizer Mathematiker

Die Euler'sche Zahl e ist demnach diejenige Basis einer Exponentialfunktion f, deren Funktionsterm mit dem Term der Ableitungsfunktion übereinstimmt; die Funktion $f: x \mapsto e^x$ hat also die Ableitungsfunktion $f': x \mapsto e^x$.
Da diese Funktion eine große Bedeutung bei der Modellierung von natürlichen Wachstums- und Abklingvorgängen hat, bezeichnet man sie als **natürliche Exponentialfunktion**.

Wegen $f'(x) = f(x) = e^x$ ist folglich $F(x) = e^x$ eine Stammfunktion von $f(x) = e^x$.

Definition: Die Funktion $f: x \mapsto e^x$ heißt **natürliche Exponentialfunktion** oder auch kurz **e-Funktion**, wobei $\mathbf{e = 2{,}718\,281\,828\,459\ldots}$ die **Euler'sche Zahl** ist.

Für $f(x) = e^x$ gilt $f'(x) = e^x$.
Außerdem ist F mit $F(x) = e^x$ eine Stammfunktion von f.

Zur Erinnerung:
Die maximale Definitionsmenge einer Exponentialfunktion ist $\mathbb{R}$.

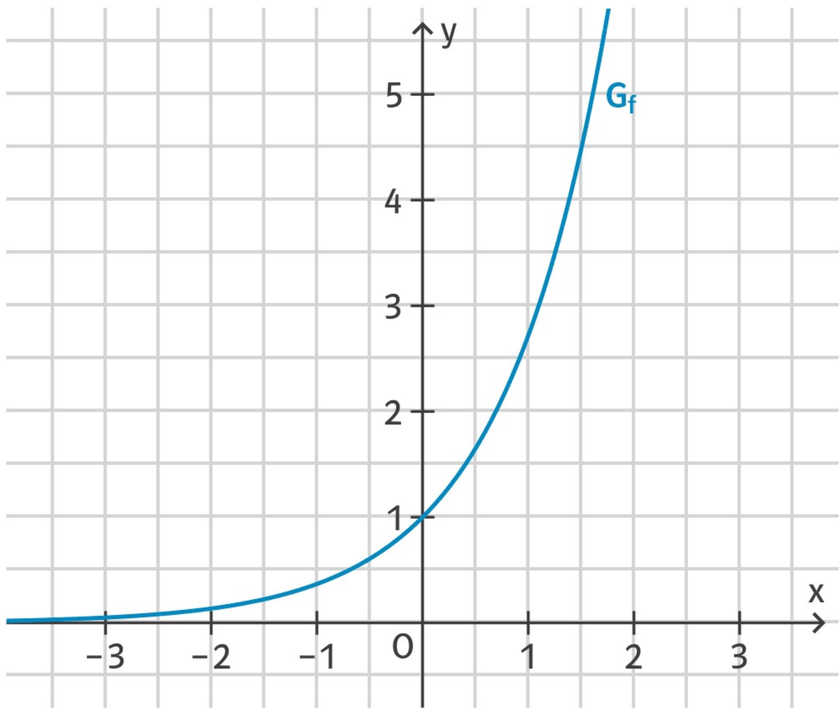
Der Graph der natürlichen Exponentialfunktion

In der Abbildung ist der Graph der natürlichen Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$ dargestellt. Die Funktion f hat keine Nullstellen, da $f(x) > 0$ ist, keine Extremstellen, da $f'(x) > 0$ ist, und auch keine Wendestellen, da $f''(x) > 0$ ist. Demnach ist der Graph von f streng monoton steigend und linksgekrümmt. Er verläuft durch die Punkte $(0|1)$ und $(1|e)$. Es gilt

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ und

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Der Graph von f hat daher die x-Achse als waagerechte Asymptote.



Eine Gleichung wie z. B. $f'(x) = f(x)$, in der ein gesuchter Funktionsterm und auch Terme von Ableitungen dieser Funktion vorkommen, nennt man Differentialgleichung (vgl. auch Exkursion auf Seite 216).

Bemerkung:
Die natürliche Exponentialfunktion ist die einzige Funktion, die für alle $x \in \mathbb{R}$ die Eigenschaft $f'(x) = f(x)$ besitzt (bis auf Multiplikation mit Konstanten $c \in \mathbb{R}$, also $f_c: x \mapsto c \cdot e^x$, wie z. B. $3 \cdot e^x$ oder $0 \cdot e^x = 0$).

Beispiel 1

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{3}e^x + \sin(x)$.

a) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung sowie eine Stammfunktion der Funktion f.

b) Berechnen Sie die Größe des Steigungswinkels der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(\pi \mid f(\pi))$ auf eine Dezimale genau.

Lösung

a) $f': x \mapsto \frac{1}{3}e^x + \cos(x)$ $\quad f'': x \mapsto \frac{1}{3}e^x - \sin(x)$ $\quad F: x \mapsto \frac{1}{3}e^x - \cos(x)$

b) $m = f'(\pi) = \frac{1}{3}e^\pi - 1$ $\quad m = \tan\alpha \implies \alpha \approx 81{,}5°$

Beispiel 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5 \cdot e^x + x^2 - 2x + 1$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangente t und der Normalen n an G_f im Punkt $P(1 \mid f(1))$.

b) Zeichnen Sie die Tangente t sowie die Normale n in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie G_f im Intervall $[-1; 2]$ mithilfe einer Wertetabelle.

Lösung

a) $y = f(1) = 0{,}5e$; $f'(x) = 0{,}5 \cdot e^x + 2x - 2$

$m_t = f'(1) = 0{,}5e \approx 1{,}4$

Einsetzen in $y = m_t \cdot x + t$ ergibt

$0{,}5e = 0{,}5e \cdot 1 + t \iff t = 0$.

Tangentengleichung: $y = 0{,}5e \cdot x$.

$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{2}{e} \approx -0{,}7$

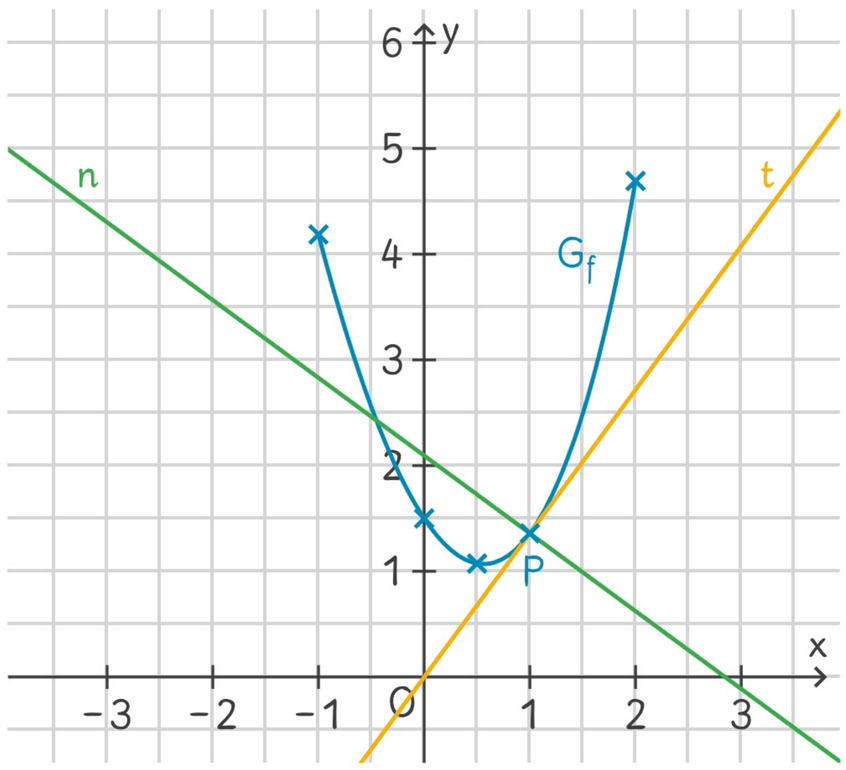
Einsetzen in $y = m_n \cdot x + t$ ergibt

$\frac{e}{2} = -\frac{2}{e} \cdot 1 + t \iff t = \frac{e^2 + 4}{2e} \approx 2{,}1$.

Normalengleichung: $y = -\frac{2}{e} \cdot x + \frac{e^2 + 4}{2e}$.

b) Wertetabelle:

x	−1	0	0,5	1	2
f(x)	≈ 4,2	1,5	≈ 1,1	≈ 1,4	≈ 4,7



Zur Erinnerung:
Ist m_t die Steigung der Tangente, dann ist $m_n = -\frac{1}{m_t}$ die Steigung der zugehörigen Normalen.

Aufgaben

1 Gegeben ist die natürliche Exponentialfunktion $f: x \mapsto e^x$.

a) Geben Sie $f(x)$ für $x = 0{,}25; -3; \sqrt{2}; -\sqrt{5}; e$ und $\frac{1}{e}$ auf vier Dezimalen genau an.

b) Bestimmen Sie die Stellen, an denen f die Funktionswerte $f(x) = \frac{1}{e}; \frac{1}{e^2}; 1; \sqrt{e}; \frac{e^7}{e^3}$ und $\sqrt[5]{e}$ besitzt. Schreiben Sie die Funktionswerte dazu als Potenzen zur Basis e.

2 Zeichnen Sie den Graphen der natürlichen Exponentialfunktion $f: x \mapsto e^x$ und skizzieren Sie damit die Graphen von

a) $f_1: x \mapsto e^x + 1$, **b)** $f_2: x \mapsto 2 \cdot e^x$, **c)** $f_3: x \mapsto e^{-x}$, **d)** $f_4: x \mapsto e^{x-1}$.

3 Erklären Sie sich gegenseitig die besondere Bedeutung der Euler'schen Zahl e als Basis einer Exponentialfunktion.

4 Bestimmen Sie die erste und die zweite Ableitung sowie eine Stammfunktion der Funktion f.

a) $f: x \mapsto 1 + e^x$ **b)** $f: x \mapsto 3x + e^x$ **c)** $f: x \mapsto e^x - 2x^2$

d) $f: x \mapsto 4e^x$ **e)** $f: x \mapsto 0{,}5x^2 - x - e^x$ **f)** $f: x \mapsto 2e^x - (x^3 + 1)$

g) $f: x \mapsto -\frac{1}{2}(e^x - x^4)$ **h)** $f: x \mapsto \frac{1}{3}e^x - \cos(x)$ **i)** $f: x \mapsto 2\sin(x) - e^x - 1$

5 Beschreiben Sie, wie der Graph von g aus dem Graphen von f mit $f(x) = e^x$ hervorgeht.

a) $g(x) = -e^{-x}$ **b)** $g(x) = 2 \cdot e^x - 3$ **c)** $g(x) = 3 \cdot e^{x-1} + 2$ **d)** $g(x) = -4 \cdot e^{-x+2}$

Zur Erinnerung:
$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

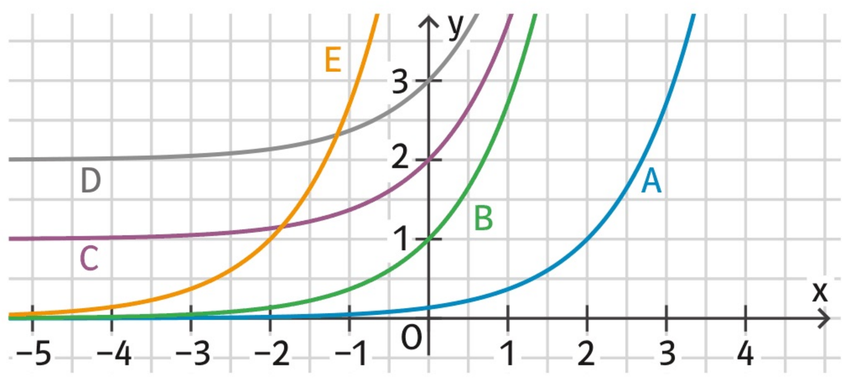
→ Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

6 Beurteilen und diskutieren Sie miteinander, ob die Aussage über den Graphen der natürlichen Exponentialfunktion wahr oder falsch ist.

a) Der Graph hat keinen Schnittpunkt mit der x-Achse.
b) Der Graph hat keinen Schnittpunkt mit der y-Achse.
c) Der Graph hat keinen Punkt mit waagerechter Tangente.
d) Der Graph nähert sich der x-Achse an.
e) Der Graph nähert sich einer Parallelen zur y-Achse an.
f) Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

7 Drei der fünf dargestellten Graphen gehören zu den Funktionen f, g und h mit $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{x+2}$ und $h(x) = e^x + 2$.

a) Ordnen Sie f, g und h jeweils ihren Graphen zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.
b) Geben Sie je einen Funktionsterm für die restlichen beiden Graphen an.



Test 1

Lösungen | Seite 274

8 Bestimmen Sie die erste und die zweite Ableitung sowie eine Stammfunktion der Funktion f.

a) $f: x \mapsto 2{,}5e^x - 1{,}5$ **b)** $f: x \mapsto \sin(x) - 0{,}5e^x$ **c)** $f: x \mapsto x^4 + 2x^2 + 3e^x$

9 Beschreiben Sie, wie die Graphen von f und g mit $f(x) = -e^x + 5$ und $g(x) = 5 \cdot e^{x-3} + 1$ jeweils aus dem Graphen der natürlichen Exponentialfunktion hervorgehen.

10 Begründen Sie, ob die Aussage über die natürliche Exponentialfunktion wahr oder falsch ist.

a) Die maximale Definitionsmenge der natürlichen Exponentialfunktion ist $\mathbb{R}$.
b) Die natürliche Exponentialfunktion hat als Wertemenge $\mathbb{R}$.
c) Für $x < 0$ gilt $e^x < 0$.
d) Der Graph der natürlichen Exponentialfunktion und der Graph der Funktion $x \mapsto e^{-x}$ sind zueinander symmetrisch.
e) Die zweite Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion ist für alle $x \in D$ größer null, weswegen der Graph der natürlichen Exponentialfunktion rechtsgekrümmt ist.

11 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$ und berechnen Sie die Größe des zugehörigen Steigungswinkels auf eine Dezimale genau.

a) $f: x \mapsto 4e^x$, $x_0 = -2$ **b)** $f: x \mapsto -3e^x$, $x_0 = 0{,}5$
c) $f: x \mapsto \frac{1}{2}e^x - e \cdot x^2$, $x_0 = 1$ **d)** $f: x \mapsto 4e^x - 3x^e$, $x_0 = 0$

12 Ermitteln Sie, falls möglich, die Punkte $P(x_0 \mid f(x_0))$ und $Q(x_0 \mid g(x_0))$, in denen die Graphen von f und g parallele Tangenten haben. Erläutern Sie, wie man anhand der Graphen von f' und g' erkennen kann, ob es solche Punkte gibt. Überprüfen Sie damit Ihr Ergebnis, indem Sie mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware die Graphen der Funktionen und ihrer Ableitungen darstellen.

a) $f: x \mapsto e^x$, $g: x \mapsto x - 2$ **b)** $f: x \mapsto 2e^x$, $g: x \mapsto -4x$
c) $f: x \mapsto e^x - 3$, $g: x \mapsto \sqrt{e} \cdot x$ **d)** $f: x \mapsto -e^x$, $g: x \mapsto x^3$

13 **a)** Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangente und der Normalen an den Graphen der Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{2}e^x + 2$ im Punkt $P(0 \mid f(0))$.
b) Skizzieren Sie den Graphen von f sowie die Tangente und die Normale.
c) Die Tangente schneidet die x-Achse im Punkt Q, die Normale schneidet die x-Achse im Punkt R. Zeichnen Sie P, Q und R in Ihre Skizze aus Teilaufgabe b) ein und berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks PQR.

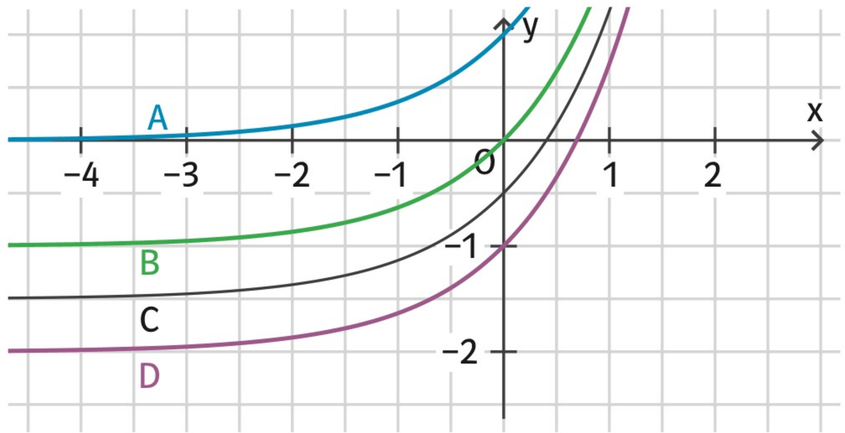
14 Untersuchen und diskutieren Sie miteinander, ob der Graph von f mit $f(x) = e^x + 2x$ und der Graph von g mit $g(x) = 2x - 1$ gemeinsame Punkte besitzen.

15 Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = e^x - a$ $(a \in \mathbb{R})$.

a) In der Abbildung sind vier Graphen der Funktionenschar dargestellt. Bestimmen Sie jeweils den dazugehörigen Wert des Parameters a.

b) Beschreiben Sie allgemein, wie sich eine Erhöhung von a auf die Lage der Graphen auswirkt.

c) Bestimmen Sie die Ableitung von f_a.



16 Gegeben ist die Funktionenschar $f_{a,b}: x \mapsto a \cdot e^x + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Ermitteln Sie, für welche Werte von a und b die Tangente an den Graphen von $f_{a,b}$ im Punkt $P(0|1)$ die Steigung 2 hat.

→ Strategie | Seite 259
Aufstellen und Lösen eines Gleichungssystems

17 **Abiturprüfung 2022 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1 und 2, Aufgabe 4**

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Zeigen Sie, dass $f_a'(0) = -a$ gilt.

b) Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(0|f_a(0))$. Bestimmen Sie diejenigen Werte von a, für die diese Tangente eine positive Steigung hat und zudem die x-Achse in einem Punkt schneidet, dessen x-Koordinate größer als $\frac{1}{2}$ ist.

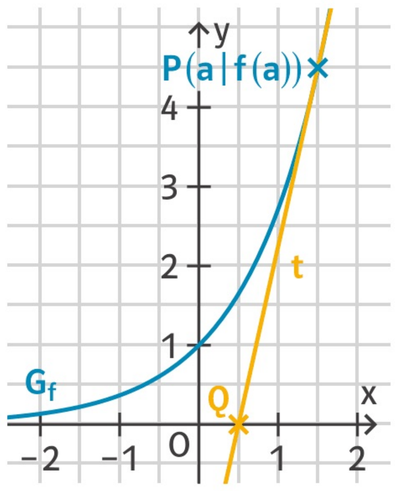
18 Gegeben ist die natürliche Exponentialfunktion $f: x \mapsto e^x$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) In einem Punkt $P(a|f(a))$ wird die Tangente an G_f gelegt. Diese Tangente schneidet die x-Achse im Punkt Q (vgl. Abbildung). Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q in Abhängigkeit von a.

b) Geben Sie an, welcher Zusammenhang zwischen den x-Koordinaten der Punkte P und Q besteht.

c) Für die Steigung m_t der Tangente an G_f in $P(x_0|f(x_0))$ gilt $m_t = f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Begründen Sie mithilfe dieser Beziehung das Ergebnis von Teilaufgabe b) anschaulich.

d) Erläutern Sie, wie sich mit dem Ergebnis von Teilaufgabe b) die Tangente an G_f in einem gegebenen Punkt konstruieren lässt.



Test 2

→ Lösungen | Seite 274

19 Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = a \cdot e^x + 2$ $(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

a) Bestimmen Sie einen Term der Ableitung von f_a.

b) Ermitteln Sie denjenigen Wert von a, für den die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $P(0|f_a(0))$ die x-Achse an der Stelle $x = -1{,}5$ schneidet.

→ Strategie | Seite 259
Aufstellen und Lösen einer Gleichung

20 **a)** Der Term $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ strebt mit wachsendem n gegen e. Berechnen Sie auf diese Weise e näherungsweise auf sieben Dezimalen genau. Geben Sie den zugehörigen Wert von n an.

b) Geben Sie an, bis zu welchem Wert von n Sie den Term $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ berechnen müssen, um e mit diesem Term näherungsweise auf sieben Dezimalen zu bestimmen.

c) Nennen Sie Vor- und Nachteile der beiden in den Teilaufgaben a) und b) beschriebenen Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von e.

Zur Erinnerung:
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$
$(n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$.
Zudem ist definiert:
$0! = 1$.
Zu Aufgabe 20: vgl. die Exkursion auf Seite 62

Grundwissen Test

→ Lösungen | Seite 274

G 21 Geben Sie alle Gleichungen an, die man ohne Verwendung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen geschickt lösen kann, und berechnen Sie deren Lösung ohne Lösungsformel.

→ Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

(1) $x^2 - x = 2x$

(2) $3(t^2 - t) = 3$

(3) $2t^2 = \frac{1}{4}t^2$

(4) $x^2 - 4x + 2 = 1$

(5) $x - 2x^2 = 3x^2 + 4x$

(6) $0 = 2(1 - 3x)^2$

(7) $(x + 2)(x - 2) = 5$

2 Ableitung und Grenzwerte von Verknüpfungen mit der e-Funktion

Schreiben Sie die in der Abbildung angegebenen Funktionen jeweils als Verknüpfung der Funktionen $g: x \mapsto e^x$ und $h: x \mapsto x^2$.
Leiten Sie die Funktionen g und h ab und bestimmen Sie damit Terme der Ableitungen von f_1 und f_3.
Diskutieren Sie, wie sich die Funktion f_1 für $x \to +\infty$ bzw. für $x \to -\infty$ verhält.

$f_1: x \mapsto e^x \cdot x^2$

$f_2: x \mapsto e^{2x}$

$f_3: x \mapsto e^{x^2}$

$f_4: x \mapsto x^2 \cdot e^{-x}$

Funktionen lassen sich durch Operationen wie Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Verkettung auf vielfältige Weise miteinander verknüpfen. Dadurch ergeben sich neue Funktionen. Um diese Funktionen ableiten zu können, müssen gegebenenfalls die Ableitungsregeln wie Produkt- und Kettenregel angewendet werden.

Beispielsweise ist die Funktion $f: x \mapsto e^{x^2+1}$ eine Verkettung der natürlichen Exponentialfunktion $u: x \mapsto e^x$ als äußere Funktion mit $v: x \mapsto x^2 + 1$ als innere Funktion. Wegen $u'(x) = e^x$ und $v'(x) = 2x$ folgt mit der Kettenregel $f'(x) = e^{x^2+1} \cdot 2x$.

Die Funktion $g: x \mapsto e^x \cdot (x^2 + 1)$ ist das Produkt der Funktionen u und v. Mit der Produktregel folgt $g'(x) = e^x \cdot (x^2 + 1) + e^x \cdot 2x$.

Zur Untersuchung von Funktionen muss man u.a. die Nullstellen der Ableitung kennen. Um diese zu bestimmen, ist es häufig zweckmäßig, den Funktionsterm der Ableitung, falls möglich, als Produkt darzustellen.
Speziell im Fall von $g: x \mapsto e^x \cdot (x^2 + 1)$ lässt sich der Term der Ableitung wie folgt faktorisieren:
$g'(x) = e^x \cdot (x^2 + 1) + e^x \cdot 2x = e^x \cdot (x^2 + 2x + 1)$.

Allgemein gilt für solche Verknüpfungen mit der natürlichen Exponentialfunktion:

Satz: Sei $v: x \mapsto v(x)$ eine differenzierbare Funktion.
Für $\mathbf{f(x) = e^{v(x)}}$ gilt $\mathbf{f'(x) = e^{v(x)} \cdot v'(x)}$.
Für $\mathbf{g(x) = e^x \cdot v(x)}$ gilt $\mathbf{g'(x) = e^x \cdot v(x) + e^x \cdot v'(x) = e^x \cdot (v(x) + v'(x))}$.

Bemerkung:
Bei der Verkettung $f: x \mapsto e^{v(x)}$ überträgt sich das Monotonieverhalten der Funktion $v: x \mapsto v(x)$ auf die Funktion f, da $f'(x) = e^{v(x)} \cdot v'(x)$ das gleiche Vorzeichen wie $v'(x)$ hat, denn $e^{v(x)}$ ist stets positiv.

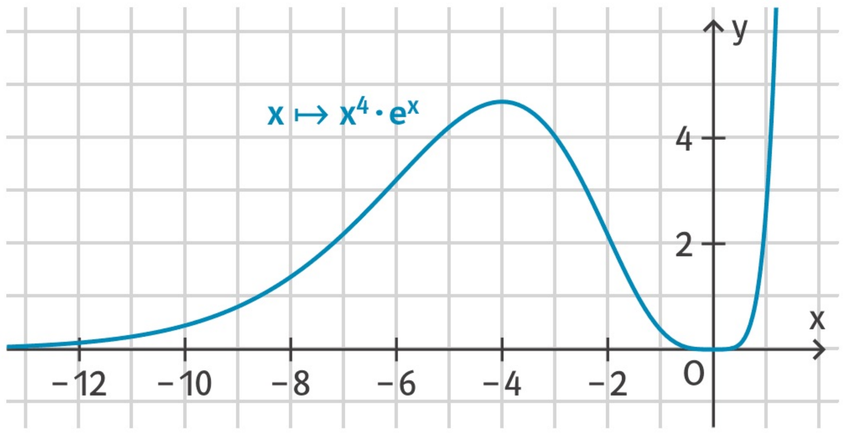
Grenzverhalten von Verknüpfungen
Das Grenzverhalten einer Verknüpfung lässt sich oft unmittelbar aus dem Grenzverhalten der beteiligten Funktionen ermitteln. Beispielsweise gilt für das Verhalten der Funktion $x \mapsto x^4 \cdot e^x$ für $x \to +\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} (\underbrace{x^4}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty}) = +\infty$.

Es gibt jedoch Fälle, in denen sich das Grenzverhalten eines Produkts nicht unmittelbar aus dem Grenzverhalten der einzelnen Faktoren ablesen lässt, etwa bei der oben betrachteten Funktion das Verhalten für $x \to -\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} (\underbrace{x^4}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{e^x}_{\to 0})$.

Zur Erinnerung:
Produktregel:
$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow$
$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
Kettenregel:
$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow$
$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Zur Erinnerung:
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Das Grenzverhalten für $x \to -\infty$ hängt in diesem Fall, in dem der eine Faktor gegen null und der andere gegen unendlich strebt, davon ab, welcher der beiden Faktoren dominiert.
Ein Blick auf den Graphen bzw. die Wertetabelle lässt vermuten, dass sich die natürliche Exponentialfunktion gegenüber der Potenzfunktion „durchsetzt".



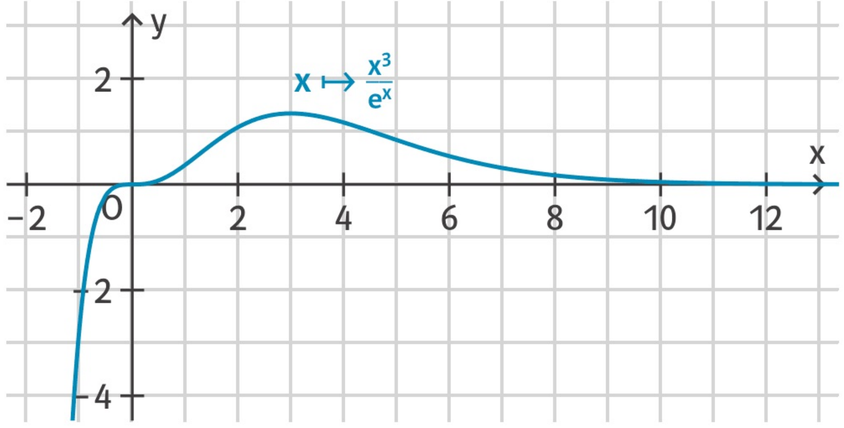
x	x^4	e^x	$x^4 \cdot e^x$
−10	10 000	$4{,}54 \cdot 10^{-5}$	0,45
−20	160 000	$2{,}06 \cdot 10^{-9}$	$3{,}30 \cdot 10^{-4}$
−30	810 000	$9{,}36 \cdot 10^{-14}$	$7{,}58 \cdot 10^{-8}$
−40	2 560 000	$4{,}25 \cdot 10^{-18}$	$1{,}09 \cdot 10^{-11}$
−50	6 250 000	$1{,}93 \cdot 10^{-22}$	$1{,}21 \cdot 10^{-15}$

Damit ergibt sich vermutlich folgender Grenzwert: $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 \cdot e^x) = 0$.

Ähnlich gelagert ist der Fall, wenn eine Potenzfunktion und die natürliche Exponentialfunktion durch Division verknüpft werden wie beispielsweise bei der Funktion $x \mapsto \frac{x^3}{e^x}$. In diesem Fall lässt sich das Verhalten für $x \to -\infty$ unmittelbar ablesen:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x \to -\infty} (\underbrace{x^3}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\to +\infty}) = -\infty.$$

Dagegen streben für $x \to +\infty$ sowohl der Zähler x^3 als auch der Nenner e^x gegen unendlich, d.h., das Grenzverhalten des Quotienten lässt sich nicht unmittelbar aus dem Grenzverhalten von Zähler und Nenner ablesen. Betrachtet man wieder den Graphen bzw. die Wertetabelle, dominiert wohl auch in diesem Fall die Exponentialfunktion gegenüber der Potenzfunktion.



x	x^3	e^x	$\frac{x^3}{e^x}$
10	1000	22 026	0,045
20	8000	$4{,}85 \cdot 10^{8}$	$1{,}65 \cdot 10^{-5}$
30	27 000	$1{,}07 \cdot 10^{13}$	$2{,}53 \cdot 10^{-9}$
40	64 000	$2{,}35 \cdot 10^{17}$	$2{,}72 \cdot 10^{-13}$
50	125 000	$5{,}18 \cdot 10^{21}$	$2{,}41 \cdot 10^{-17}$

Damit ergibt sich vermutlich folgender Grenzwert: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 \cdot e^{-x}) = 0$.

Man kann beweisen, dass die Grenzwerte, die bisher nur anhand der jeweiligen Graphen bzw. Wertetabellen plausibel gemacht wurden, tatsächlich gelten (vgl. hierzu die Exkursion auf Seite 62).

Satz: Es gelten folgende Grenzwerte von Verknüpfungen mit der natürlichen Exponentialfunktion $(n \in \mathbb{N})$.

$$\lim_{x \to -\infty} (x^n \cdot e^x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} (x^n \cdot e^{-x}) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} (e^x - x^n) = +\infty$$

Bemerkung:
Die im Merkkasten angegebenen Grenzwerte bedeuten anschaulich, dass e^x für $x \to +\infty$ „schneller" wächst als jede Potenz x^n $(n \in \mathbb{N})$.

Beachten Sie:

Da das Grenzverhalten einer ganzrationalen Funktion $p: x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ nur vom Summanden mit der höchsten Potenz $a_n x^n$ bestimmt wird, gelten die angegebenen Grenzwerte entsprechend, wenn anstelle einer Potenz x^n ein Polynom $p(x)$ steht.

$$\lim_{x \to -\infty} (p(x) \cdot e^x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} (p(x) \cdot e^{-x}) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} (e^x - p(x)) = +\infty$$

Beispiel 1

Bestimmen Sie einen Term der Ableitung der Funktion. Geben Sie an, welche Ableitungsregel Sie angewendet haben, und ermitteln Sie die Nullstellen der Ableitung.

→ Strategie | Seite 260 Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

a) $f: x \mapsto e^{x^2 + 3x - 2}$ **b)** $g_a: x \mapsto e^x \cdot (x^2 - a)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ **c)** $h: x \mapsto e^{\sin(x)}$

Lösung

a) Mithilfe der Kettenregel: $f'(x) = e^{x^2 + 3x - 2} \cdot (2x + 3)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1{,}5$

b) Mithilfe der Produktregel: $g_a'(x) = e^x \cdot (x^2 - a) + e^x \cdot 2x = e^x \cdot (x^2 + 2x - a)$.

$g_a'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 + \sqrt{4 + 4a}}{2} = -1 + \sqrt{1 + a}$ oder $x = \frac{-2 - \sqrt{4 + 4a}}{2} = 1 - \sqrt{1 + a}$

c) Mithilfe der Kettenregel: $h'(x) = e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Beispiel 2

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

→ Strategie | Seite 260 Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

a) $f: x \mapsto 3 - x^2 \cdot e^x$ **b)** $g: x \mapsto \frac{x^3}{e^x} + 5$ **c)** $h: x \mapsto \frac{1}{2} e^x - x^7$

Lösung

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3 - x^2 \cdot e^x) = 3 - \lim\limits_{x \to +\infty} (\underbrace{x^2}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty}) = -\infty$

$= +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (3 - x^2 \cdot e^x) = 3 - \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 \cdot e^x) = 3 - 0 = 3$

$= 0$, da die e-Funktion dominiert

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{e^x} + 5\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{e^x}\right) + 5 = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 \cdot e^{-x}) + 5 = 0 + 5 = 5$

$= 0$, da die e-Funktion dominiert

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3}{e^x} + 5\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3}{e^x}\right) + 5 = \lim\limits_{x \to -\infty} (\underbrace{x^3}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\to +\infty}) + 5 = -\infty$

$= -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2} e^x - x^7\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2} \underbrace{e^x}_{\to 0} - \underbrace{x^7}_{\to -\infty}\right) = +\infty$

Aufgaben

1 Bestimmen Sie einen Term der Ableitung f' von f. Kontrollieren Sie gegenseitig Ihre Ergebnisse.

a) $f(x) = e^{7x}$ **b)** $f(x) = e^{-0{,}2x}$ **c)** $f(x) = 3 \cdot e^{2x}$ **d)** $f(x) = 0{,}5 \cdot e^{-4x}$

e) $f(x) = e^{x^2}$ **f)** $f(x) = 4 \cdot e^{2x - 3}$ **g)** $f(x) = \frac{1}{e^x}$ **h)** $f(x) = e^{-\frac{2}{3}x^3}$

i) $f(x) = 0{,}2 \cdot e^{1 - 5x}$ **j)** $f(x) = -\frac{1}{10 \cdot e^{5x + 1}}$ **k)** $f(x) = e^{-4x + 2x^2}$ **l)** $f(x) = \frac{5}{e^{3x - x^3}}$

2 Bestimmen Sie die Ableitung f' der Funktion f sowie die Nullstellen von f und f'.

a) $f: x \mapsto x \cdot e^x$ **b)** $f: x \mapsto (2x - 3) \cdot e^x$ **c)** $f: x \mapsto 4x^2 \cdot e^x$

d) $f: x \mapsto (x^2 - 5) \cdot e^x$ **e)** $f: x \mapsto (3x - 2)^2 \cdot e^x$ **f)** $f: x \mapsto x^4 \cdot e^x$

3 Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f und kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.

a) $f: x \mapsto 2 \cdot \cos(x) \cdot e^{-x}$ **b)** $f: x \mapsto -e^{\cos(x)}$ **c)** $f: x \mapsto \sin(e^{0,5x})$

d) $f: x \mapsto \frac{3x - 2x^2}{e^{6x}}$ **e)** $f: x \mapsto (4x - 1) \cdot e^{-3x^2}$ **f)** $f: x \mapsto (4 - 5x)^8 \cdot e^x$

4 Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion der Funktion f ist.

a) $F: x \mapsto 3x^3 + e^{-2x}$
$f: x \mapsto 9x^2 - 2 \cdot e^{-2x}$

b) $F: x \mapsto 3x^2 \cdot e^{-x^2}$
$f: x \mapsto 6x \cdot (1 - x^2) \cdot e^{-x^2}$

5 Bilden Sie aus den Funktionen $f: x \mapsto 3 \cdot e^x$ und $g: x \mapsto x^2 + 1$ die angegebene Verknüpfung und bestimmen Sie zur resultierenden Funktion die Ableitung.

a) $f + g$ **b)** $f - g$ **c)** $f \cdot g$ **d)** $\frac{g}{f}$ **e)** $g \circ f$ **f)** $f \circ g$ **g)** $g \circ g$ **h)** $f \circ f$

6 **Abiturprüfung 2012 (Bayern), Analysis, Aufgabengruppe II, Teil 1, Aufgabe 2**

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g: x \mapsto x \cdot e^{-2x}$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts, in dem der Graph von g eine waagrechte Tangente hat.

b) Geben Sie das Verhalten von g für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ an.

7 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

a) $f: x \mapsto e^{-2x}$ **b)** $f: x \mapsto e^{x^2}$ **c)** $f: x \mapsto x^2 \cdot e^{-3x}$

d) $f: x \mapsto x^3 \cdot e^{0,1x}$ **e)** $f: x \mapsto e^{-x} - 2$ **f)** $f: x \mapsto 2x^2 \cdot e^x$

g) $f: x \mapsto e^{0,5x} + 5x$ **h)** $f: x \mapsto 3 - x \cdot e^{-x}$ **i)** $f: x \mapsto \frac{x^7 + 8x^3}{e^x}$

j) $f: x \mapsto e^{4x} - x^4 - 1$ **k)** $f: x \mapsto x^{100} \cdot e^{-0,01x}$ **l)** $f: x \mapsto 3x^3 - \frac{1}{3}e^x$

8 Beim Bestimmen der Grenzwerte sind Fehler unterlaufen. Beschreiben Sie die Fehler und geben Sie die korrekten Grenzwerte an.

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\to +\infty \; x^3}{\to +\infty \; e^x} = \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“} = 1$

(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\to +\infty \; 4x^6 \cdot \to +\infty \; e^x) = +\infty$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\to +\infty \; 3x^2 - \to +\infty \; e^x) = \text{„}\infty - \infty\text{“} = 0$

9 Ordnen Sie den drei Funktionstermen auf den Kärtchen einen der abgebildeten Graphen zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

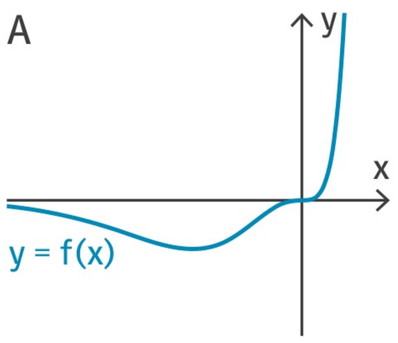
→ Strategie | Seite 257
Ausschlussprinzip

1 $f(x) = x^4 \cdot e^{-x}$

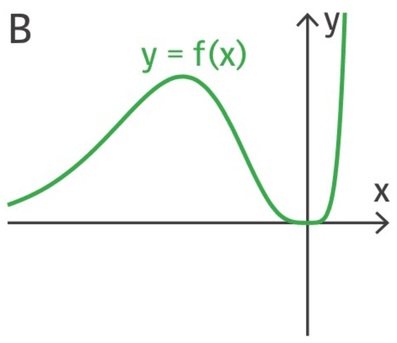
2 $f(x) = x^3 \cdot e^x$

3 $f(x) = x^5 \cdot e^{-x}$

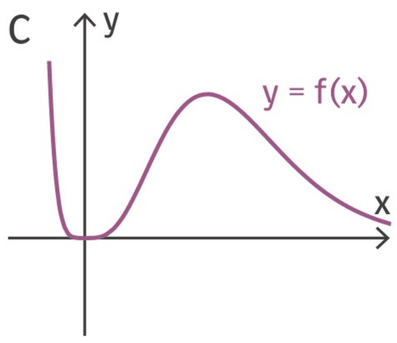
A



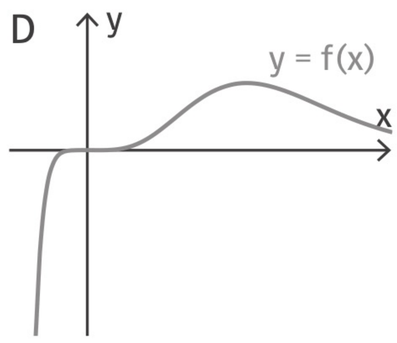
B



C



D



Test 1

→ Lösungen | Seite 274

10 Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f.

a) $f: x \mapsto 4x - e^{-x^2}$ **b)** $f: x \mapsto (2x^3 - x) \cdot e^x$ **c)** $f: x \mapsto -2 \cdot e^{\sin(x)}$

11 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

a) $f: x \mapsto x^4 \cdot e^x$ **b)** $f: x \mapsto \frac{3x^5 + 2x^2 - x}{e^x}$ **c)** $f: x \mapsto \frac{1}{2}e^x - 2x^2$

12 **Abiturprüfung 2014 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1 und 2, Aufgabe 2**
Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^x \cdot (2x + x^2)$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

b) Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F mit $F(x) = x^2 \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist. Geben Sie eine Gleichung einer weiteren Stammfunktion G von f an, für die $G(1) = 2e$ gilt.

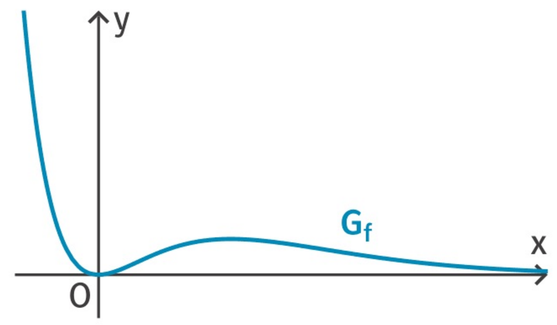
13 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.

a) Beurteilen und diskutieren Sie folgende Aussagen.

(A) $f(x) = x^2 \cdot e^x$ (B) $f(x) = x^3 \cdot e^{-x}$

(C) $x = 0$ ist eine Extremstelle von f'. (D) $f''(x) > 0$ für $x > 0$

b) Geben Sie einen möglichen Funktionsterm für f an und erläutern Sie Ihre Überlegungen.



14 Gegeben ist die Funktionenschar g_t $(t \in \mathbb{R})$. Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung von g_t.

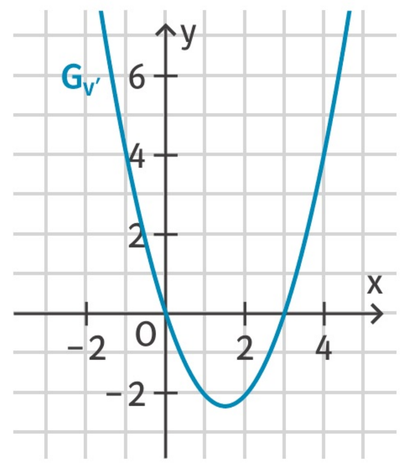
a) $g_t(x) = e^{2tx}$ **b)** $g_t(x) = 3 \cdot e^{tx^2}$ **c)** $g_t(x) = e^{tx} - t^2$ **d)** $g_t(x) = tx \cdot e^{2x}$

e) $g_t(x) = t \cdot e^{tx}$ **f)** $g_t(x) = 2t + e^{-3x}$ **g)** $g_t(x) = tx + xe^{tx}$ **h)** $g_t(x) = e^{2tx} - e^{tx}$

15 Gegeben ist die Funktionenschar h_b $(b \in \mathbb{R})$. Berechnen Sie jeweils den Wert von b, für den
(1) $P(2|5)$ auf dem Graphen von h_b liegt, (2) h_b' an der Stelle 0 den Wert 1 hat.

a) $h_b(x) = b^2 \cdot e^x$ **b)** $h_b(x) = \frac{x - b}{e^x}$ **c)** $h_b(x) = (b^2 - x) \cdot e^x$

16 In der Abbildung ist der Graph der Ableitung einer Funktion v gezeichnet. Welche Aussagen können Sie hiermit über die Funktion $f: x \mapsto e^{v(x)}$ machen? Erläutern Sie Ihre Überlegungen und skizzieren Sie einen möglichen Graphen von f.

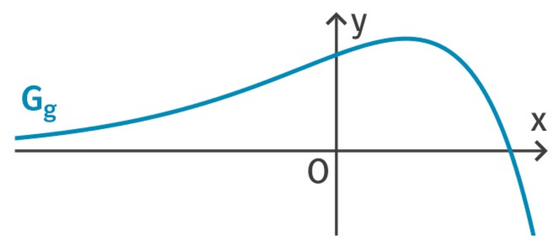


Test 2

→ Lösungen | Seite 275

17 **Abiturprüfung 2015 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 4**
Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a: x \mapsto xe^{ax}$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ermitteln Sie, für welchen Wert von a die erste Ableitung von f_a an der Stelle $x = 2$ den Wert 0 besitzt.

18 Die Abbildung zeigt den Graphen G_g einer Funktion g.
Für den Term der Ableitung einer Funktion f gilt $f'(x) = e^{g(x)}$.
Geben Sie an, ob der Graph von f einen Extrempunkt bzw. einen Wendepunkt hat, und erläutern Sie Ihre Überlegungen.



19 Bestimmen Sie jeweils den Term der 100. Ableitung von f, g und h mit $f(x) = e^{3x}$, $g(x) = e^{-x}$ und $h(x) = x \cdot e^x$.

→ Strategie | Seite 256
Systematisches Probieren

20 Gegeben ist die Funktionenschar $f_{a,b}: x \mapsto a \cdot e^{bx}$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Bestimmen Sie die Werte von a und b so, dass der Graph von $f_{a,b}$ durch den Punkt $P(3|3e)$ verläuft und die Tangente an den Graphen im Schnittpunkt mit der y-Achse mit dieser einen 45°-Winkel einschließt.

→ Strategie | Seite 259
Aufstellen und Lösen eines Gleichungssystems

Grundwissen Test

→ Lösungen | Seite 275

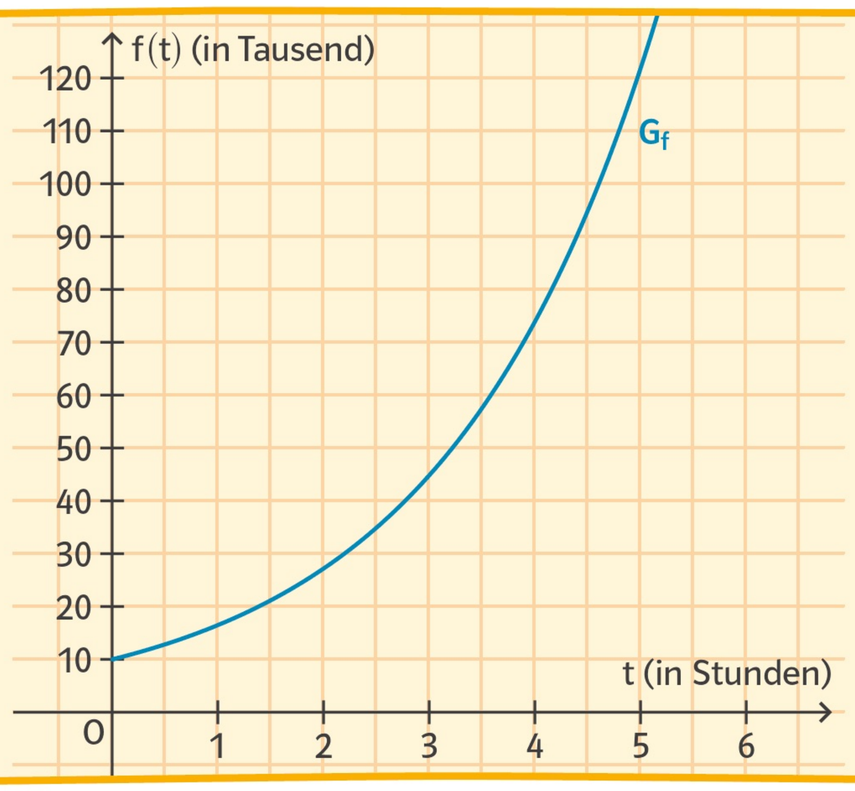
G 21 **Abiturprüfung 2017 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, daraus Teilaufgabe 1a)**
Nebenstehende Vierfeldertafel gehört zu einem Zufallsexperiment mit den stochastisch unabhängigen Ereignissen A und B. Tragen Sie alle fehlenden Wahrscheinlichkeiten ein.

	A	$\overline{A}$	
B	0,12		
$\overline{B}$			
	0,3		

Hinweis zu Aufgabe G 21:
Übertragen Sie zunächst die Vierfeldertafel in Ihr Heft und ergänzen Sie sie dort.

3 Natürlicher Logarithmus, Exponentialgleichungen und e-Funktion

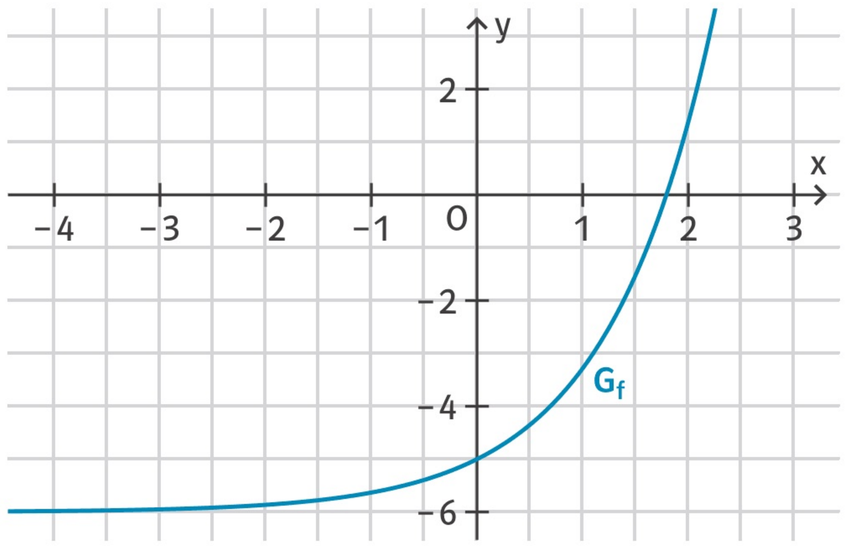
Einer Lebensmittelprobe werden ca. 10 000 Listeria-Bakterien entnommen und zu diagnostischen Zwecken kultiviert. Die Funktion $f: t \mapsto 10 \cdot e^{0,5 \cdot t},\ t \geq 0,$ (t in Stunden, f(t) in Tausend) beschreibt näherungsweise die Vermehrung der Bakterien in der Bakterienkultur.
Nach wie vielen Stunden hat sich die Anzahl der Bakterien in etwa verdoppelt bzw. verzehnfacht?
Wann ungefähr überschreitet die Anzahl der Bakterien eine Million?



Bei der Untersuchung von Funktionen, die durch Verknüpfungen mit der Exponentialfunktion entstehen, muss oft die **Exponentialgleichung $e^x = b$** gelöst werden.

Die Nullstelle der Funktion $f: x \mapsto e^x - 6$ kann man näherungsweise der Abbildung entnehmen: $x \approx 1{,}8$.

Möchte man die Nullstellen exakt bestimmen, ist die Gleichung $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 6 = 0$ und damit äquivalent die Exponentialgleichung $e^x = 6$ zu lösen.
Diese Gleichung hat genau eine Lösung:
$x = \log_e(6) \approx 1{,}79$.



Zur Erinnerung:
Die Exponentialgleichung $a^x = b$ hat für $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ und $x \in \mathbb{R}$ die Lösung $x = \log_a(b)$ (sprich: „Logarithmus von b zur Basis a“).

Allgemein hat die Exponentialgleichung $e^x = b$ für $b > 0$ die Lösung $x = \log_e(b)$. Dies ist die einzige Lösung, da $x \mapsto e^x$ streng monoton zunehmend ist.
Für $b \leq 0$ gibt es dagegen keine Lösung, da $e^x > 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$.

Man nennt den Logarithmus zur Basis e den **natürlichen Logarithmus** und schreibt anstelle $\log_e$ kurz ln.
Damit lautet die Lösung der obigen Exponentialgleichung $x = \log_e(b) = \ln(b)$.

Die Abkürzung ln steht für die lateinische Bezeichnung logarithmus naturalis.
Auf dem Taschenrechner ist der natürliche Logarithmus ebenfalls unter der Bezeichnung ln zu finden.

Definition: Die Lösung der **Exponentialgleichung $e^x = b$** mit $b \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet man als **natürlichen Logarithmus von b**. Man schreibt $\mathbf{x = \ln(b)}$.

$$e^x = b \Leftrightarrow x = \ln(b)$$

In Worten: Der natürliche Logarithmus von b ist derjenige Exponent, mit dem die Euler’sche Zahl e potenziert werden muss, um b zu erhalten.

Bemerkung:
Aus der Definition des natürlichen Logarithmus folgt $e^{\ln(x)} = x$ für $x > 0$ und $\ln(e^x) = x$.
Insbesondere gilt $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$.
Außerdem gilt folgende Regel für das Rechnen mit natürlichen Logarithmen:
$\ln(b^x) = x \cdot \ln(b)$.

Zur Erinnerung:
$a^{\log_a(x)} = x$
$\log_a(a^x) = x$
$\log_a(b^x) = x \cdot \log_a(b)$

Untersuchung verknüpfter Funktionen

Ziel einer Funktionsuntersuchung ist es, Eigenschaften einer Funktion bzw. ihres Graphen mithilfe des zugehörigen Funktionsterms und den Ableitungen der Funktion zu ermitteln.
Eine Funktion f bzw. ihr Graph G_f wird oft hinsichtlich folgender Eigenschaften untersucht:

- Symmetrieverhalten von G_f
- Nullstellen von f
- Schnittpunkt von G_f mit der y-Achse
- Verhalten von f für $x \to \pm\infty$ und Asymptoten von G_f
- Extrempunkte von G_f und Monotonieverhalten von f
- Wendepunkte und Krümmungsverhalten von G_f

Die Verwendung einer dynamischen Mathematiksoftware kann eine Funktionsuntersuchung unterstützen, insbesondere bei der Untersuchung von Funktionenscharen.

Darüber hinaus werden oft weitere Fragen wie z. B. nach der Größe eines bestimmten Steigungswinkels oder nach dem Term einer Stammfunktion gestellt.

Beispiel 1

Vereinfachen Sie.

a) $e^{2\cdot\ln(4)}$

b) $e^{-\ln(6)}$

c) $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

d) $0{,}2\cdot\ln\left(e^{5x-8}\right)$

Zur Erinnerung:
$(a^r)^s = a^{r\cdot s}$
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

Lösung

a) $e^{2\cdot\ln(4)} = \left(e^{\ln(4)}\right)^2 = 4^2 = 16$

b) $e^{-\ln(6)} = \left(e^{\ln(6)}\right)^{-1} = 6^{-1} = \frac{1}{6}$

c) $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}$

d) $0{,}2\cdot\ln\left(e^{5x-8}\right) = 0{,}2\cdot(5x-8) = x - 1{,}6$

Beispiel 2

Bestimmen Sie die Lösung der Exponentialgleichung $2\cdot e^{2x-3} = e^{-x}$.

Lösung

$$\begin{aligned} 2\cdot e^{2x-3} &= e^{-x} && \left|\cdot\tfrac{1}{2}e^{x}\right. \\ e^{3x-3} &= \tfrac{1}{2} && \left|\text{ Definition des ln}\right. \\ 3x-3 &= \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) \\ x &= 1+\tfrac{1}{3}\ln\left(\tfrac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Beispiel 3

Gegeben sind die Funktionen $p: x \mapsto x^2 - 2$ und $q: x \mapsto e^{-x}$.

a) Untersuchen Sie die Verknüpfungen $f: x \mapsto p(q(x))$ und $g: x \mapsto p(x)\cdot q(x)$ hinsichtlich Nullstellen, Verhaltens für $x \to \pm\infty$ sowie ihre Graphen hinsichtlich Lage und Art der Extrem- und Wendepunkte.

b) Verknüpfen Sie p und q so, dass der Graph der Verknüpfung symmetrisch zur y-Achse ist.

c) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mithilfe eines Funktionenplotters.

Lösung

a) $f(x) = (e^{-x})^2 - 2 = e^{-2x} - 2$

Nullstellen:

$e^{-2x} - 2 = 0 \iff -2x = \ln(2) \iff x = -\frac{1}{2}\cdot\ln(2) \approx -0{,}35$

Verhalten für $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-2x}-2\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{e^{-2x}}_{\to 0}\right) - 2 = -2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-2x}-2\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{e^{-2x}}_{\to +\infty}\right) - 2 = +\infty$$

Extrempunkte:

Keine Extrempunkte, da $f'(x) = -2\cdot e^{-2x} < 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$.

Wendepunkte:

Keine Wendepunkte, da $f''(x) = 4\cdot e^{-2x} > 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$.

$g(x) = (x^2 - 2) \cdot e^{-x}$

Nullstellen:

$(x^2 - 2) \cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \approx -1{,}4$ oder $x = \sqrt{2} \approx 1{,}4$

Verhalten für $x \to \pm\infty$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} ((x^2 - 2) \cdot e^{-x}) = 0$, da die e-Funktion dominiert.

Extrempunkte:

$g'(x) = (-x^2 + 2x + 2) \cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{3} \approx -0{,}7$ oder $x = 1 + \sqrt{3} \approx 2{,}7$

VZW von g' bei $x = 1 - \sqrt{3}$ von − nach + und VZW von g' bei $x = 1 + \sqrt{3}$ von + nach −. Mit $g(1 - \sqrt{3}) \approx -3{,}0$ und $g(1 + \sqrt{3}) \approx 0{,}4$ erhält man einen Tiefpunkt bei ca. $(-0{,}7 \mid -3{,}0)$ und einen Hochpunkt bei ca. $(2{,}7 \mid 0{,}4)$.

Wendepunkte:

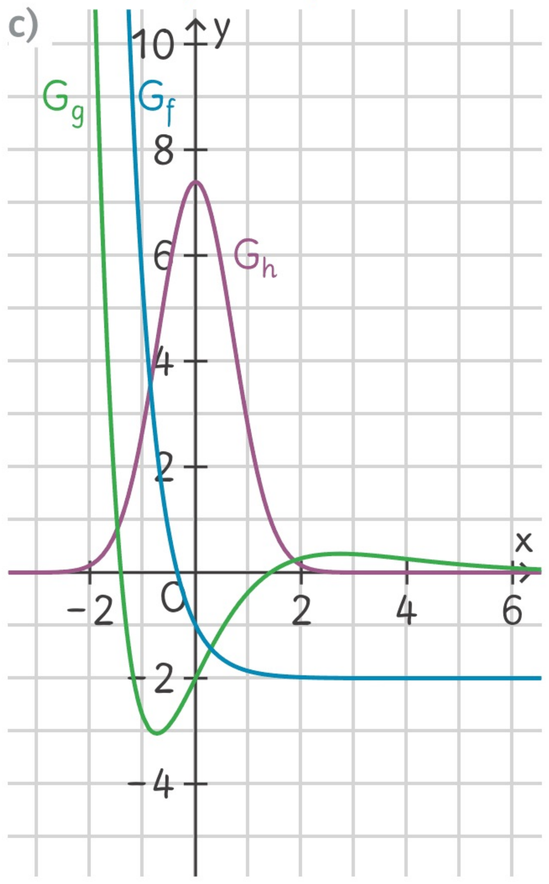
$g''(x) = (x^2 - 2x - 2 - 2x + 2) \cdot e^{-x} = (x^2 - 4x) \cdot e^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 4$

Da $x^2 - 4x$ der Funktionsterm einer Parabel ist, wechselt g'' an beiden Stellen das Vorzeichen. Mit $g(0) = -2$ und $g(4) \approx 0{,}3$ erhält man daher Wendepunkte bei $(0 \mid -2)$ und ca. $(4 \mid 0{,}3)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (\underbrace{(x^2 - 2)}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\to +\infty}) = +\infty$

c)



b) Der Graph der Funktion $h: x \mapsto q(p(x)) = e^{2 - x^2}$ ist symmetrisch zur y-Achse, da $h(x) = h(-x)$ gilt.

Zur Erinnerung:
Die Exponentialfunktion wächst für $x \to +\infty$ „schneller" als jede Potenzfunktion.

Zur Erinnerung:
Ein Produkt ist genau dann 0, wenn mindestens ein Faktor 0 ist.

Aufgaben

1 Vereinfachen Sie und kontrollieren Sie gegenseitig Ihre Ergebnisse.

a) $\ln(e)$	**b)** $\ln(e^3)$	**c)** $\ln(1)$	**d)** $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$	**e)** $\ln(\sqrt{e})$	**f)** $e^{\ln(4)}$
g) $3 \cdot \ln(e^2)$	**h)** $e^{\ln(2 \cdot 4)}$	**i)** $e^{\ln(2^4)}$	**j)** $e^{4 \cdot \ln(2)}$	**k)** $e^{\frac{1}{2} \cdot \ln(9)}$	**l)** $\ln(e^2 \cdot e)$
m) $e^{\ln(3x)}$	**n)** $\ln(e^{3x - 1})$	**o)** $\ln(e \cdot e^x)$	**p)** $e^{\ln(4x - 1)}$	**q)** $\ln\left(\frac{1}{e} \cdot e^x\right)$	**r)** $e^{2\ln(x)}$

2 Bestimmen Sie die Lösung der Exponentialgleichung.

a) $e^x = e$	**b)** $e^{-4x - 5} = 1$	**c)** $e^{2x} = \frac{1}{e}$	**d)** $e^{x - 1} = \sqrt{e}$
e) $e^{-4z} = \frac{1}{e^2}$	**f)** $e^{2b - 5} = \sqrt[3]{e}$	**g)** $e^{5a - 8} = 1$	**h)** $2 \cdot e^{7x - 3} = \sqrt{4e}$

Das Produkt der Lösungen von Aufgabe 2 ergibt 1.

3 Untersuchen und diskutieren Sie, ob die Exponentialgleichung $e^x + 1 = 0$ eine Lösung besitzt.

4 Bestimmen Sie die Lösung der Exponentialgleichung. Geben Sie die Lösung mithilfe des natürlichen Logarithmus an und bestimmen Sie dann einen Näherungswert (auf drei Dezimalen genau).

a) $e^x = 15$	**b)** $e^{z + 1} = 2{,}4$	**c)** $e^{2x} = 7$	**d)** $3 \cdot e^{4y + 1} = 16{,}2$
e) $4 \cdot e^{-x} = 10$	**f)** $e^{4 - x} - 2 = 3$	**g)** $2 \cdot e^{6 - 3z} = 10$	**h)** $3 + 2e^{3 - 4a} = 9$

5 Anna und Bohdan müssen die Gleichung $\ln(x^2) = 0$ lösen. Beurteilen Sie ihre Lösungswege.

Anna: $\ln(x^2) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1$

Bohdan: $\ln(x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = e^0 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ oder $x = -1$

6 Bestimmen Sie die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f.

a) $f(x) = 2x - e^{2x}$	**b)** $f(x) = e^{3x} - 6x$	**c)** $f(x) = x \cdot e^{-x}$
d) $f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$	**e)** $f(x) = x \cdot e^x$	**f)** $f(x) = (x^2 - 3) \cdot e^x$
g) $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x$	**h)** $f(x) = e^x + e^{-x}$	**i)** $f(x) = -e^{-3x} + e^{-x}$

Test 1

→ Lösungen | Seite 275

7 Vereinfachen Sie.

a) $\ln(e^7)$ **b)** $e^{\ln(4x)}$ **c)** $2 \cdot \ln\left(\sqrt{e^{-x}}\right)$ **d)** $2 \cdot \ln\left(e^x \cdot \sqrt{e}\right)$

8 Ermitteln Sie die Lösung der Exponentialgleichung. Geben Sie die Lösung mithilfe des natürlichen Logarithmus an und bestimmen Sie dann einen Näherungswert (auf drei Dezimalen genau).

a) $e^x = 12$ **b)** $3 + e^{2x} = 5$ **c)** $2e^{0{,}5x - 3} = 8$ **d)** $1 - 3e^{4x - 2} = 0{,}25$

9 Bestimmen Sie Lage und Art der Extremstellen von f.

a) $f(x) = 4e^{-x} + 12x$ **b)** $f(x) = (3x - 9) \cdot e^{0{,}5x}$ **c)** $f(x) = e^{5x} - 4e^x$

10 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

a) $f(x) = e^x \cdot 2 - e^x \cdot e^x$ **b)** $f(x) = e^{-x} \cdot 9 - x^2 \cdot e^{-x}$ **c)** $f(x) = e^{2x} - 2 \cdot e^x$

d) $f(x) = e^{3x} - 9 \cdot e^x$ **e)** $f(x) = x^2 \cdot e^{5x} - 5x^2$ **f)** $f(x) = 9xe^{-5x} - 45e^{-5x}$

g) $f(x) = 12e^{2x} - e^{2x} \cdot 2x^2$ **h)** $f(x) = e^{2x} - e^{x+2}$ **i)** $f(x) = x^2e^{3x} + (x - 6)e^{3x}$

11 Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung, indem Sie e^x bzw. e^{x^2} substituieren.

a) $e^{2x} - 11e^x = -30$ **b)** $e^{2x^2} - e^{x^2} - 6 = 0$ **c)** $e^x - 9e^{-x} = 0$ **d)** $\frac{15}{e^x} - 1 = 2 \cdot e^x$

12 **Abiturprüfung 2017 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppen 1 und 2, Aufgabe 2**

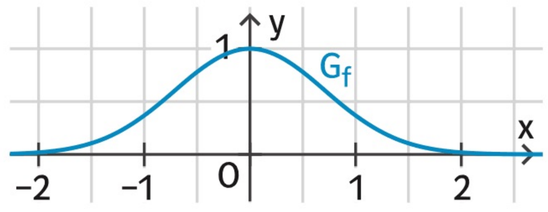
Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f.

b) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0\,|\,1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

→ Strategie | Seite 256
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

13 Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der Funktion f mit $f(x) = e^{-x^2}$. Weisen Sie die angegebenen Eigenschaften von f bzw. G_f nach.



A $f(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$

B Hochpunkt $H(0\,|\,1)$

C Wertemenge $W_f =]0; 1]$

D Wendepunkte $W_{1,2}\left(\pm\sqrt{0{,}5}\,\middle|\,e^{-0{,}5}\right)$

E Symmetrie zur y-Achse

14 Die Graphen zweier Funktionen f und g schneiden sich genau dann an der Stelle x_0, wenn $f(x_0) = g(x_0)$ gilt.

a) Begründen Sie mithilfe einer Skizze, dass die Exponentialgleichung $e^x = x$ keine Lösung besitzt.

b) Begründen Sie, dass die Exponentialgleichung $e^x = x^2$ mindestens eine Lösung besitzt. Ermitteln Sie mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware einen Näherungswert für diese Lösung.

c) Begründen Sie, dass die Exponentialgleichung $e^x = x^n$ $(x \in \mathbb{N})$ für gerade n entweder eine oder drei Lösungen besitzt.

d) Geben Sie an, wie viele Lösungen die Exponentialgleichung $e^x = \sin(x)$ besitzt und wie viele davon positiv sind.

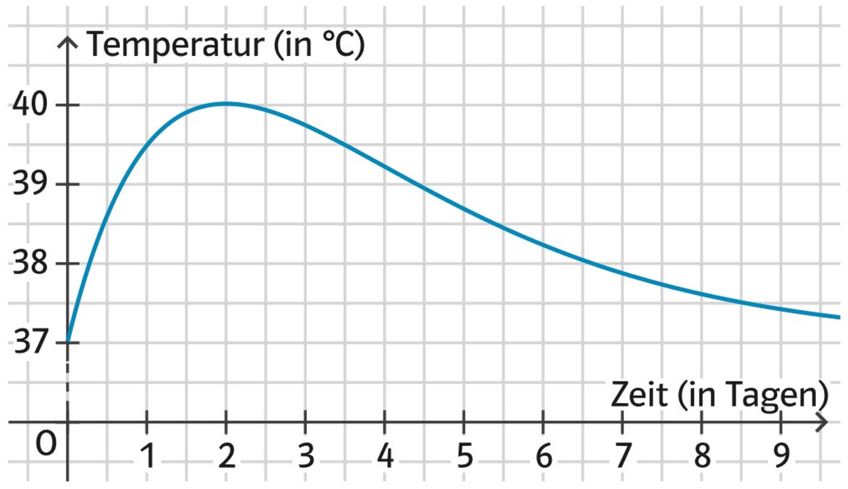
15 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto e^{2x} - 2e^x$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Stellen Sie $f(x)$ als Produkt dar und bestimmen Sie die Nullstellen von f.

b) Untersuchen Sie G_f auf Extrem- und Wendepunkte.

c) Ermitteln Sie das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$ und skizzieren Sie G_f.

16 Sophie bekommt eine Erkältung mit Fieber. Der Verlauf ihrer Fieberkurve wird durch die Funktion f mit $f(t) = 1{,}5 \cdot t \cdot e^{-0{,}5t+1} + 37$ (t in Tagen seit Ausbruch des Fiebers, $f(t)$ in °C) beschrieben. Bearbeiten Sie die Teilaufgaben a) – d) rechnerisch und kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mithilfe des Graphen.



a) Ermitteln Sie die maximale Temperatur.

b) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem das Fieber am stärksten abnimmt.

c) Geben Sie die Temperatur an, die sich langfristig bei Sophie einstellen wird.

d) Würde Sophie nach vier Tagen ein fiebersenkendes Medikament einnehmen, dann ginge Ihre Fieberkurve dadurch ohne Knick in eine Gerade über. Bestimmen Sie für diesen Fall, nach wie vielen Tagen Sophie wieder ihre Ausgangstemperatur erreichen würde.

e) Zeigen Sie, dass die Temperatur nach Erreichen des Maximums ständig abnimmt.

f) Für einen bestimmten Zeitpunkt gilt $f(t+1) = f(t) - 0{,}2$. Interpretieren Sie diese Gleichung im Sachzusammenhang.

g) Bei Max verläuft die Fieberkurve ganz ähnlich wie bei Sophie. Allerdings ist seine höchste Körpertemperatur niedriger als bei Sophie und er erreicht sie früher. Erläutern Sie, wie man den Funktionsterm verändern könnte, um damit den Fieberverlauf von Max zu beschreiben.

17 **Abiturprüfung 2016 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, daraus Teilaufgaben 1a) bis g)**

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von G_f mit der y-Achse und begründen Sie, dass G_f oberhalb der x-Achse verläuft.

b) Ermitteln Sie das Symmetrieverhalten von G_f sowie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$.

c) Zeigen Sie, dass für die zweite Ableitung f'' von f die Beziehung $f''(x) = \frac{1}{4} \cdot f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ gilt. Weisen Sie nach, dass G_f linksgekrümmt ist.

(zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}\right)$*)*

d) Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts von G_f.

e) Berechnen Sie die Steigung der Tangente g an G_f im Punkt $P(2 \mid f(2))$ auf eine Dezimale genau. Zeichnen Sie den Punkt P und die Gerade g in ein Koordinatensystem ein (Platzbedarf im Hinblick auf das Folgende: $-4 \le x \le 4$, $-1 \le y \le 9$).

f) Berechnen Sie $f(4)$ […] auf zwei Dezimalen genau und zeichnen Sie unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse G_f im Bereich $-4 \le x \le 4$ in das Koordinatensystem aus Aufgabe 17e) ein.

g) Zeigen Sie durch Rechnung, dass für $x \in \mathbb{R}$ die Beziehung $\frac{1}{4} \cdot [f(x)]^2 - [f'(x)]^2 = 1$ gilt.

18 Eine neue Achterbahn wird so geplant, dass nach einer sehr steilen Auffahrt eine Abfahrt folgt. Dies wird durch den Graphen der Funktion h_a mit $h_a(x) = 100\,a^2 x^2 e^{-ax}$ $(a > 0)$ beschrieben. Dabei ist $h_a(x)$ die Höhe der Bahn im horizontalen Abstand x vom Start (alle Angaben in m).

a) Zeigen Sie, dass die Höhe des höchsten Punktes der Bahn unabhängig von a ist, und bestimmen Sie diese Höhe.

b) Zeigen Sie, dass die Bahn nach dem höchsten Punkt ständig abfällt.

c) Bestimmen Sie die Werte von a, für die die Auffahrt nicht steiler als 70 % ist.

→ Strategie | Seite 259
Aufstellen und Lösen eines Gleichungssystems

19 Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = 2 - x \cdot e^{-ax^2}$ $(a \in \mathbb{R}^+)$.

a) Beschreiben Sie unter Verwendung eines Schiebereglers in einer dynamischen Mathematiksoftware, wie sich eine Änderung des Wertes von a auf den Graphen von f_a auswirkt.

b) Berechnen Sie die Extrem- und Wendestellen von f_a.

Test 2

→ Lösungen | Seite 275

20 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -2 \cdot e^{-2x^2+1}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Ermitteln Sie das Symmetrieverhalten von G_f und begründen Sie damit, dass G_f mindestens einen Extrempunkt besitzt. Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$.

b) Zeigen Sie, dass es nur einen Extrempunkt gibt. Bestimmen Sie dessen Art und Lage.

c) Ermitteln Sie die Koordinaten der Wendepunkte von G_f und geben Sie das Krümmungsverhalten von G_f an.

d) Skizzieren Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse.

21 Gegeben ist die Funktionenschar f_b mit $f_b(x) = e^{x-b} - x + 2$ $(b \in \mathbb{R})$.

a) Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunktes der Graphen von f_b.

b) Ermitteln Sie den Wert von b, für den der Extrempunkt auf der x-Achse liegt.

c) Berechnen Sie den Wert von b, für den die Tangente an den Graphen von f_b im Schnittpunkt mit der y-Achse parallel zur Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten ist.

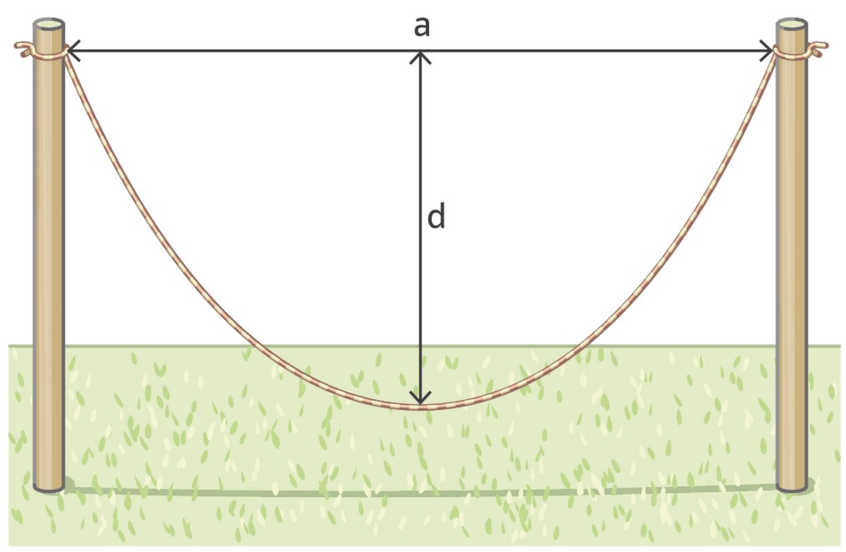
→ Strategie | Seite 259
Aufstellen und Lösen einer Gleichung

22 Der Verlauf eines hängenden Seils, das an seinen Enden auf gleicher Höhe befestigt ist, wird durch eine Kettenlinie modelliert. Diese ist ein Graph der Funktionenschar $f_k(x) = \frac{k}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$ $(k \in \mathbb{R}^+$, x und $f_k(x)$ in Metern$)$.

a) Untersuchen Sie mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware unter Verwendung eines Schiebereglers, wie sich der Wert des Parameters k auf den Verlauf des Seils auswirkt. Beschreiben Sie, welche gemeinsamen Eigenschaften die Graphen von f_k haben.

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Graphen von f_k symmetrisch zur y-Achse sind.

c) Bestimmen Sie mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware einen Wert für k auf zwei Dezimalen genau, sodass der Graph von f_k den Verlauf eines Seiles modelliert, das zwischen zwei Pfosten mit dem Abstand $a = 1\,m$ hängt und einen Durchhang von $d = 0{,}5\,m$ hat.



d) Berechnen Sie für $a = 1\,m$ und dem Näherungswert von k aus Teilaufgabe c) die Größen der Steigungswinkel des Seils in den Aufhängepunkten auf eine Dezimale genau.

e) Bestimmen Sie rechnerisch den Wert von k auf drei Dezimalen genau, wenn die Steigungswinkel in den Aufhängepunkten bei demselben Abstand $a = 1\,m$ den Wert 45° bzw. −45° haben. Überprüfen Sie Ihre Rechnung mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.

Grundwissen Test

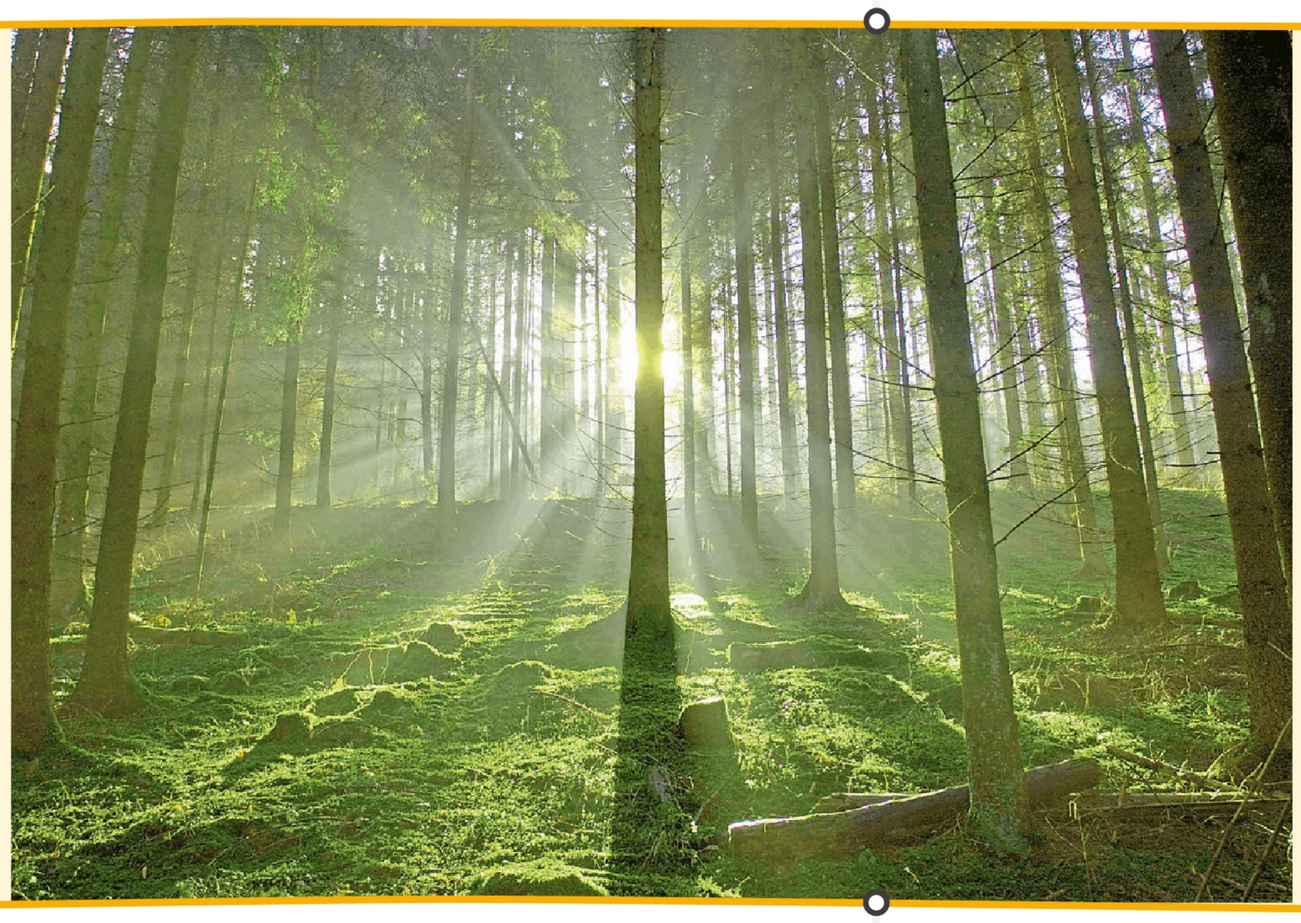
→ Lösungen | Seite 276

G 23 Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung rechnerisch und geben Sie die Lösungsmenge in Intervallschreibweise an.
Hinweis zu Teilaufgabe d): Lösen Sie zunächst die zugehörige Gleichung und geben Sie anschließend mithilfe einer Skizze des Graphen der Funktion $x \mapsto -x^2 + 5x - 4$ die Lösungsmenge an.

a) $-5x + 3 \geq 1$ **b)** $5 - 2x \leq 4x - 3$ **c)** $3x + 4 > 3x + 2$ **d)** $-x^2 + 5x - 4 > 0$

4 Modellieren von Wachstums- und Abklingvorgängen

In einem Waldstück wird der derzeitige Holzbestand auf 4000 Festmeter geschätzt.
Ein Festmeter ist $1\,m^3$ feste Holzmasse (ohne Zwischenräume). Der Holzzuwachs beträgt voraussichtlich in den nächsten 50 Jahren jährlich etwa 2% des Bestands. Modellieren Sie die zeitliche Entwicklung des Holzbestands als Exponentialfunktion der Form $H: t \mapsto b \cdot a^t$ ($H(t)$ in Festmetern, t in Jahren). Zeigen Sie, dass die Funktion H zu $t \mapsto b \cdot e^{kt}$ mit $k = \ln(a)$ umgeformt werden kann.
Welche der beiden Darstellungsformen ist zur Bestimmung der Wachstumsgeschwindigkeit besser geeignet?



Viele Wachstums- und Abklingvorgänge lassen sich mithilfe von Exponentialfunktionen modellieren.

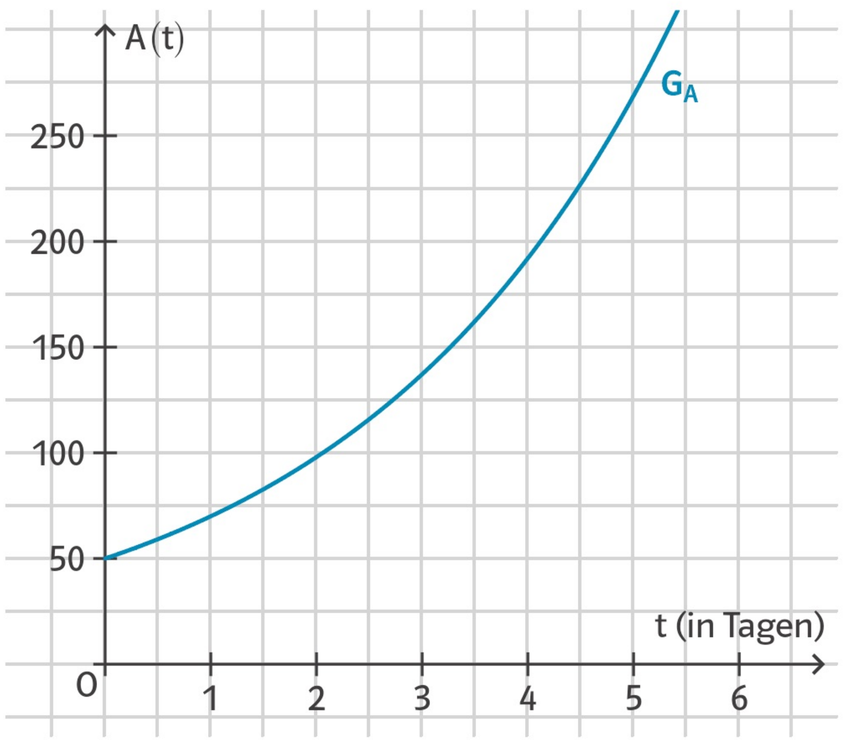
Wenn sich ein Bestand pro Zeiteinheit um denselben Faktor a ändert, spricht man von **exponentiellem Wachstum**, denn die Abhängigkeit des Bestands von der Zeit t wird in diesem Fall mit einer Exponentialfunktion $f: t \mapsto b \cdot a^t$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$ modelliert. Dabei bezeichnet man $b = f(0)$ als **Anfangsbestand** und a als **Wachstumsfaktor**.

Beispielsweise kann zu Beginn einer Epidemie die Anzahl $A(t)$ der Infizierten exponentiell in Abhängigkeit von der Zeit t (in Tagen) wie folgt wachsen:

t	0	1	2	3	4	5
A(t)	50	70	98	137	192	269

·1,4 ·1,4 ·1,4 ·1,4 ·1,4

Der Anfangsbestand beträgt in diesem Beispiel 50 und der Wachstumsfaktor 1,4, d.h., die Anzahl an Infizierten kann durch folgende Funktion modelliert werden:
$A: t \mapsto 50 \cdot 1{,}4^t$.



Zur Erinnerung:
Für den Wachstumsfaktor gilt $a = \frac{f(t+1)}{f(t)}$.

Die momentane Änderungsrate nennt man bei Wachstumsvorgängen oft auch **Wachstumsgeschwindigkeit**. Um sie zu bestimmen, muss man die Wachstumsfunktion ableiten. Bei der Exponentialfunktion $f: t \mapsto b \cdot a^t$ gelingt dies, indem man sie zu einer Exponentialfunktion mit Basis e umformt. Setzt man $a = e^{\ln(a)}$, erhält man $f(t) = b \cdot a^t = b \cdot \left(e^{\ln(a)}\right)^t = b \cdot e^{\ln(a) \cdot t}$. Für das Beispiel von oben ergibt sich damit $A(t) = 50 \cdot 1{,}4^t = 50 \cdot e^{\ln(1{,}4) \cdot t}$.

Zur Erinnerung:
Die momentane oder lokale Änderungsrate von f an der Stelle x_0 ist $f'(x_0)$.

Nun lässt sich die Ableitungsfunktion mithilfe der Ableitungsregeln bestimmen:
$f'(t) = b \cdot \ln(a) \cdot e^{\ln(a) \cdot t}$ bzw. für das Beispiel $A'(t) = 50 \cdot \ln(1{,}4) \cdot e^{\ln(1{,}4) \cdot t} \approx 17 \cdot e^{0{,}34 \cdot t}$.
Damit lässt sich die Wachstumsgeschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t berechnen. Zum Beispiel nimmt die Anzahl der Infizierten zu Beginn der Epidemie $(t = 0)$ um ca. 17 Infizierte pro Tag zu und nach drei Tagen $(t = 3)$ um ca. 46 Infizierte pro Tag.

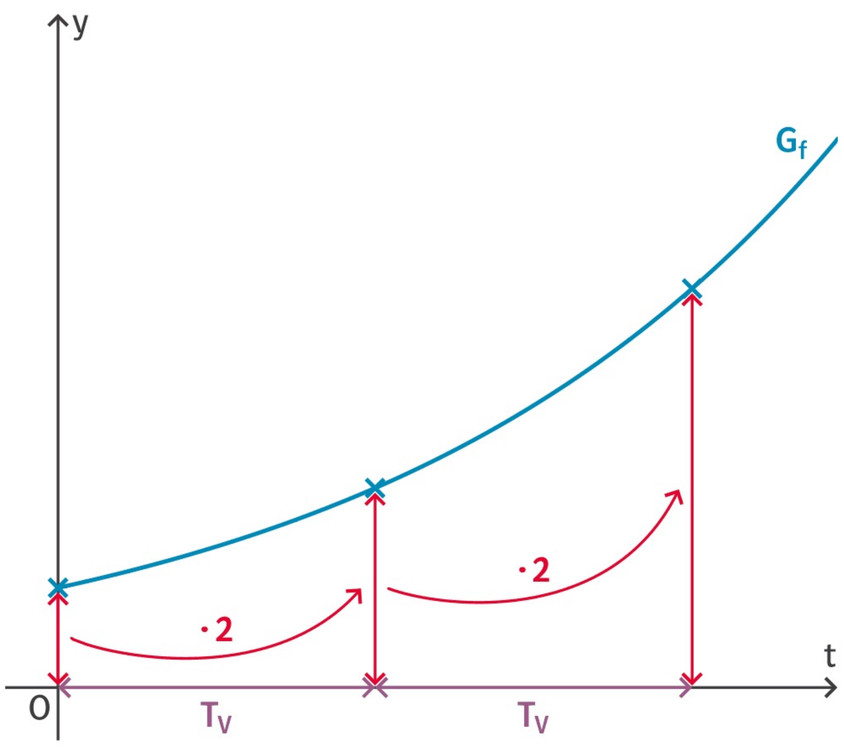
Exponentielles Wachstum wird mithilfe der Wachstumsfunktion $f: t \mapsto b \cdot a^t$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$ mit **Wachstumsfaktor** a und **Anfangsbestand** $b = f(0)$ modelliert. Sie kann in der Form $f: t \mapsto b \cdot e^{\ln(a) \cdot t}$ dargestellt werden.
Die dazugehörige Ableitungsfunktion f' mit $f'(t) = b \cdot \ln(a) \cdot e^{\ln(a) \cdot t}$ gibt die **Wachstumsgeschwindigkeit** zum Zeitpunkt t an.

Bemerkung:
Wegen $f'(t) = b \cdot \ln(a) \cdot e^{\ln(a) \cdot t} = \ln(a) \cdot f(t)$ gilt insbesondere $(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$.

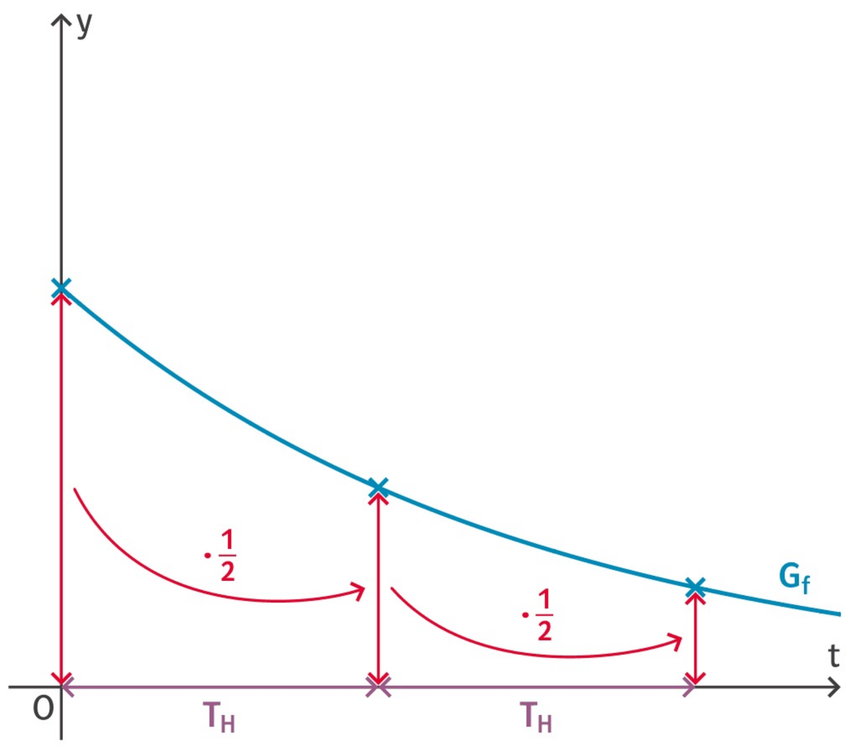
Auf Seite 36 wurde für die Funktion $f: x \mapsto a^x$ die folgende Beziehung hergeleitet:
$f'(x) = c_a \cdot f(x)$ mit
$c_a = f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$.
Der Wert dieses Faktors ist nun bekannt:
$c_a = \lim\limits_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln(a)$.

Mit $k = \ln(a)$ lässt sich die Wachstumsfunktion wie folgt schreiben: $f: t \mapsto b \cdot a^t = b \cdot e^{kt}$.
Setzt man einen positiven Anfangsbestand voraus (d.h. $b > 0$), nimmt die Wachstumsfunktion f für $k > 0$ bzw. $a > 1$ streng monoton zu. Man spricht in diesem Fall von einem (positiven) Wachstum.
Für $k < 0$ bzw. $0 < a < 1$ nimmt f dagegen streng monoton ab; in diesem Fall spricht man von einem negativen Wachstum, von einer exponentiellen Abnahme oder von einem (exponentiellen) Abklingen.

Man nennt die Zeit, in der sich der Bestand bei positivem Wachstum verdoppelt, **Verdopplungszeit** T_V und die Zeit, in der sich der Bestand bei negativem Wachstum halbiert, **Halbwertszeit** T_H.
Bei exponentiellem Wachstum sind diese Zeiten unabhängig vom Anfangsbestand, d.h., der Bestand verdoppelt bzw. halbiert sich bei gegebenem k stets in dieser Zeitspanne.



Für die Verdopplungszeit T_V gilt:
$f(T_V) = b \cdot e^{k \cdot T_V} = 2b$
$\Leftrightarrow e^{k \cdot T_V} = 2 \Leftrightarrow k \cdot T_V = \ln(2)$
$\Leftrightarrow T_V = \frac{\ln(2)}{k}$.



Für die Halbwertszeit T_H gilt:
$f(T_H) = b \cdot e^{k \cdot T_H} = \frac{1}{2}b$
$\Leftrightarrow e^{k \cdot T_H} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k \cdot T_H = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$
$\Leftrightarrow T_H = -\frac{\ln(2)}{k}$.

Im Ausgangsbeispiel gilt $T_V = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}4)} \approx 2{,}1$, d.h., die Zeit, in der sich die Anzahl $A(t)$ der Infizierten während der Phase des exponentiellen Wachstums jeweils verdoppelt, beträgt ca. 2,1 Tage.

Wird ein exponentielles Wachstum mithilfe der Funktion $f: t \mapsto b \cdot e^{kt}$ modelliert, so erhält man
für $k > 0$ (positives Wachstum) die **Verdopplungszeit** $T_V = \frac{\ln(2)}{k}$ bzw.
für $k < 0$ (negatives Wachstum) die **Halbwertszeit** $T_H = -\frac{\ln(2)}{k}$.

Beispiel 1

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = b \cdot a^x$ verläuft durch die Punkte $A(1|160)$ und $B(2|128)$.

a) Geben Sie an, ob f ein positives oder ein negatives Wachstum beschreibt. Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Bestimmen Sie den Anfangsbestand und den Wachstumsfaktor.

c) Stellen Sie $f(x)$ in der Form $b \cdot e^{kx}$ dar und bestimmen Sie einen Term der Ableitung von f.

Lösung

a) Die Funktion f beschreibt ein negatives Wachstum, da $f(2) < f(1)$ gilt.

b) $f(1) = 160$: (I) $b \cdot a = 160 \Rightarrow b = \frac{160}{a}$

$f(2) = 128$: (II) $b \cdot a^2 = 128$

(I) in (II): $\frac{160}{a} \cdot a^2 = 128 \Leftrightarrow 160\,a = 128 \Leftrightarrow a = 0{,}8$; in (I): $b = 200$.

Der Anfangsbestand ist 200 und der Wachstumsfaktor beträgt 0,8.

Damit ist $f(x) = 200 \cdot 0{,}8^x$.

c) $f(x) = 200 \cdot e^{\ln(0{,}8) \cdot x}$; $f'(x) = 200 \cdot \ln(0{,}8) \cdot e^{\ln(0{,}8) \cdot x}$

Beispiel 2

Zu diagnostischen Zwecken wurde näherungsweise die Anzahl der Bakterien in einer Nährlösung bestimmt.

Zeit t (in s)	0	30	60	90	120
Bakterienanzahl	$8{,}0 \cdot 10^3$	$9{,}1 \cdot 10^3$	$10{,}4 \cdot 10^3$	$11{,}9 \cdot 10^3$	$13{,}6 \cdot 10^3$

a) Begründen Sie, dass aufgrund der Messwerte eine Exponentialfunktion geeignet erscheint, um damit die Zunahme der Bakterienanzahl zu modellieren.

b) Geben Sie den jeweiligen Wachstumsfaktor an, wenn die Zunahme der Bakterienanzahl pro Minute bzw. pro Sekunde modelliert werden soll. Geben Sie zudem an, um wie viel Prozent die Bakterienanzahl pro Minute bzw. pro Sekunde ansteigt.

c) Geben Sie einen Term einer natürlichen Exponentialfunktion an, die das Wachstum der Bakterienanzahl in Abhängigkeit von der Zeit t in Sekunden beschreibt.

d) Bestimmen Sie die Funktion der Wachstumsgeschwindigkeit (pro Sekunde) und ermitteln Sie die Wachstumsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 90$.

e) Berechnen Sie die Verdopplungszeit.

Lösung

a) Die Werte der Quotienten $\frac{f(t+30)}{f(t)}$ der Bakterienanzahlen aus jeweils aufeinanderfolgenden Zeitschritten betragen alle ca. 1,14 und sind damit konstant. Dies deutet auf ein exponentielles Wachstum hin.

b) Bei einer Modellierung pro Minute gilt $a = \frac{f(t+60)}{f(t)} \approx 1{,}3$.

Bei einer Modellierung pro Sekunde gilt $a \approx \sqrt[60]{1{,}3} \approx 1{,}0044$.

Das heißt, die Bakterienanzahl steigt pro Minute um etwa 30 % und pro Sekunde um etwa 0,44 %.

c) $f(t) = 8000 \cdot e^{kt}$; $k = \ln(a) \approx \ln\left(\sqrt[60]{1{,}3}\right) \approx 0{,}00437 \Rightarrow f(t) \approx 8000 \cdot e^{0{,}00437 \cdot t}$

d) $f': t \mapsto 8000 \cdot k \cdot e^{kt} \approx 35 \cdot e^{0{,}00437 \cdot t}$. Es ist $f'(90) \approx 52$, d.h., die Bakterienanzahl wächst zum Zeitpunkt $t = 90$ mit einer Geschwindigkeit von ca. 52 Bakterien pro Sekunde.

e) $T_V = \frac{\ln(2)}{k} \approx \frac{\ln(2)}{0{,}00437} \approx 159$, d.h., ca. alle 159 Sekunden verdoppelt sich die Bakterienanzahl.

Beispiel 3

Das Edelgas Radon-220 ist radioaktiv, d.h., Radon-220-Kerne sind nicht stabil, sondern zerfallen im Laufe der Zeit zu anderen Atomkernen. Der Bestand an Radon-220-Atomen nimmt dabei exponentiell ab. Messungen ergeben, dass die Halbwertszeit von Radon-220 etwa 55,6 s beträgt.

a) Im Wohnraum eines Hauses befinden sich $4{,}0 \cdot 10^5$ Radon-220-Atome. Geben Sie eine Exponentialfunktion an, die die Anzahl N dieser Radon-Atome in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) beschreibt.

b) Berechnen Sie, nach welcher Zeit 90 % der anfänglichen Radon-Atome zerfallen sind.

c) Bestimmen Sie die Funktion der Wachstumsgeschwindigkeit für die Anzahl der gegebenen Radon-Atome und berechnen Sie die Wachstumsgeschwindigkeit zu Beginn und nach einer Minute. Beschreiben Sie die Werte im Sachzusammenhang.

Man nennt den Betrag der (negativen) Wachstumsgeschwindigkeit eines Bestands radioaktiver Kerne Aktivität; sie hat die Einheit Becquerel $\left(1\,\text{Bq} = \frac{1}{\text{s}}\right)$.

Lösung

a) $N\colon t \mapsto 4{,}0 \cdot 10^5 \cdot e^{kt}$

$T_H = -\frac{\ln(2)}{k} \Rightarrow k = -\frac{\ln(2)}{T_H} = -\frac{\ln(2)}{55{,}6} \approx -0{,}0125 \Rightarrow N\colon t \mapsto 4{,}0 \cdot 10^5 \cdot e^{-0{,}0125 \cdot t}$

b) Wenn 90 % der anfänglich $4{,}0 \cdot 10^5$ Radon-Atome zerfallen sind, sind noch 10 %, also $4{,}0 \cdot 10^4$ Radon-Atome, übrig: $N(t) = 4{,}0 \cdot 10^4 \Leftrightarrow 4{,}0 \cdot 10^5 \cdot e^{-0{,}0125 \cdot t} \approx 4{,}0 \cdot 10^4 \Leftrightarrow e^{-0{,}0125 \cdot t} \approx 0{,}1$

$\Leftrightarrow t \approx \frac{\ln(0{,}1)}{-0{,}0125} \approx 184$

Nach ca. 184 Sekunden sind 90 % der anfänglichen Radon-Atome zerfallen.

c) $N'\colon t \mapsto 4{,}0 \cdot 10^5 \cdot (-0{,}0125) \cdot e^{-0{,}0125 \cdot t} = -5{,}0 \cdot 10^3 \cdot e^{-0{,}0125 \cdot t}$

$N'(0) \approx -5{,}0 \cdot 10^3$; $N'(60) \approx -5{,}0 \cdot 10^3 \cdot e^{-0{,}75} \approx -2{,}4 \cdot 10^3$

Zu Beginn zerfallen ca. 5000 Radon-Atome pro Sekunde, nach einer Minute zerfallen ca. 2400 Radon-Atome pro Sekunde.

Aufgaben

1 Ein Bestand wird durch exponentielles Wachstum beschrieben. Geben Sie den Anfangsbestand an und beurteilen Sie, ob es sich um eine Zunahme oder eine Abnahme handelt.

a) $f(t) = 0{,}8 \cdot e^{2t}$ **b)** $f(t) = 5 \cdot e^{-0{,}99t}$ **c)** $f(t) = e^{-\frac{1}{3}t} \cdot 5$ **d)** $f(t) = 29 \cdot e^{0{,}02t}$

2 Ein Bestand wächst exponentiell. Die Funktion f beschreibt das Wachstum. Gegeben sind der Anfangsbestand $f(0)$ und der Bestand $f(1)$ nach einem Jahr. Bestimmen Sie einen Funktionsterm $f(t)$ in der Form $f(t) = b \cdot e^{kt}$.

a) $f(0) = 8,\ f(1) = 12$ **b)** $f(0) = 37,\ f(1) = 46{,}5$ **c)** $f(0) = 750,\ f(1) = 723$

→ Strategie | Seite 259 Aufstellen und Lösen eines Gleichungssystems

3 Begründen Sie, dass die Messreihe durch ein exponentielles Wachstum beschrieben werden kann. Bestimmen Sie mithilfe des ersten und letzten Wertepaares eine geeignete Exponentialfunktion mit Basis e.

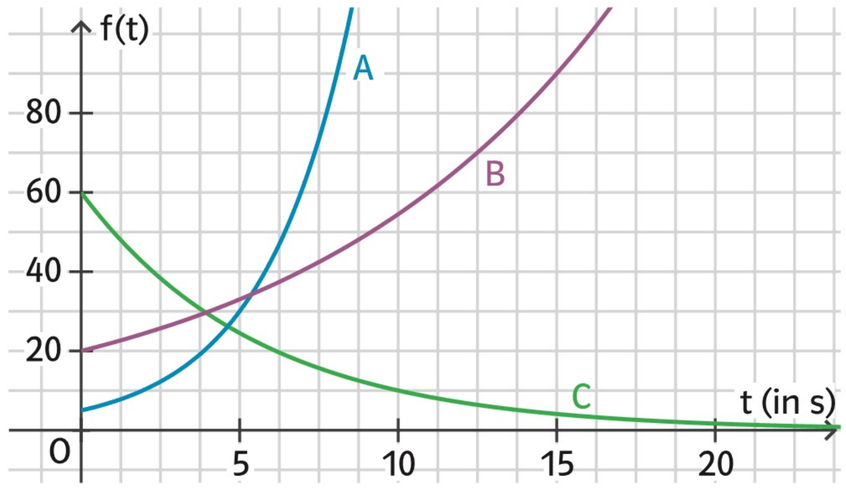
a)

t (in s)	0	1	2	3	4	5
f(t)	28	35	44	55	69	87

b)

t (in s)	0	2	4	6	8	10
f(t)	9,1	8,2	7,4	6,7	6,0	5,4

4 In der Abbildung sind drei Graphen zu exponentiellem Wachstum dargestellt. Geben Sie jeweils einen zugehörigen Funktionsterm $f(t)$ der Form $f(t) = f(0) \cdot e^{kt}$ an. Beschreiben und diskutieren Sie Ihr Vorgehen.



→ Strategie | Seite 259 Aufstellen und Lösen einer Gleichung

5 Bestimmen Sie die Halbwerts- bzw. die Verdopplungszeit für den Bestand $f(t)$ (t in s).

a) $f(t) = 17 \cdot e^{0{,}3t}$ **b)** $f(t) = 50 \cdot e^{-0{,}25t}$

c) $f(t) = 56 \cdot e^{-0{,}001t}$ **d)** $f(t) = 506 \cdot e^{\ln(4) \cdot t}$

→ Strategie | Seite 259 Aufstellen und Lösen einer Gleichung

6 Marcel sagt, die Anzahl der von einem Virus Infizierten wachse exponentiell. Zu Beobachtungsbeginn gibt es 100 Infizierte, nach fünf Tagen 150 Infizierte und nach zehn Tagen 200 Infizierte. Beurteilen und diskutieren Sie Marcels Aussage.

7 Geben Sie $f(t)$ in der Form $f(t) = f(0) \cdot e^{kt}$ (t in s) an. Bestimmen Sie die Verdopplungs- bzw. Halbwertszeit. Bestimmen Sie die prozentuale Zu- bzw. Abnahme pro Sekunde.

a) $f(t) = 12 \cdot 2{,}5^t$ **b)** $f(t) = 1{,}3 \cdot 0{,}8^t$ **c)** $f(t) = 0{,}9 \cdot 1{,}2^{3t}$

8 **Abiturprüfung 2011 (Bayern), Analysis, Aufgabengruppe I, Teil 1, Aufgabe 3**
Die Anzahl der auf der Erde lebenden Menschen wuchs von 6,1 Milliarden zu Beginn des Jahres 2000 auf 6,9 Milliarden zu Beginn des Jahres 2010. Dieses Wachstum lässt sich näherungsweise durch eine Exponentialfunktion mit einem Term der Form $N(x) = N_0 \cdot e^{k \cdot (x - 2000)}$ beschreiben, wobei $N(x)$ die Anzahl der Menschen zu Beginn des Jahres x ist. Bestimmen Sie N_0 und k.

→ Strategie | Seite 259
Aufstellen und Lösen eines Gleichungssystems

Test 1

→ Lösungen | Seite 276

9 Gegeben ist folgende Messreihe:

t (in s)	10	20	30	40	50
f(t)	104	269	698	1810	4696

a) Begründen Sie, dass die Messreihe durch ein exponentielles Wachstum beschrieben werden kann.
b) Bestimmen Sie mithilfe des ersten und letzten Wertepaares eine geeignete Exponentialfunktion mit Basis e.
c) Berechnen Sie die Verdopplungszeit.

10 Die Funktion f mit $f(t) = 140 \cdot 1{,}02^t$ (t in Jahren) modelliert das Wachstum eines Bestands.
a) Geben Sie den Anfangsbestand an.
b) Entscheiden Sie, ob es sich um eine Zu- oder eine Abnahme handelt.
c) Geben Sie einen Term der Funktion f mit Basis e an.
d) Bestimmen Sie die Verdopplungs- bzw. Halbwertszeit.

11 Bei dem Reaktorunfall in Tschernobyl am 26. April 1986 wurde u.a. radioaktives Cäsium-137 freigesetzt. Cäsium-137 zerfällt exponentiell mit einer Halbwertszeit von ca. 30 Jahren. Über der damaligen Bundesrepublik Deutschland hatten sich nach Angaben der Gesellschaft für Strahlen- und Umweltforschung etwa 230 Gramm radioaktives Cäsium-137 abgelagert, ein Großteil davon in Bayern.
a) Beschreiben Sie den Zerfall dieser Menge Cäsium-137 durch eine Funktion $f: t \mapsto b \cdot e^{kt}$ (t in Jahren und f(t) in Gramm).
b) Geben Sie die Bedeutung des Faktors b im Sachzusammenhang an und berechnen Sie den prozentualen Anteil, um den die Masse des Cäsium-137 jedes Jahr abnimmt.
c) Berechnen Sie, nach welcher Zeit weniger als ein Gramm des Cäsium-137 übrig ist.
d) Bestimmen Sie die Funktion der Wachstumsgeschwindigkeit für die gegebene Menge Cäsium-137. Berechnen Sie die Wachstumsgeschwindigkeit zu Beginn und zum heutigen Zeitpunkt. Beschreiben Sie die Werte im Sachzusammenhang.

12 Zu Beginn leben in einem Biotop 200 Kröten und 500 Molche. Die Anzahl der Kröten nimmt jährlich um 2,3 % zu, die Anzahl der Molche sinkt jährlich um 3,4 %.
a) Modellieren Sie die Zunahme der Kröten als Funktion $f_1: t \mapsto b_1 \cdot e^{k_1 t}$ und die Abnahme der Molche als Funktion $f_2: t \mapsto b_2 \cdot e^{k_2 t}$ (t jeweils in Jahren).
b) Berechnen Sie die Verdopplungs- bzw. Halbwertszeit.
c) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem man 250 Kröten in dem Biotop erwartet.
d) Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren die Anzahl der Molche auf 70 % des Anfangsbestands gesunken ist.
e) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem etwa genauso viele Kröten wie Molche im Biotop leben.
f) Bestimmen Sie jeweils die Funktion der Wachstumsgeschwindigkeit der Anzahl der Kröten bzw. der Anzahl der Molche pro Jahr.
g) Bestimmen Sie die Wachstumsgeschwindigkeit für beide Tierarten zu Beginn und nach 20 Jahren und beschreiben Sie die Werte im Sachzusammenhang.
h) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit einer geeigneten Mathematiksoftware.

→ Strategie | Seite 259
Aufstellen und Lösen einer Gleichung

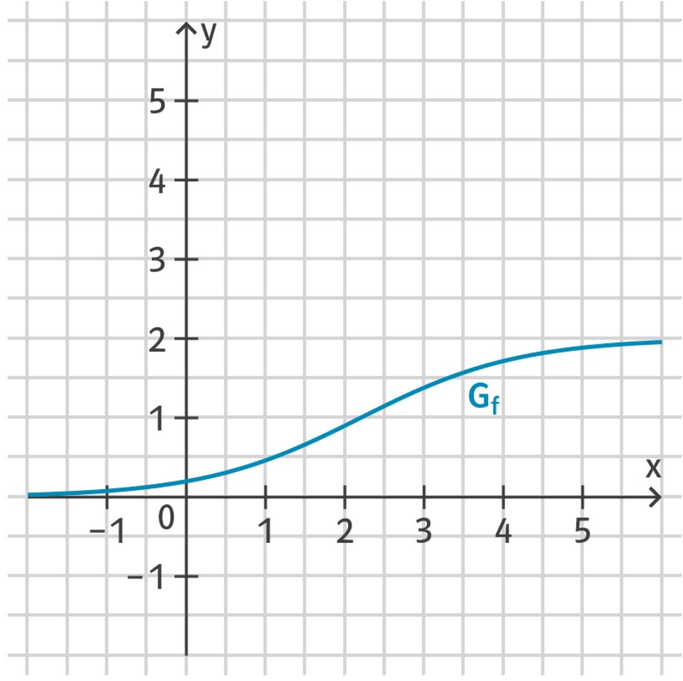
13 Die Anzahl an Zuschauern, die pro Minute in ein Stadion strömen, wird durch die Funktion z mit $z(t) = 100 \cdot (10 - t) \cdot e^{kt}$ modelliert (t in Minuten, $-120 \leq t \leq 10$). Der Spielbeginn ist bei $t = 0$; $t = -30$ bedeutet 30 Minuten vor Spielbeginn.

a) Bestimmen Sie den Wert von k, wenn die meisten Zuschauer 10 min vor Spielbeginn kommen.

b) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem für $k = 0{,}05$ die Anzahl der Zuschauer, die pro Minute ins Stadion kommen, am stärksten zunimmt.

14 **Abiturprüfung 2012 (Bayern), Analysis, Aufgabengruppe I, Teil 2, daraus Teilaufgaben 2a), b) und c)**

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{2e^x}{e^x + 9}$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f.



[…] Das Wachstum von Sonnenblumen der Sorte Alba lässt sich modellhaft mithilfe der Funktion f beschreiben. Beginnt man die Beobachtung zwei Wochen nach der Auskeimung einer Sonnenblume dieser Sorte, so liefert $f(x)$ für $x \in [0; 4]$ im Modell die Höhe der Blume in Metern. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Monaten. […]

a) Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells, um wie viele Zentimeter eine Sonnenblume innerhalb der ersten zwei Monate nach Beobachtungsbeginn wächst.

b) Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells, wie viele Monate nach Beobachtungsbeginn eine Sonnenblume eine Höhe von 1,5 Metern erreicht. Beschreiben Sie, wie man den berechneten Wert graphisch überprüfen kann.

c) Im Modell gibt es einen Zeitpunkt x_M, zu dem die Blumen am schnellsten wachsen. Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für x_M. Ermitteln Sie anschließend einen Näherungswert für die maximale Wachstumsrate in Zentimetern pro Tag.

Hinweis zu Aufgabe 14c): Übertragen Sie zunächst die Abbildung in Ihr Heft und zeichnen Sie in dieser Zeichnung die Tangente ein.

Test 2

→ Lösungen | Seite 276

15 Die Temperatur von Kaffee in einer Tasse wird durch eine Funktion T mit $T(t) = 20 + 70 \cdot e^{-kt}$ modelliert ($k > 0$, t in Minuten, $t \geq 0$, $T(t)$ in °C).

a) Geben Sie die Kaffeetemperatur zu Beginn und die Raumtemperatur an.

b) Bestimmen Sie den Wert von k, wenn der Kaffee nach einer halben Stunde 35,6 °C warm ist.

c) Berechnen Sie den Zeitpunkt, bei dem für $k = 0{,}05$ die momentane Änderungsrate der Temperatur $-1\frac{°C}{min}$ beträgt.

16 Die Anzahl von Karpfen in einem Teich wird modellhaft durch die Funktion f mit $f(t) = 100 - 80 \cdot e^{-0{,}1t}$ beschrieben (t in Wochen seit Beobachtungsbeginn).

a) Begründen Sie, dass die Karpfenanzahl nie abnimmt.

b) Begründen Sie, dass die Karpfenanzahl nicht über 100 Karpfen hinauswachsen wird.

c) Begründen Sie, dass man langfristig mit $S = 100$ Karpfen zu rechnen hat.

d) Zeigen Sie, dass für die Funktion f die Gleichung $f'(t) = 0{,}1 \cdot (S - f(t))$ für $S = 100$ für alle t gilt.

17 Das Wachstum eines Bestands wird durch die Funktion f mit $f(t) = 100 - 80 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}$ ($t \geq 0$; t in Stunden) modelliert. Bestimmen Sie die Zeitpunkte t, für die es einen Zeitraum T_V gibt, in dem sich der Bestand $f(t)$ verdoppelt. Bestimmen Sie die minimale Verdopplungszeit T_V.

Grundwissen Test

→ Lösungen | Seite 276

G 18 Es werden fünf Würfel gleichzeitig geworfen. Formulieren Sie ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem angegebenen Term berechnet werden kann.

→ Strategie | Seite 258
Betrachten von etwas Gegenteiligem

a) $\left(\frac{5}{6}\right)^5$ **b)** $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5$ **c)** $5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$ **d)** $\left(\frac{5}{6}\right)^5 + 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$

Wiederholen

1 Bestimmen Sie einen Term der Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = e^{5x}$ **b)** $f(x) = e^{-bx}$ **c)** $f(x) = 2 \cdot e^{6x-4}$ **d)** $f(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{3-12x}$

e) $f(x) = e^{ax^2}$ **f)** $f(x) = e^x - e^{-x}$ **g)** $f(x) = e^{2x} - 7x^3$ **h)** $f(x) = x^3 - e^{-x^2}$

i) $f(x) = e^{5x^3-2}$ **j)** $f(x) = e^x + \frac{1}{e^{cx}}$ **k)** $f(x) = d \cdot e^{\sin(x)}$ **l)** $f(x) = \sqrt{e^{3x}} + x$

m) $f(x) = 5x e^x$ **n)** $f(x) = e^{3x} \cdot (2x^2 - 1)$ **o)** $f(x) = (-x + 3) \cdot e^{-x}$ **p)** $f(x) = \cos(x) \cdot e^{2x}$

2 Ordnen Sie die Stammfunktionen ihren Funktionen zu.

$F_D(x) = x \cdot e^x$

$F_B(x) = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$

$f_1(x) = (x^2 - 2) \cdot e^x$

$f_3(x) = x^2 e^x$

$F_C(x) = (x^2 - 2x) \cdot e^x$

$F_A(x) = (x - 1) \cdot e^x$

$f_2(x) = x \cdot e^x$

$F_E(x) = (x - 2) \cdot e^x + 1$

$f_5(x) = (x - 1) \cdot e^x$

$f_4(x) = (x + 1) \cdot e^x$

3 Vereinfachen Sie.

a) $\ln(e^2)$ **b)** $\ln(e^{-4}) + 3$ **c)** $3 \cdot \ln\left(\frac{1}{e^b}\right)$

d) $\frac{1}{r} \cdot e^{\ln(r)}$ **e)** $4 \cdot e^{\ln(x+1)}$ **f)** $e^{3 \cdot \ln(2)} - e^{2 \cdot \ln(3)}$

g) $4 \cdot \ln\left(\sqrt{e}\right)$ **h)** $\ln\left(\frac{\sqrt{e}}{e^2}\right) + 1{,}5$ **i)** $e^{\ln(3u)} \cdot \frac{1}{3}$

4 Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung.

a) $e^{2x} = 9$ **b)** $5 \cdot e^{3-7x} - 4 = 16$ **c)** $\frac{2x-4}{e^x} = 0$

d) $4 \cdot e^x - e^{2x} = 0$ **e)** $(e^{3x} - 27) \cdot (x^3 + 27) = 0$ **f)** $e^x \cdot x + e^x \cdot 2 = 0$

g) $7e^x - \frac{1}{2}e^{2x} = 0$ **h)** $e \cdot e^{x+2} - e^{2x} = 0$ **i)** $e^x - 2 = \frac{15}{e^x}$

5 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

a) $f(x) = e^{3x-1} - 3$ **b)** $f(x) = e^{-x} - xe^{-x}$ **c)** $f(x) = 2e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$

d) $f(x) = (x - 3) \cdot e^x + 2e^x$ **e)** $f(x) = -xe^{x+1} - 3e^x$ **f)** $f(x) = e^{-0{,}25x} - 3e^{-\frac{1}{2}x}$

6 Bestimmen Sie Lage und Art der Extremstellen von f.

a) $f(x) = e^{3x} - 2x$ **b)** $f(x) = (x^2 - 8)e^x$ **c)** $f(x) = \frac{1}{x} \cdot e^{x^2}$

7 Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangente und der Normalen an den Graphen von f im Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.

a) $f: x \mapsto 2e^x + x^2 - 1;\ x_0 = 0$ **b)** $f: x \mapsto e^x - x;\ x_0 = -1$

Vertiefen

8 Gegeben sind die Funktion f mit $f(x) = (-x - 2) \cdot e^{-x}$ und ihr Graph G_f.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Tiefpunktes und des Wendepunktes von G_f.

b) Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an G_f im Punkt $P(1 \mid f(1))$.

d) Bestimmen Sie eine Gleichung der Normalen an G_f im Schnittpunkt mit der x-Achse.

e) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente vom Punkt $A(2 \mid 0)$ an G_f.

9 Der Graph G_f der Funktion f mit $f(x) = 3x \cdot e^{-2x}$ hat genau einen Wendepunkt.

a) Geben Sie das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$ an.

b) Zeigen Sie, dass $y = \frac{3}{e^2} \cdot (-x + 2)$ eine Gleichung der Wendetangente ist.

c) Bestimmen Sie die Größe des Steigungswinkels von G_f im Ursprung.

10 Gegeben sind die Graphen G_f und G_g der Funktionen f und g mit $f(x) = e^{-x} - 1$ und $g(x) = -e^x + 1$.

a) Beschreiben Sie, wie G_f und G_g aus dem Graphen der natürlichen Exponentialfunktion entstehen, und skizzieren Sie G_f und G_g.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten aller Schnittpunkte von G_f und G_g.

c) Bestimmen Sie alle Stellen, an denen G_f und G_g dieselbe Steigung haben.

d) Begründen Sie, dass sich G_f und G_g im Ursprung berühren.

→ Strategie | Seite 259
Aufstellen und Lösen einer Gleichung

11 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f. Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

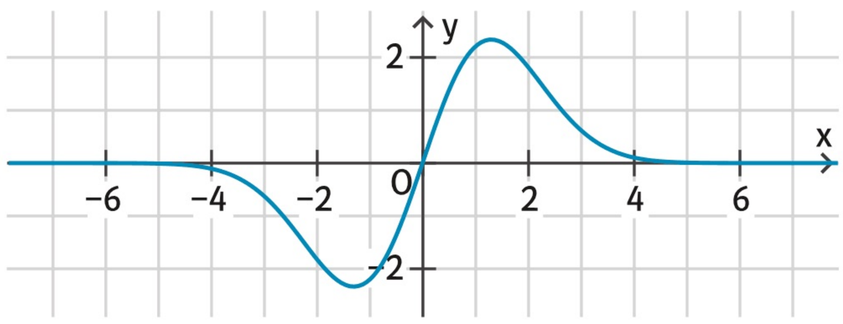
(1) f′ hat nur eine Nullstelle.

(2) f′ hat für $-4 < x < 4$ drei Extremstellen.

(3) f″ hat mindestens drei Nullstellen.

(4) Der Graph von f′ ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

(5) Es gilt $f'(f(1)) > 0$.



→ Strategie | Seite 256
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

12 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto e^{-x^2+1}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Untersuchen Sie G_f auf Symmetrie zur y-Achse bzw. zum Ursprung und ermitteln Sie das Verhalten von f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

b) Ermitteln Sie unter Verwendung der Symmetrie von G_f die Gleichungen der Tangenten an G_f in den Punkten $P_1(-1|f(-1))$ und $P_2(1|f(1))$ und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Tangenten an.

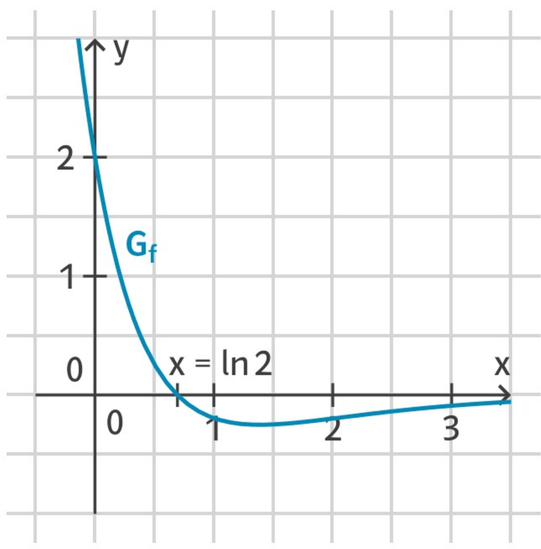
c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Extrempunktes von G_f. Begründen Sie ohne Verwendung der Ableitung, dass es sich dabei um einen Hochpunkt handeln muss.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von G_f.

e) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.

13 **Abiturprüfung 2017 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, daraus Teilaufgaben 1a) bis e)**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2e^{-x} \cdot (2e^{-x} - 1)$ und $x \in \mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f sowie die einzige Nullstelle $x = \ln 2$ von f.



a) Zeigen Sie, dass für den Term der Ableitungsfunktion f′ von f gilt: $f'(x) = 2e^{-x} \cdot (1 - 4e^{-x})$.

b) Bestimmen Sie rechnerisch Lage und Art des Extrempunkts von G_f.

(Teilergebnis: x-Koordinate des Extrempunkts: $\ln 4$)

Zusätzlich ist die Funktion F mit $F(x) = 2e^{-x} - 2e^{-2x}$ und $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

c) Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion von f ist, und begründen Sie anhand des Terms von F, dass $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$ gilt.

d) Der Graph von F verläuft durch den Punkt $(\ln 2 | 0{,}5)$. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass F keine größeren Werte als 0,5 annehmen kann und bei $x = \ln 4$ eine Wendestelle besitzt. Berechnen Sie die y-Koordinate des zugehörigen Wendepunkts.

e) Zeichnen Sie den Graphen von F unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse sowie des Funktionswerts $F(0)$ im Bereich $-0{,}3 \le x \le 3{,}5$ in die Abbildung ein.

Hinweis zu Aufgabe 13e): Übertragen Sie zunächst die Abbildung in Ihr Heft und ergänzen Sie in dieser Zeichnung den Graphen von F.

14 In einem Sumpf leben zu Beobachtungsbeginn 34 Alligatoren. Nach vier Jahren sind es 50 Alligatoren. Man nimmt an, dass der Bestand zunächst exponentiell wächst.

a) Bestimmen Sie eine Funktion $f: t \mapsto b \cdot e^{kt}$ (t in Jahren), die die Anzahl der Alligatoren in dem Sumpf modelliert.

b) Bestimmen Sie die Verdopplungszeit.

c) Berechnen Sie, wann mit 200 Alligatoren zu rechnen ist.

d) Ermitteln Sie die Wachstumsgeschwindigkeit zu Beginn und nach zehn Jahren.

→ Strategie | Seite 259 **Aufstellen und Lösen einer Gleichung**
Strategie | Seite 259 **Aufstellen und Lösen eines Gleichungssystems**

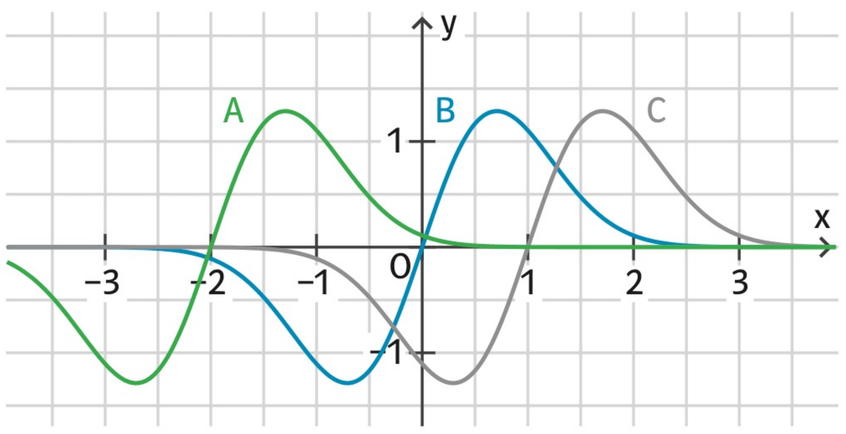
15 Der Pegel eines hochwasserführenden Bachlaufs lässt sich mithilfe der Funktion h mit $h(t) = 35 + 20t^2 \cdot e^{-\frac{t}{4}}$ beschreiben (t in Stunden seit Beginn des Hochwassers, $t \geq 0$, $h(t)$ in cm).

a) Berechnen Sie, wie lange das Wasser ansteigt und welcher Pegelstand dann erreicht wird.

b) Geben Sie die anfängliche Wasserhöhe und den Pegel nach 24 Stunden an.

c) Bestimmen Sie die Wasserhöhe nach dem Hochwasser auf lange Sicht.

16 Die Abbildung zeigt die Graphen von drei Funktionen.

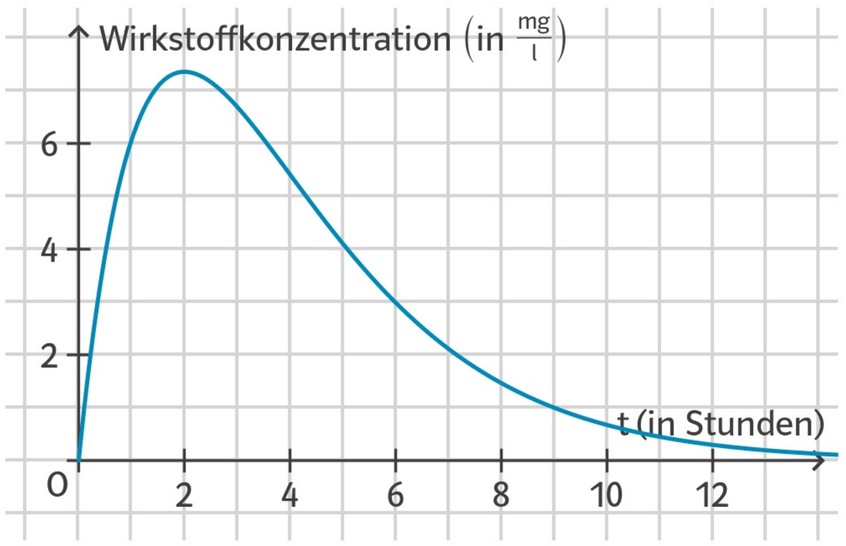


a) Ordnen Sie die Funktion f mit $f(x) = 3x \cdot e^{-x^2}$ einem der Graphen zu. Begründen Sie.

b) Geben Sie Terme für die in den beiden anderen Graphen dargestellten Funktionen an.

c) Die drei Graphen gehören zu einer Funktionenschar f_t. Geben Sie $f_t(x)$ an.

17 Die Wirkstoffkonzentrationen eines Medikaments im Blutserum von Patienten werden modellhaft beschrieben durch die Funktionenschar f_k mit $f_k(t) = 10t \cdot e^{-kt}$ $\left(k \in \mathbb{R}^+,\ t \text{ in Stunden nach der Medikamenteneinnahme, } f_k(t) \text{ in } \frac{mg}{l}\right)$.



a) Ermitteln Sie mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware unter Verwendung eines Schiebereglers den Wert von k für den dargestellten Verlauf.

b) Ermitteln Sie wie in Teilaufgabe a) die Werte von k, für die die Wirkstoffkonzentrationen maximal $10\frac{mg}{l}$ betragen. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis rechnerisch.

c) Ermitteln Sie in Abhängigkeit von k den Zeitpunkt, an dem die Wirkstoffkonzentrationen am stärksten abnehmen. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Zeitpunkt der maximalen Wirkstoffkonzentration.

d) Interpretieren Sie die Bedeutung des Parameters k im Sachzusammenhang.

18 Die Länge eines dunklen Tigerpythons (in m) wird beschrieben durch die Funktion l mit $l(t) = 3{,}5 - 3{,}1 \cdot e^{-kt}$ (t in Monaten nach dem Schlüpfen aus dem Ei).

a) Berechnen Sie die Länge der Schlange beim Schlüpfen.

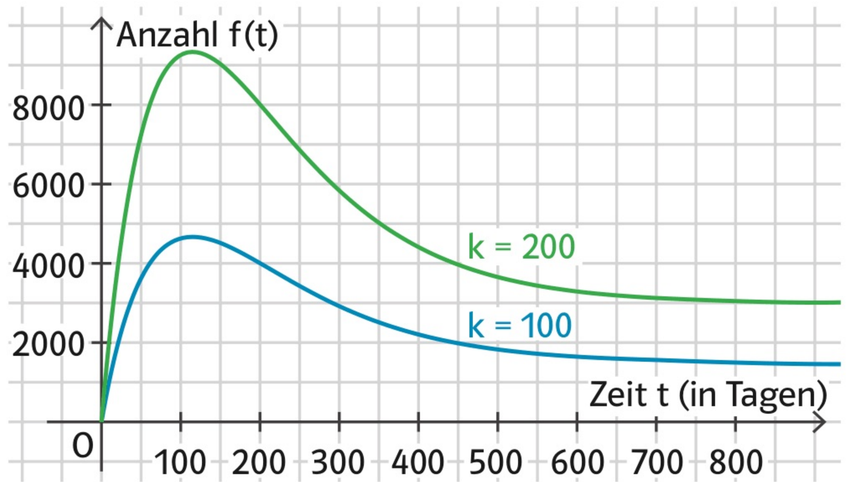
b) Bestimmen Sie den Wert von k, wenn die Schlange nach 16 Monaten 125 cm lang ist (Teilergebnis: $k \approx 0{,}02$).

c) Berechnen Sie, wann die Schlange 3 m lang ist.

d) Bestimmen Sie die Länge des ausgewachsenen Tigerpythons.

e) Formulieren Sie im Sachzusammenhang eine Fragestellung, die auf die Gleichung $l(t + 2) - l(t) = 0{,}03$ führt.

19 Eine Firma berechnet die täglichen Verkaufszahlen eines Smartphonemodells, das neu eingeführt wird, modellhaft mit der Funktionenschar f_k mit $f_k(t) = k \cdot (t - 15) \cdot e^{-0{,}01t} + 15k$ $(k > 0,\ t$ Anzahl der Tage seit Einführung des neuen Modells).



a) Langfristig müssen täglich mindestens 750 Smartphones verkauft werden. Bestimmen Sie die zugehörigen Werte von k.

b) Zeigen Sie, dass der Zeitpunkt, zu dem die Verkaufszahl maximal ist, unabhängig von k ist.

c) Zeigen Sie, dass die Verkaufszahlen ständig sinken, nachdem die maximale Verkaufszahl erreicht wurde.

d) Berechnen Sie, wann die Verkaufszahlen am stärksten sinken.

e) Einhundert Tage nach der Markteinführung eines Modells mit Parameter $k = 100$ wird ein neues Modell mit Parameter $k = 200$ eingeführt. Die Verkaufszahlen der beiden Modelle addieren sich. Bestimmen Sie nun die maximale tägliche und die langfristige Verkaufszahl.

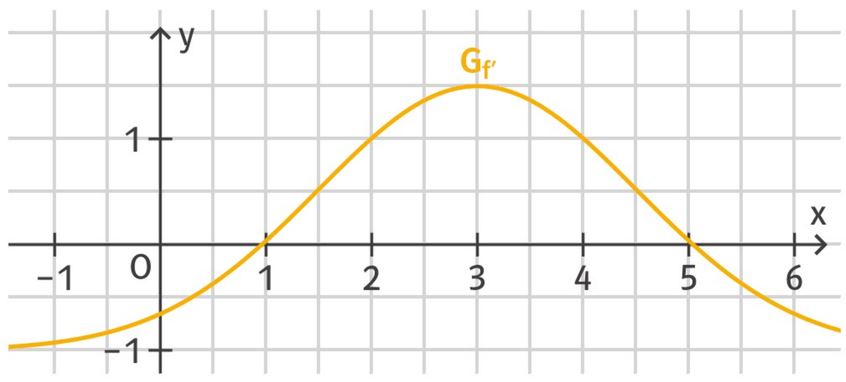
Vernetzen

20 Gegeben ist die natürliche Exponentialfunktion $f: x \mapsto e^x$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Den Graphen G_c einer Funktion f_c mit $f_c(x) = c \cdot f(x)$ $(c > 0)$ erhält man, indem man G_f mit dem Faktor c in y-Richtung streckt. Zeigen Sie, dass die Streckung mit dem Faktor c in y-Richtung einer Verschiebung in x-Richtung entspricht. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von c den Wert, um den G_c in x-Richtung verschoben wird.

b) Den Graphen G_d einer Funktion f_d mit $f_d(x) = f\left(\frac{1}{d} \cdot x\right)$ $(d > 0)$ erhält man, indem man G_f mit dem Faktor d in x-Richtung streckt. Zeigen Sie, dass die Streckung mit dem Faktor d in x-Richtung einem Wechsel der Basis entspricht. Bestimmen Sie diese Basis in Abhängigkeit von d.

21 In der Abbildung ist der Graph der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f dargestellt.



a) Geben Sie die Extremstellen von f an.

b) Geben Sie die Stellen an, an denen die Tangente an den Graphen von f einen Steigungswinkel der Größe 45° hat.

c) Die Funktion f' hat die Form $f'(x) = a \cdot e^{-b(x-c)^2} - d$. Bestimmen Sie die Werte von a, b, c und d.

d) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit einer dynamischen Mathematiksoftware.

22 Der Höhenverlauf eines Zeugenberges wird durch die Funktion h mit $h(x) = e^{a(b-x^2)}$ beschrieben ($h(x)$: Höhe des Berges gegenüber der Umgebung; x: Abstand von der Bergmitte (je in 100 m)).

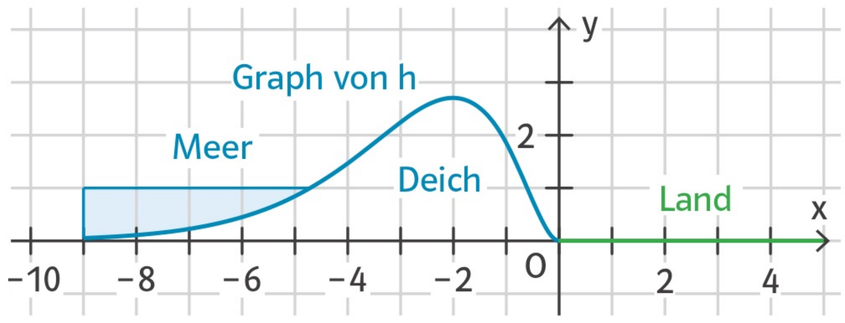
→ Strategie | Seite 256
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

a) Bestimmen Sie die Werte von a und b so, dass der Berg in 200 m Höhe den Durchmesser 200 m hat und in 100 m Höhe den Durchmesser 400 m.

b) Ermitteln Sie die Mindesthöhe eines Turms auf der Bergspitze, damit man von seiner Spitze aus den gesamten Berghang einsehen kann.

Ein Zeugenberg ist eine Unterform des Inselbergs, bei der durch Erosionsvorgänge ein Einzelberg von dem Gesteinsverband, dem er ursprünglich angehörte, isoliert wird.

23 Der Höhenverlauf eines Deiches wird durch die Funktion h mit $h(x) = 5x^2e^x$ beschrieben ($-9 \le x \le 0$, x und $h(x)$ in m).



a) Bestimmen Sie die Höhe des Deiches.

b) Berechnen Sie die steilsten Stellen auf der Meer- bzw. Landseite des Deiches.

c) Ermitteln Sie die Mindestaugenhöhe einer Person, die auf der Deichspitze stehend die gesamte Deichoberfläche einsehen kann.

Die natürliche Exponentialfunktion und ihre Basis e

Darstellung der Euler'schen Zahl e als Reihe

Im Lehrtext auf Seite 37 wurde die Euler'sche Zahl e über den Grenzwert $e = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ definiert, d.h., die Zahlenfolge $\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$, $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25$, $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \approx 2{,}37$, …, $\left(1 + \frac{1}{20}\right)^{20} \approx 2{,}65$ usw. nähert sich der Zahl e an. Diese Annäherung geschieht allerdings vergleichsweise langsam (vgl. Aufgabe 1).

Eine Möglichkeit, sich der Euler'schen Zahl e „schneller" zu nähern, erfolgt mithilfe einer sogenannten **Partialsummenfolge**. Addiert man jeweils die ersten Glieder einer Zahlenfolge a_0, a_1, a_2 …, so entsteht eine neue Folge, die man als Partialsummenfolge bezeichnet:

$s_0 = a_0$, $s_1 = a_0 + a_1$, $s_2 = a_0 + a_1 + a_2$ … Die Glieder s_n heißen **Partialsummen**.

Im Grenzfall $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ entsteht eine Summe mit unendlich vielen Summanden; eine solche Summe nennt man **Reihe**. Eine Reihe kann trotz unendlich vieler (positiver) Summanden einen endlichen Wert haben, wenn sich die Glieder der Folge a_0, a_1, a_2 … mit wachsender Nummer immer weiter der Zahl 0 annähern. Eine derartige Folge ist $a_0 = \frac{1}{0!} = 1$, $a_1 = \frac{1}{1!} = 1$, $a_2 = \frac{1}{2!} = 0{,}5$, $a_3 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$ …

Man erhält für die ersten Glieder der dazugehörigen Partialsummenfolge (s_n) näherungsweise die Werte:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
s_n	1	2	2,5	2,6667	2,708 33	2,716 67	2,718 06	2,718 25

Die Partialsummenfolge (s_n) nähert sich mit zunehmendem n der Euler'schen Zahl e an, d.h., es gilt $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = e$. Damit erhält man:

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Diese alternative Definition für die Euler'sche Zahl e hat den Vorteil, dass sich die hierbei verwendete Zahlenfolge wesentlich schneller dem Wert von e annähert als die Folge, die in der eingangs genannten Definition verwendet wurde (vgl. Tabelle). Algorithmen zur Berechnung sehr vieler Nachkommastellen der Zahl e basieren auf dieser Reihendarstellung.

Die natürliche Exponentialfunktion als Reihe und als Grenzwert

Ausgehend von der Reihendarstellung für die Euler'sche Zahl e lässt sich zeigen, dass sich auch jeder Funktionswert $f(x) = e^x$ der natürlichen Exponentialfunktion $f: x \mapsto e^x$ als Reihe darstellen lässt, der sogenannten **Exponentialreihe**:

$$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Mithilfe dieser Darstellung lässt sich nun auch erklären, warum e^x für $x \to +\infty$ „schneller" wächst als jede Potenz x^n $(n \in \mathbb{N})$: Ganz gleich, wie groß n gewählt wird, „stecken" in e^x mit Blick auf diese Reihendarstellung stets Potenzen mit größeren Exponenten als das gewählte n. Gemäß dieser Überlegung ist also im Bruch $\frac{x^n}{e^x}$ der Zählergrad stets kleiner als der Nennergrad, d.h., es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^n}{e^x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^n \cdot e^{-x}) = 0$ (vgl. Merkkasten auf Seite 42). Entsprechendes gilt für den Grenzwert $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^n \cdot e^x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^n}{e^{-x}}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{(-x)^n}{e^x}\right) = 0$. Genauso dominiert e^x gegenüber x^n in der Differenz $e^x - x^n$, sodass $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^n) = +\infty$ gilt.

Die natürliche Exponentialfunktion $f: x \mapsto e^x$ lässt sich aber nicht nur als Reihe darstellen. Man kann zeigen, dass sie sich auch als Grenzwert darstellen lässt. Geht man von der Definition $e = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ der Euler'schen Zahl e aus, erhält man die folgende Darstellung:

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

„Eine Funktion mit $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ oder einer (unendlichen) Teilmenge von $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ als Definitionsmenge heißt **(unendliche) Zahlenfolge**. Schreibweise: (a_n). Dabei heißt a_n das n-te Glied der Zahlenfolge (a_n).

Zur Erinnerung:
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ $(n \in \mathbb{N}\backslash\{0\})$. Zudem ist definiert: $0! = 1$.

$s_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$

$\frac{1}{0!} = 1$

$\frac{x^0}{0!} = 1$

Die stetige Verzinsung

Eine Bank bietet auf ein Kapital K_0, das bei ihr angelegt wird, Zinsen an, d.h., sie bezahlt einem Anleger einen bestimmten Betrag, wenn er sein Kapital eine bestimmte Zeit der Bank überlässt. Abhängig vom Kapital berechnet sich dieser Betrag anhand eines vorab vereinbarten festen Zinssatzes p. Üblicherweise bezieht sich der Zinssatz, den eine Bank angibt, auf ein Jahr.

Wenn beispielsweise Frau Reich $K_0 = 10\,000\,€$ zu einem Zinssatz von $p = 4\,\%$ anlegt, erhält sie nach einem Jahr $10\,000\,€ \cdot 4\,\% = 10\,000\,€ \cdot 0{,}04 = 400\,€$ Zinsen. Damit erhöht sich ihr anfängliches Kapital auf $10\,000\,€ + 400\,€ = 10\,400\,€$.
Allgemein beträgt das Kapital nach einem Jahr $K_1 = K_0 \cdot (1 + p)$.

Wenn Frau Reich von ihrer Bank bei gleichem Jahreszinssatz von $p = 4\,\%$ die Zinsen bereits nach einem halben Jahr erhält, bekommt sie nach dieser Zeit $10\,000\,€ \cdot \frac{4\,\%}{2} = 10\,000\,€ \cdot 0{,}02 = 200\,€$ gutgeschrieben. Im zweiten Halbjahr erhält sie dann nicht nur auf ihr anfängliches Kapital, sondern auch auf die Zinsen, die sie nach dem ersten Halbjahr bekommen hat, Zinsen.
Man spricht in diesem Fall von Zinseszinsen. Nach dem zweiten Halbjahr bekommt sie demnach $10\,200\,€ \cdot \frac{4\,\%}{2} = 204\,€$ Zinsen und hat nach einem Jahr insgesamt 10 404 € auf ihrem Konto.
Allgemein beträgt also das Kapital nach einem Jahr, wenn die Zinsen halbjährlich gutgeschrieben werden, $K_2 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{2}\right)^2$.

Diese Überlegung lässt sich entsprechend fortsetzen, wenn Frau Reich die Zinsen vierteljährlich, monatlich, täglich usw. gutgeschrieben bekäme. Man erhält:

Verzinsung	jährl.	halbj.	viertelj.	monatl.	tägl.	stündl.	sekündl.
n	1	2	4	12	365	8760	31 536 000
$\left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$	1,04	1,0404	1,040 604 01	1,040 741 54	1,040 808 49	1,040 810 68	1,040 810 77

Je kürzer der Verzinsungszeitraum ist, desto größer ist nach einem Jahr das Kapital auf dem Konto. Im Falle von unendlich kurzen Zeiträumen spricht man von **stetiger Verzinsung**. Zur Berechnung des Kapitals bei stetiger Verzinsung ist der Grenzfall $n \to \infty$ zu bestimmen:

$$K_\infty = \lim_{n \to \infty} \left(K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n\right) = K_0 \cdot \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n.$$

Der Grenzwert $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$ entspricht der oben aufgeführten Darstellung der Exponentialfunktion, d.h., es gilt $K_\infty = K_0 \cdot e^p$.
Ein Startkapital K_0 wächst bei stetiger Verzinsung mit einem Jahreszins p nach einem Jahr um den Faktor e^p. Frau Reichs Startkapital von 10 000 € würde bei stetiger Verzinsung mit $p = 4\,\%$ also nach einem Jahr auf $10\,000\,€ \cdot e^{0{,}04} \approx 10\,408{,}11\,€$ anwachsen. Im Vergleich zur jährlichen Verzinsung erhielte sie damit ca. 8,11 € mehr.

Die natürliche Exponentialfunktion und ihre Basis waren schon im 17. Jahrhundert Gegenstand von Untersuchungen. Jakob I Bernoulli, ein Mitglied der großen Schweizer Mathematikerfamilie Bernoulli, gelangte bei Untersuchungen der Verzinsung von Kapital zur Euler'schen Zahl.

Jakob I Bernoulli (1655 – 1705), Schweizer Mathematiker und Physiker

1 **a)** Bestimmen Sie mithilfe der Partialsumme s_{10} einen Näherungswert für die Euler'sche Zahl e. Geben Sie an, ab welcher Dezimale dieser Näherungswert vom exakten Wert von e abweicht (vgl. Angabe auf dem Rand).
b) Bestimmen Sie mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms den kleinsten Wert für n, ab dem der Term $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ in der ersten Dezimale mit dem exakten Wert von e übereinstimmt.

$e = 2{,}718\,281\,828\,459\ldots$

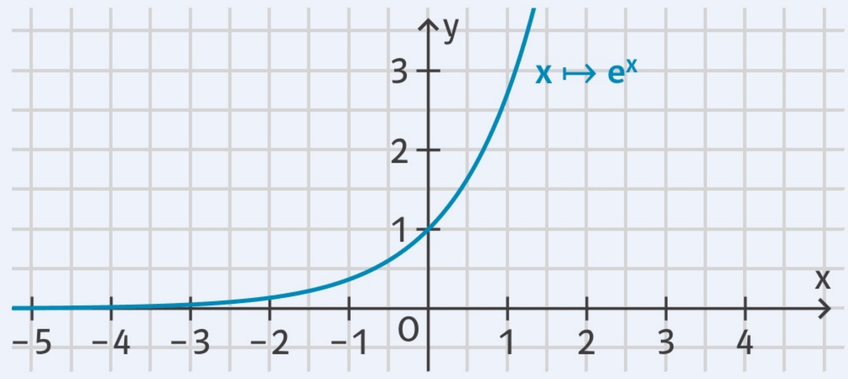
2 Herr Steinreich legt ein Kapital von 25 000 € zu einem Jahreszinssatz von 5,5 % an.
a) Berechnen Sie bei jährlicher Verzinsung die Zinsen, die Herr Steinreich nach einem Jahr erhält, sowie das Kapital, das Herrn Steinreich dann zur Verfügung steht.
b) Erstellen Sie mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms eine Tabelle, die Herrn Steinreichs Zinsen und sein Kapital nach einem Jahr bei jährlicher, vierteljährlicher, monatlicher, täglicher, stündlicher, minütlicher und sekündlicher Verzinsung angibt.
c) Berechnen Sie die Zinsen und das Kapital von Herrn Steinreich nach einem Jahr bei stetiger Verzinsung. Bestimmen Sie auf zwei Dezimalen genau, wie hoch der Jahreszinssatz sein müsste, damit Herr Steinreich bei jährlicher Verzinsung genauso viele Zinsen erhalten würde wie bei stetiger Verzinsung mit 5,5 %.

Rückblick

Die natürliche Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion $f: x \mapsto e^x$ mit der **Euler'schen Zahl e** als Basis heißt **natürliche Exponentialfunktion** oder kurz **e-Funktion**. Für die irrationale Zahl e gilt **e = 2,718 281 828 459 ...**

Die natürliche Exponentialfunktion hat die besondere Eigenschaft, dass ihr Funktionsterm mit dem Term ihrer Ableitungsfunktion übereinstimmt, d.h., es gilt $f(x) = f'(x) = e^x$. Außerdem ist F mit $F(x) = e^x$ eine Stammfunktion von f.



Ableitung von Verknüpfungen mit der e-Funktion

Mithilfe der Ketten- bzw. Produktregel erhält man:

Für $f(x) = e^{v(x)}$ gilt $f'(x) = e^{v(x)} \cdot v'(x)$.

Für $g(x) = e^x \cdot v(x)$ gilt $g'(x) = e^x \cdot v(x) + e^x \cdot v'(x) = e^x \cdot (v(x) + v'(x))$.

$f(x) = e^{2x^2 - 1} \Rightarrow f'(x) = e^{2x^2 - 1} \cdot 4x$

$f(x) = e^x \cdot x^3 \Rightarrow f'(x) = (x^3 + 3x^2) \cdot e^x$

Grenzwerte von Verknüpfungen mit der e-Funktion

Anschaulich wächst die e-Funktion für $x \to +\infty$ „schneller" als jede Potenz x^n $(n \in \mathbb{N})$. Dies zeigt sich in den folgenden Grenzwerten.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^n \cdot e^x) = 0$

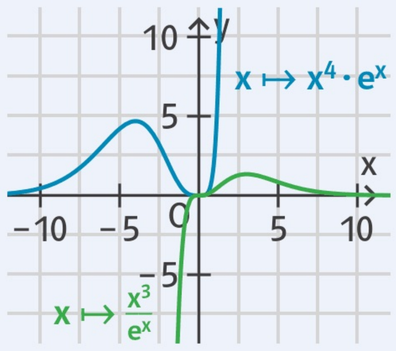
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^n \cdot e^{-x}) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^n) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 \cdot e^x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 \cdot e^{-x}) = 0$



Der natürliche Logarithmus

Der natürliche Logarithmus von b ist derjenige Exponent, mit dem die Euler'sche Zahl e potenziert werden muss, um b zu erhalten. Das heißt, die Lösung $x \in \mathbb{R}$ der **Exponentialgleichung $e^x = b$** mit $b \in \mathbb{R}^+$ bezeichnet man als **natürlichen Logarithmus von b**. Man schreibt **$x = \ln(b)$**. Es gilt $e^x = b \Leftrightarrow x = \ln(b)$.

Aus der Definition des natürlichen Logarithmus folgt

$e^{\ln(x)} = x$ für $x > 0$ und $\ln(e^x) = x$.

$e^{\ln(3x+4)} = 3x + 4$

$\ln(e^{3x^2 - 2}) = 3x^2 - 2$

$f(x) = e^{2x+1} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = \ln(3)$

$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(3) - 1}{2}$

Untersuchung von Verknüpfungen mit der e-Funktion

Eine Funktion f bzw. ihr Graph G_f wird oft hinsichtlich folgender Eigenschaften untersucht:

- Symmetrieverhalten von G_f
- Nullstellen von f
- Koordinaten des Schnittpunktes von G_f mit der y-Achse
- Verhalten von f für $x \to \pm\infty$ und Asymptoten von G_f
- Extrempunkte von G_f und Monotonieverhalten von f
- Wendepunkte und Krümmungsverhalten von G_f

$f(x) = 3x \cdot e^x$

$f'(x) = (3x + 3) \cdot e^x$

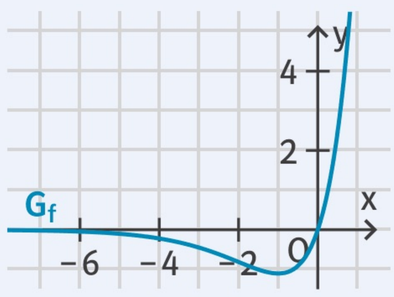
$f''(x) = (3x + 6) \cdot e^x$

Keine Symmetrie.

$S_x(0\,|\,0) = S_y(0\,|\,0)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (3x \cdot e^x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (3x \cdot e^x) = +\infty$



$T(-1\,|\,-3e^{-1})$, $W(-2\,|\,-6e^{-2})$

Modellieren von Wachstums- und Abklingvorgängen

Exponentielles Wachstum wird mithilfe der Wachstumsfunktion $f: t \mapsto b \cdot a^t$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$ mit **Wachstumsfaktor** a und **Anfangsbestand** $b = f(0)$ modelliert. Sie kann in der Form $f: t \mapsto b \cdot e^{\ln(a) \cdot t}$ bzw. mit $k = \ln(a)$ in der Form $f: t \mapsto b \cdot e^{kt}$ dargestellt werden.

Die dazugehörige Ableitungsfunktion f' mit $f'(t) = b \cdot k \cdot e^{k \cdot t}$ gibt die **Wachstumsgeschwindigkeit** zum Zeitpunkt t an.

Man nennt die Zeit, in der sich der Bestand bei positivem Wachstum $(k > 0)$ verdoppelt, **Verdopplungszeit** T_V und die Zeit, in der sich der Bestand bei negativem Wachstum $(k < 0)$ halbiert, **Halbwertszeit** T_H.

Es gilt $T_V = \frac{\ln(2)}{k}$ bzw. $T_H = -\frac{\ln(2)}{k}$.

t	0	1	2	3	4	5
f(t)	70	112	≈ 179	≈ 286	≈ 458	≈ 733

·1,6 ·1,6 ·1,6 ·1,6 ·1,6

$f(t) = 70 \cdot 1{,}6^t = 70 \cdot e^{\ln(1{,}6) \cdot t}$

$\Rightarrow f'(t) = 70 \cdot \ln(1{,}6) \cdot e^{\ln(1{,}6) \cdot t}$

Verdopplungszeit T_V:

$T_V = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}6)} \approx 1{,}47.$

→ Lösungen | Seite 276

1 Bestimmen Sie einen Term der Ableitung der Funktion.

a) $f(x) = 7 \cdot e^{-4x} + 5x^2$ **b)** $f(x) = \frac{1}{5}e^{10x-3} - \cos(-2x)$ **c)** $f_a(x) = (ax + 3) \cdot e^{-x^2}$

2 Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung.

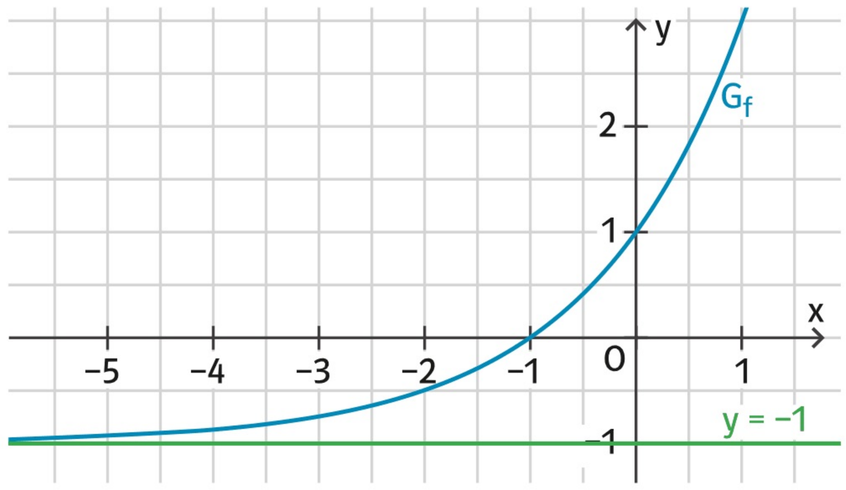
a) $(e^{2x} - 5) \cdot (x^3 + 8) = 0$ **b)** $9e^{-x} + e^x = 8$ **c)** $e^{3x} - 4e^x = 0$

3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = a \cdot e^{bx} + c$.
Die Abbildung zeigt den Graphen von f sowie seine Asymptote.

a) Begründen Sie, dass $c = -1$ und $a = 2$ ist.

b) Bestimmen Sie den Wert des Parameters b.

c) Zeigen Sie, dass die Steigung des Graphen in seinem Schnittpunkt mit der y-Achse doppelt so groß ist wie die Steigung im Schnittpunkt mit der x-Achse.



4 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4x \cdot e^{-0{,}5x}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion f.

b) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

c) Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunktes von G_f.

d) Zeigen Sie, dass G_f genau einen Wendepunkt hat, und ermitteln Sie eine Gleichung der Wendetangente.

e) Skizzieren Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse.

5 In einem See wurden 400 Fische ausgesetzt. Nach 30 Tagen sind es 520 Fische. Man nimmt an, dass die Anzahl der Fische in dem See ein halbes Jahr lang exponentiell zunimmt.

a) Bestimmen Sie eine Funktion $f: t \mapsto b \cdot e^{kt}$ (t in Tagen), die die Anzahl der Fische in dem See modelliert, und berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem man mit 1000 Fischen rechnen kann.

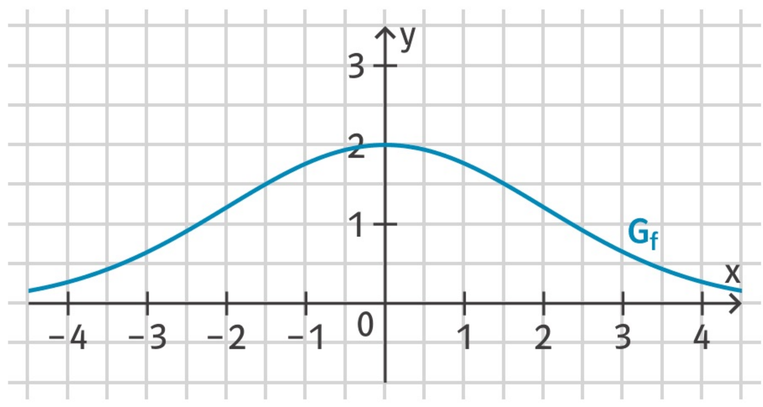
b) Bestimmen Sie die Verdopplungszeit.

c) Ermitteln Sie die Wachstumsgeschwindigkeit zu Beginn und nach einem halben Jahr.

6 **Abiturprüfung 2023 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, daraus Teilaufgaben 1a) bis f)**

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto 2e^{-\frac{1}{8}x^2}$.
Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f, der die x-Achse als waagrechte Asymptote besitzt.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von G_f mit der y-Achse und weisen Sie rechnerisch nach, dass G_f symmetrisch bezüglich der y-Achse ist.



b) Der Punkt $W\left(-2 \mid 2e^{-\frac{1}{2}}\right)$ ist einer der beiden Wendepunkte von G_f. Die Tangente an G_f im Punkt W wird mit w bezeichnet. Ermitteln Sie eine Gleichung von w und berechnen Sie die Stelle, an der w die x-Achse schneidet.

(zur Kontrolle: $f'(x) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{-\frac{1}{8}x^2}$*)*

Betrachtet wird für jeden Wert $c \in \mathbb{R}^+$ das Rechteck mit den Eckpunkten $P(-c \mid 0)$, $Q(c \mid 0)$, $R(c \mid f(c))$ und S.

c) Zeichnen Sie für $c = 2$ das Rechteck PQRS in die Abbildung ein.

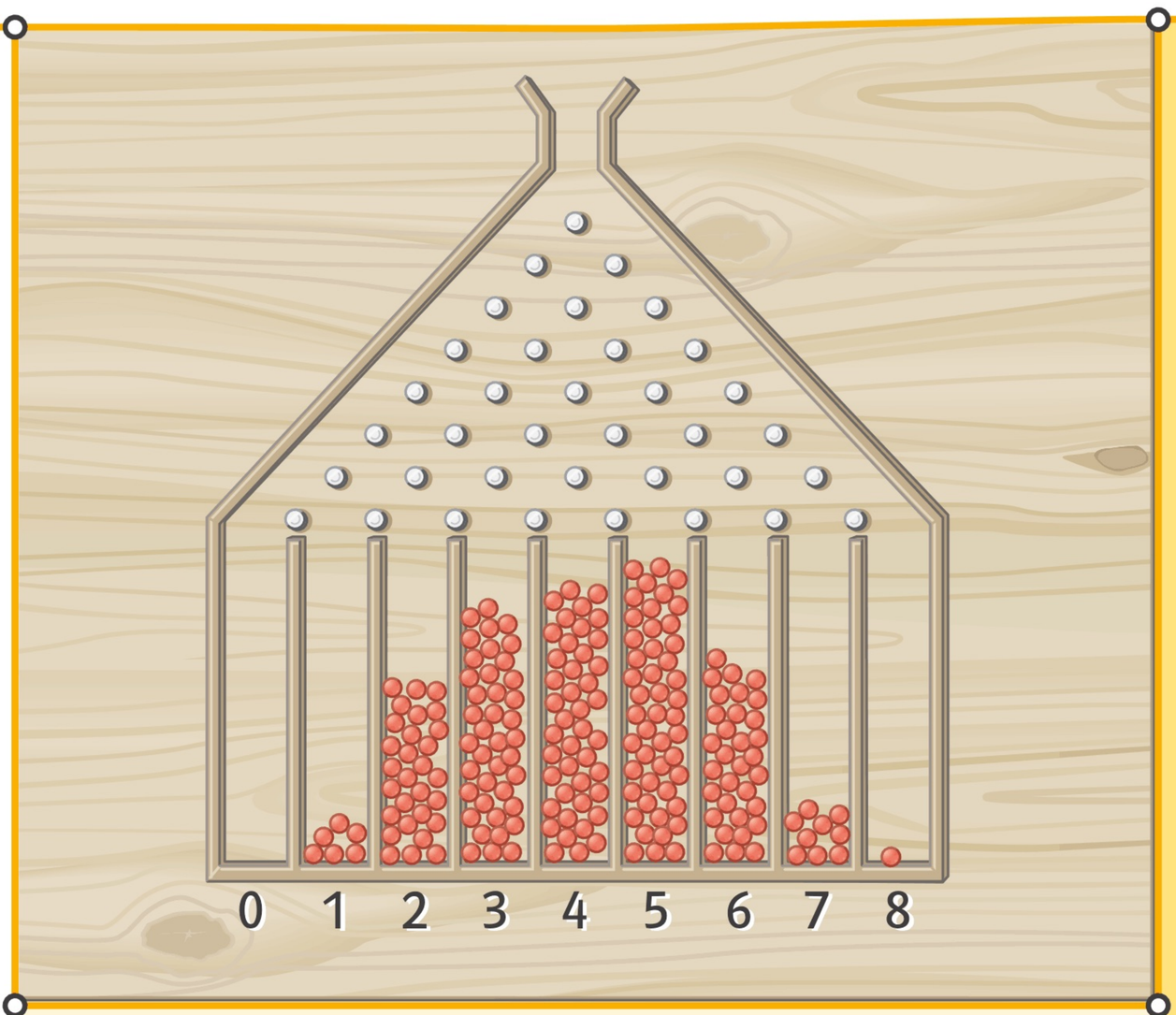
d) Berechnen Sie denjenigen Wert von c, für den $\overline{QR} = 1$ gilt.

e) Geben Sie in Abhängigkeit von c die Seitenlängen des Rechtecks PQRS an und begründen Sie, dass der Flächeninhalt des Rechtecks durch den Term $A(c) = 4c \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2}$ gegeben ist.

f) Es gibt einen Wert von c, für den der Flächeninhalt A(c) des Rechtecks PQRS maximal ist. Berechnen Sie diesen Wert von c.

Hinweis zu Aufgabe 6c):
Übertragen Sie zunächst G_f in Ihr Heft und ergänzen Sie in dieser Zeichnung das Rechteck PQRS.

III Zufallsgrößen und Binomialverteilung



„Irgend ein Ding vermuthen heisst soviel als seine Wahrscheinlichkeit messen. Deshalb bezeichnen wir als Vermuthungs- oder Muthmaassungskunst (ars conjectandi sive stochastice) die Kunst, so genau als möglich die Wahrscheinlichkeiten der Dinge zu messen und zwar zu dem Zwecke, dass wir bei unseren Urtheilen und Handlungen stets das auswählen und befolgen können, was uns besser, trefflicher, sicherer oder rathsamer erscheint. Darin allein beruht die ganze Weisheit des Philosophen und die ganze Klugheit des Staatsmannes."

Jakob I Bernoulli (1655 – 1705), Schweizer Mathematiker und Physiker

Das können Sie schon

- Das Zählprinzip bei der Bestimmung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten anwenden
- Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mithilfe einer Vierfeldertafel bestimmen
- Die Pfadregeln bei der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten anwenden
- Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ und $P_B(A)$ bestimmen
- Die stochastische Unabhängigkeit zweier Ereignisse anwenden

Test

Check-in
zu Kapitel III
Seite 264

Das können Sie bald

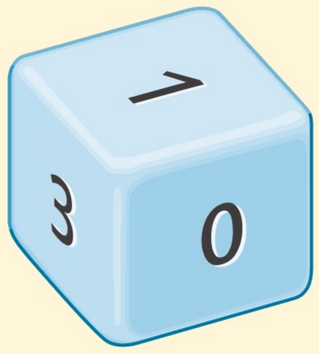
- Den Begriff Zufallsgröße erläutern und die Kenngrößen Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung berechnen
- Sachzusammenhänge mit Bernoulli-Ketten modellieren und die Binomialverteilung mit ihren Kenngrößen anwenden

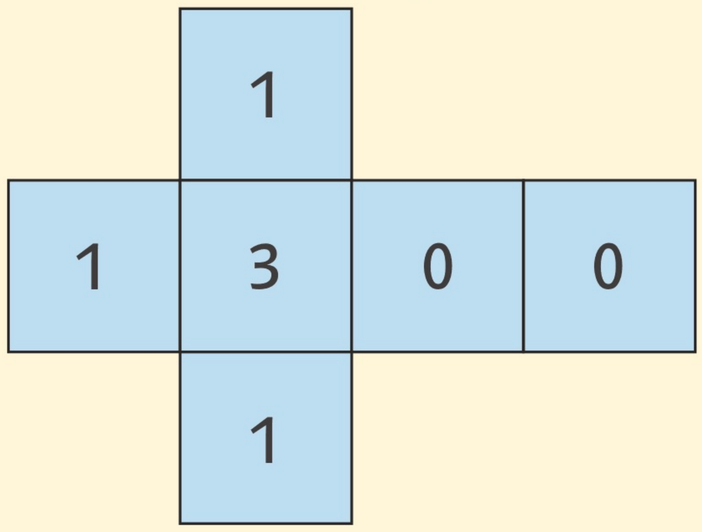
1 Zufallsgrößen und deren Wahrscheinlichkeitsverteilung

Der abgebildete Würfel wird zweimal geworfen. Der Einsatz beträgt 1 €. Ausgezahlt wird jeweils das Produkt der beiden Zahlen in Euro.

a) Geben Sie eine Ergebnismenge Ω an, die genau neun Elemente enthält.

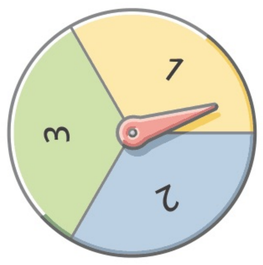
b) Geben Sie die Ereignisse an, bei denen der Gewinn minimal bzw. maximal ist, und bestimmen Sie deren Wahrscheinlichkeiten.



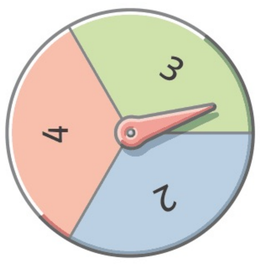


Die beiden Glücksräder werden gedreht. Bei diesem Zufallsexperiment kann man sich für verschiedene Fragestellungen interessieren, beispielsweise für das Produkt, für das Maximum oder für die Summe der beiden Zahlen.

(1)



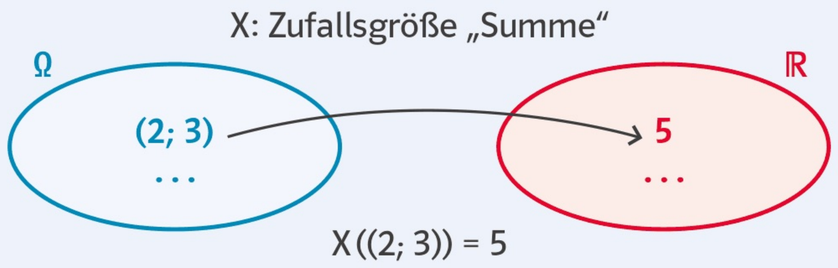
(2)



Ergebnis	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)
Produkt	2	3	4	4	6	8	6	9	12
Maximum	2	3	4	2	3	4	3	3	4
Summe	3	4	5	4	5	6	5	6	7

Jede der beispielhaft angegebenen Zuordnungen nennt man eine auf Ω definierte **Zufallsgröße**.
Im Beispiel ordnet die Zufallsgröße „Summe“ dem Ergebnis $(2; 3)$ die reelle Zahl 5 zu.

Definition: Eine Funktion X, die jedem Ergebnis $\omega \in \Omega$ eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl $X(\omega)$ zuordnet, heißt **Zufallsgröße** oder **Zufallsvariable** auf Ω.
Kurz: $X: \omega \mapsto X(\omega)$ mit $\omega \in \Omega$ und $X(\omega) \in \mathbb{R}$.



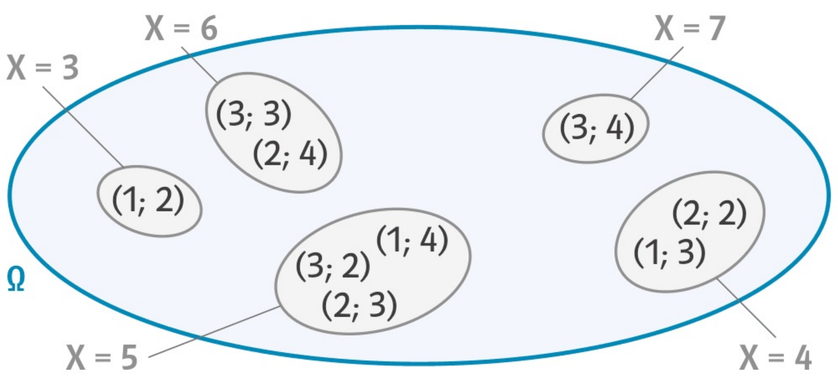
Für die Bezeichnung von Zufallsgrößen verwendet man oft Großbuchstaben, z. B. X, Y oder Z.
Bei der mit X bezeichneten Zufallsgröße „Summe“ kann man das Ereignis A: „Die Summe ist 5“ in aufzählender Form durch $A = \{(1; 4); (2; 3); (3; 2)\}$ oder abstrakter durch $A = \{\omega \mid X(\omega) = 5\}$ (sprich: A besteht aus allen ω mit der Eigenschaft $X(\omega) = 5$) oder kurz durch $X = 5$ darstellen.

In der Differentialrechnung werden Funktionen meist mit Kleinbuchstaben, z. B. f, g und h, bezeichnet.

Allgemein gilt für eine auf der Ergebnismenge Ω definierte Zufallsgröße X, welche die Werte x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ annimmt: Es gibt zu jedem x_i ein Ereignis $A_i \subset \Omega$, das aus denjenigen Ergebnissen besteht, die durch X auf x_i abgebildet werden, das heißt, es gilt $A_i = \{\omega \mid X(\omega) = x_i\}$.
Für die Ereignisse A_i, die durch die Werte x_i von X festgelegt werden, verwendet man auch die symbolische Kurzschreibweise $X = x_i$.

Werte der Zufallsgröße „Summe“:
$x_i = 3; 4; 5; 6; 7$

Jedes Ergebnis ω gehört beim Vorliegen einer Zufallsgröße X zu genau einem Ereignis A_i. Somit bilden die Ereignisse A_i eine Zerlegung der Ergebnismenge Ω. Die Abbildung zeigt die durch die Zufallsgröße „Summe“ hervorgerufene Zerlegung von Ω.



Zur Erinnerung:
Die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bilden eine Zerlegung von Ω, wenn gilt: Die Ereignisse sind nicht leer, paarweise disjunkt und es ist $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

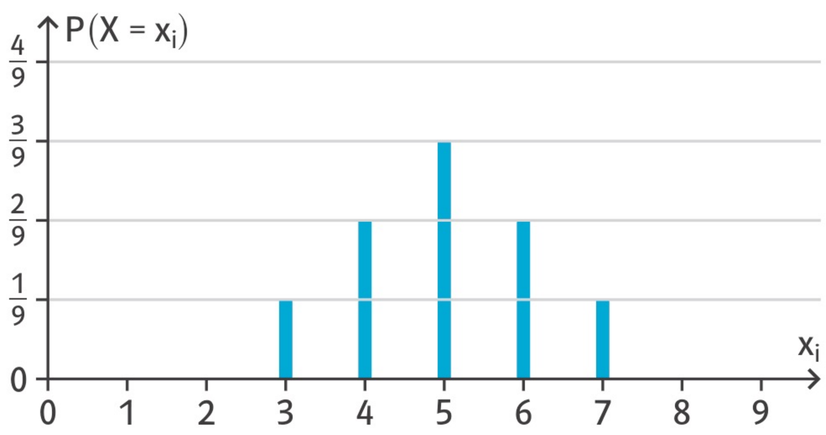
Die Wertetabelle enthält die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $X = x_i$ der mit X bezeichneten Zufallsgröße „Summe“.

x_i	3	4	5	6	7
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

Die durch die Wertetabelle beschriebene Funktion, die jedem Wert x_i einer Zufallsgröße X die Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ zuordnet, erhält einen eigenen Namen.

Definition: Die Funktion W, die jedem Wert x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ einer Zufallsgröße X die Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ zuordnet, heißt **Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße X** oder **Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X** oder knapp Verteilung von X.
Kurz: $W: x_i \mapsto P(X = x_i)$.

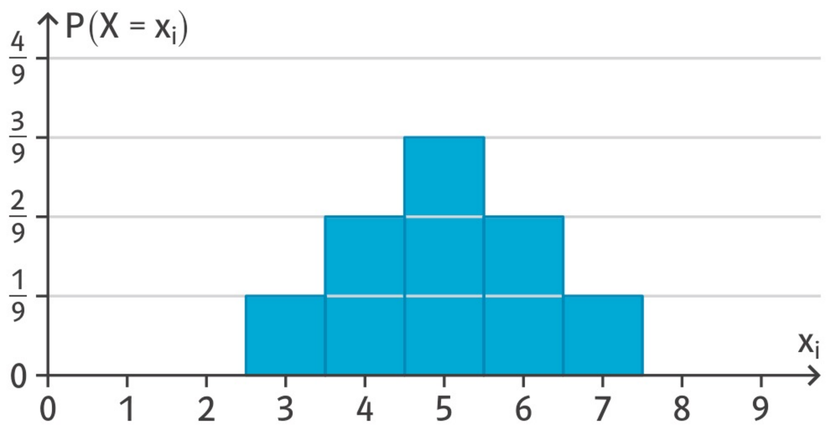
Zur Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X verwendet man neben einer Tabelle häufig ein **Säulendiagramm**. Die Grafik zeigt das Säulendiagramm für die Zufallsgröße „Summe“.
Die Höhe der Säulen gibt die Werte der Wahrscheinlichkeitsfunktion an den Stellen x_i an, d.h. die Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$.



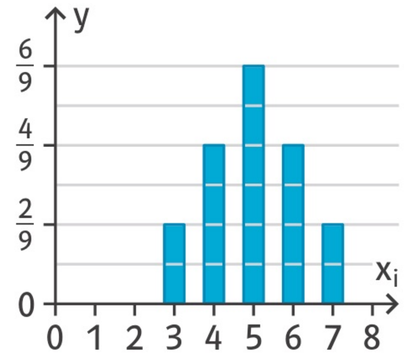
Ein Säulendiagramm wird häufig auch als Stabdiagramm bezeichnet.

Bei der Zufallsgröße „Summe“ gilt:
$W(5) = P(X = 5) = \frac{3}{9}$.

Eine alternative Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X ist das **Histogramm**. Bei ihm werden die Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$ durch Flächeninhalte von Rechtecken veranschaulicht.
Hat ein Rechteck die Breite 1, so entspricht der Höhe des Rechtecks die Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$.



histos (gr.): Gewebe, Netz
gramma (gr.): Darstellung



Histogramm mit Rechteckbreite 0,5.

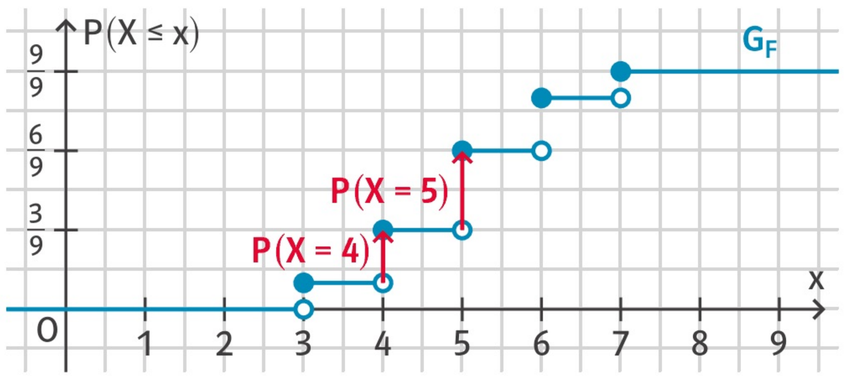
Verringert man beispielsweise die Breite eines Rechtecks auf 0,5, so muss die Höhe mit 2 multipliziert werden, damit der Flächeninhalt gleich bleibt.

Interessiert man sich bei der Zufallsgröße „Summe“ für die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe höchstens 5 ist, so bestimmt man die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 5)$. Diese kann als Summe berechnet werden: $P(X \leq 5) = P(X = 5) + P(X = 4) + P(X = 3) = \frac{3}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{6}{9}$.

Bestimmt man allgemein bei einer gegebenen Zufallsgröße X die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq x)$, wobei x eine reelle Zahl ist, so wird dadurch eine neue Funktion beschrieben.

Definition: Die Funktion F, die bei gegebener Zufallsgröße X jeder reellen Zahl x die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq x)$ zuordnet, heißt **kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X**.
Kurz: $F: x \mapsto P(X \leq x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $P(X \leq x) \in [0; 1]$.

Die kumulative Verteilungsfunktion F ist eine Treppenfunktion, da die Werte x_i Sprungstellen sind mit der zugehörigen „Sprunghöhe“ $P(X = x_i)$.
Die Abbildung zeigt den Graphen der kumulativen Verteilungsfunktion der Zufallsgröße „Summe“.



Bei der Zufallsgröße „Summe“ gilt:
$F: x \mapsto P(X \leq x)$
$5 \mapsto P(X \leq 5) = \frac{6}{9}$
$F(5) = P(X \leq 5) = \frac{6}{9}$

Für die kumulative Verteilungsfunktion F gilt:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
- F ist monoton zunehmend auf $\mathbb{R}$.
- Der Graph von F springt bei x, wenn $P(X = x) \neq 0$ ist. Die Höhe des Sprungs beträgt $P(X = x)$.
- Die Wahrscheinlichkeit $P(a < X \leq b)$, dass die Zufallsgröße X einen Wert x aus dem Intervall $a < x \leq b$ annimmt, kann als Differenz $F(b) - F(a)$ berechnet werden.
  Beispielsweise gilt bei der Zufallsgröße „Summe“ $P(4 < X \leq 6) = F(6) - F(4) = \frac{8}{9} - \frac{3}{9} = \frac{5}{9}$.

Beispiel 1

Ein Würfel wird dreimal nacheinander geworfen. Man interessiert sich dafür, ob eine Eins geworfen wird oder nicht.

a) Geben Sie eine geeignete Ergebnismenge Ω an.

b) Die Zufallsgröße Z gibt die Anzahl der Einsen an. Geben Sie die Ereignisse $Z = 0$, $Z = 1$, $Z = 2$ und $Z \leq 1$ in aufzählender Form an.

c) Zeichnen Sie das zur Wahrscheinlichkeitsverteilung von Z gehörende Säulendiagramm.

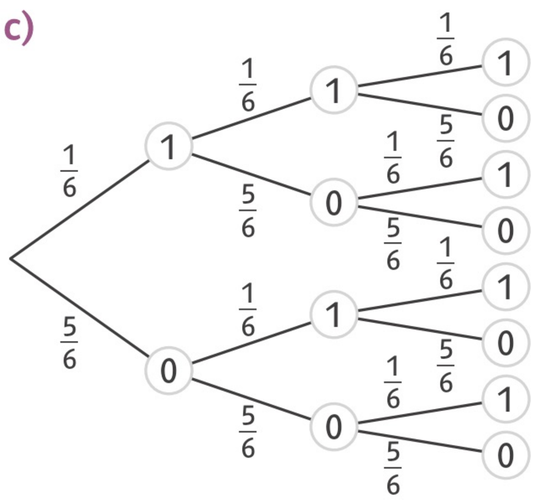
→ Strategie | Seite 256
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

Lösung

a) 1: Eins, 0: keine Eins; $\Omega = \{000; 100; 010; 001; 110; 101; 011; 111\}$.

b) $Z = 0$: $\{000\}$; $Z = 1$: $\{100; 010; 001\}$; $Z = 2$: $\{110; 101; 011\}$; $Z \leq 1$: $\{000; 100; 010; 001\}$.

c)

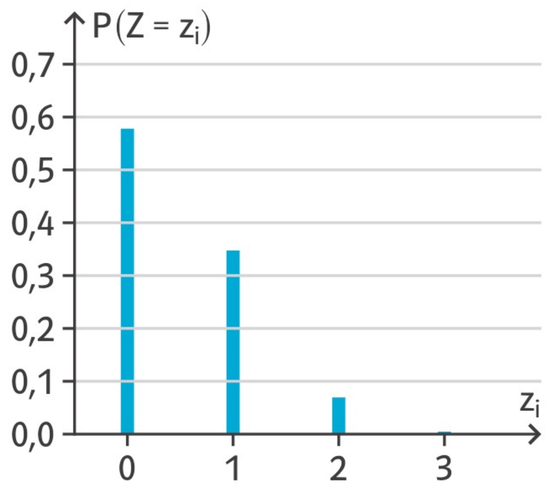


$P(Z = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$

$P(Z = 1) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$

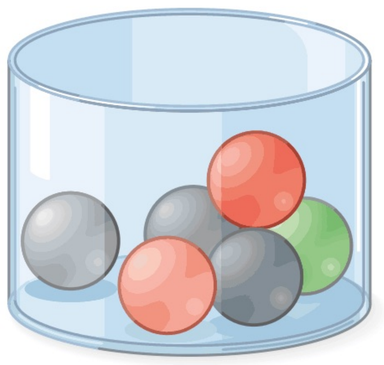
$P(Z = 2) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$

$P(Z = 3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$



Beispiel 2

Ein Spieler zahlt 1 € Einsatz und zieht aus der abgebildeten Urne zwei Kugeln ohne Zurücklegen. Laut Auszahlungsplan erhält er für zwei rote Kugeln 3 €, für zwei schwarze Kugeln 2 € und für die grüne zusammen mit einer beliebigen Kugel 1 € ausbezahlt. Bei allen anderen Ergebnissen wird nichts ausbezahlt. Die Zufallsgröße G ist der Gewinn in Euro.



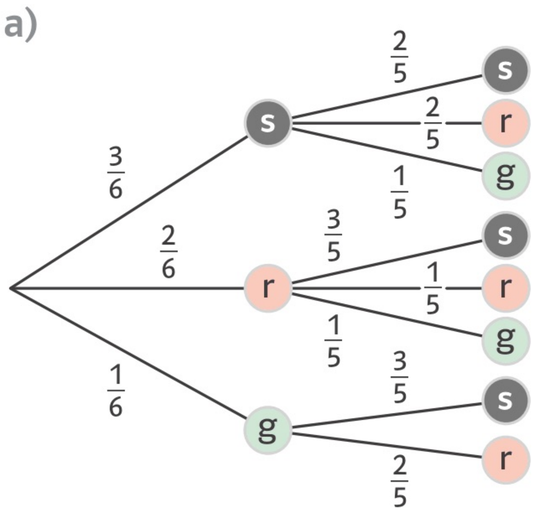
a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von G.

b) Bestimmen Sie die zu G gehörige kumulative Verteilungsfunktion F.

c) Zeichnen Sie den Graphen der zu G gehörenden kumulativen Verteilungsfunktion.

Lösung

a)



Ergebnis	$G(\omega)$
ss	1
sr	−1
sg	0
rs	−1
rr	2
rg	0
gs	0
gr	0

Gewinn = Auszahlung − Einzahlung

Wertemenge von G: $\{2; 1; 0; -1\}$.

$P(G = 2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{30}$

$P(G = 1) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{30}$

$P(G = 0) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{10}{30}$

$P(G = -1) = 1 - [P(G = 2) + P(G = 1) + P(G = 0)]$

$= \frac{12}{30}$

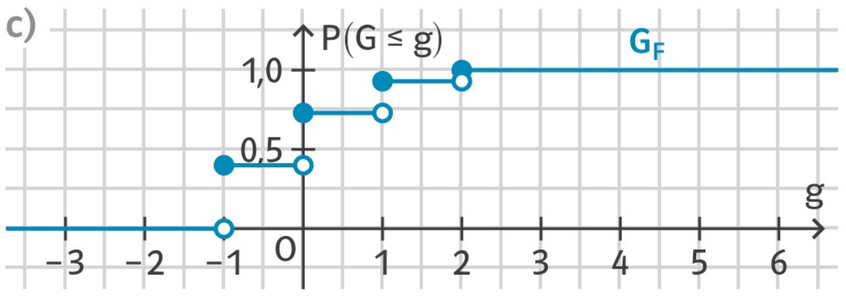
b) $F(-1) = P(G \leq -1) = \frac{12}{30} = 0{,}4$

$F(0) = P(G \leq 0) = \frac{12}{30} + \frac{10}{30} = \frac{22}{30} \approx 0{,}73$

$F(1) = P(G \leq 1) = \frac{12}{30} + \frac{10}{30} + \frac{6}{30} = \frac{28}{30} \approx 0{,}93$

$F(2) = P(G \leq 2) = \frac{12}{30} + \frac{10}{30} + \frac{6}{30} + \frac{2}{30} = 1$

c)



Aufgaben

1 Ein Würfel wird zweimal geworfen. Die Zufallsgröße X ist die Augensumme. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und geben Sie diese mithilfe einer Wertetabelle an.

2 Einer der vier Zettel wird zufällig gezogen. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Buchstaben und die Zufallsgröße Y die Anzahl der Vokale des gezogenen Worts an.

a) Stellen Sie X und Y in einer Tabelle dar.

b) Geben Sie die Ereignisse, die durch $X = 6$ bzw. $Y = 2$ beschrieben werden, in aufzählender Form an.

3 In einer Urne liegen 16 mit den Zahlen 1 bis 16 nummerierte Kugeln. Eine Kugel wird zufällig gezogen. Die Zufallsgröße X ordnet der gezogenen Kugel die Anzahl der Teiler der Zahl auf der Kugel zu.

a) Geben Sie eine Wertetabelle der Zufallsgröße X an.

b) Geben Sie die Ereignisse $X = 2$, $X = 3$ und $X = 4$ in aufzählender Form an. Geben Sie jeweils die besondere Bedeutung der Ereignisse $X = 2$ und $X = 3$ an.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X = 2)$ und $P(X = 3)$.

4 Bogenschütze Stefan trifft mit der Wahrscheinlichkeit 0,25 ins „Gelbe“. Er schießt vier Pfeile nacheinander auf die Zielscheibe. Die Zufallsgröße X gibt an, wie oft er ins „Gelbe“ getroffen hat.

a) Erläutern Sie, dass eine geeignete Ergebnismenge Ω die Mächtigkeit 16 hat.

b) Beschreiben Sie in Worten die Bedeutung der Ereignisse $X = 0$, $X = 2$ bzw. $X \leq 1$. Geben Sie die Ereignisse in aufzählender Form an.

c) Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit $P(X = 0)$, $P(X = 2)$ und $P(X \leq 1)$.

d) Zeichnen Sie das zur Verteilung von X gehörende Säulendiagramm.

Zur Erinnerung:
Die Anzahl der Elemente einer Menge bezeichnet man auch als Mächtigkeit der Menge.

5 a) Erläutern Sie den Begriff Zufallsgröße.

b) Erklären Sie den Unterschied zwischen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung und der zugehörigen kumulativen Verteilungsfunktion.

Test 1

→ Lösungen | Seite 277

6 Auf drei verdeckten Karten ist jeweils einer der Buchstaben A, B oder C notiert. Die Karten werden gemischt und nacheinander aufgedeckt. Man erhält 2 €, wenn A als erster Buchstabe erscheint, und 1 €, wenn A als zweiter Buchstabe aufgedeckt wird. Man muss 3 € bezahlen, wenn A als letzter Buchstabe kommt. Die Zufallsgröße G gibt den Gewinn in Euro an.

a) Geben Sie eine geeignete Ergebnismenge des Zufallsexperiments und eine Wertetabelle der Zufallsgröße G an.

b) Beschreiben Sie die Ereignisse $G = 2$, $G = -3$ und $G \leq 2$ in Worten.

c) Zeichnen Sie das zur Verteilung von G gehörende Säulendiagramm.

7 Beschreiben Sie die Bedeutung von $P(X \geq x)$, $x \in \mathbb{R}$, wenn X eine Zufallsgröße ist.

8 Zu Beginn des 20. Jahrhunderts entstand in den USA das Spiel „Chuck a Luck“: Die Spielunterlage besteht aus sechs Feldern mit den Zahlen 1 bis 6. Ein Spieler legt 1 $ auf eines der Felder. Dann werden drei Würfel geworfen. Erscheint die Zahl des gewählten Feldes ein-, zwei- oder dreimal, erhält der Spieler seinen Einsatz zurück und außerdem einen Gewinn von 1 $, 2 $ oder 3 $. Andernfalls verliert er seinen Einsatz. Die Zufallsgröße G gibt den Gewinn des Spielers in Dollar an.

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von G.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spieler mindestens 2 $ gewinnt.

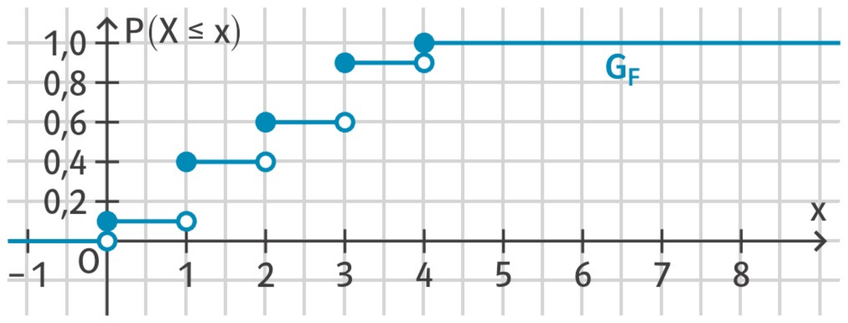
c) Simulieren Sie gemeinsam dieses Spiel und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den berechneten.

9 Gegeben ist der Graph der kumulativen Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße X.

a) Bestimmen Sie $P(X \leq 2)$ und $P(X > 3)$.

b) Bestimmen Sie $P(0 < X \leq 4)$.

c) Zeichnen Sie ein zur Verteilung von X gehörendes Säulendiagramm.



10 Alice und Bob spielen folgendes Spiel: Eine verbeulte Münze mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ für Zahl wird dreimal geworfen. Bob zahlt an Alice 1 €, wenn höchstens einmal Wappen fällt; Alice zahlt an Bob 2 €, wenn zweimal Wappen fällt. Keiner zahlt etwas, wenn dreimal Wappen fällt. Die Zufallsgröße G ordnet jedem Ergebnis den Gewinn von Alice in Euro zu.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse.

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von G in Form einer Tabelle an.

c) Zeichnen Sie das zu G gehörende Histogramm mit Rechteckbreite 1.

11 Ein Autofahrer muss bei seiner Fahrt zum Arbeitsplatz drei Ampeln passieren, die unabhängig voneinander den Verkehr regeln. Jede der Ampeln steht mit der Wahrscheinlichkeit 0,4 auf Rot. Die Zufallsgröße X ordnet jeder Fahrt die Anzahl der Ampeln zu, die der Fahrer ohne Halt passieren kann.

a) Zeichnen Sie das zur Wahrscheinlichkeitsverteilung von X gehörende Säulendiagramm.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fahrer mindestens zwei Ampeln ohne Halt passieren kann.

12 Die Tabelle gehört zu einem Glücksspiel, bei dem man 10 € verlieren und bis zu 10 € gewinnen kann. Die Zufallsgröße G gibt den Gewinn in Euro an.

g_i	$P(G = g_i)$
–10	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{2}$
10	$\frac{1}{12}$

a) Begründen Sie, dass die Tabelle eine prinzipiell mögliche Wahrscheinlichkeitsverteilung von G angibt.

b) Diskutieren Sie gemeinsam, wie die Spielregel bei einem zwölfseitigen „Würfel“ aussehen könnte.

Zur Erinnerung:
Besteht ein Ereignis nur aus einem Element, so sprechen wir der Einfachheit halber von der Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses anstatt von der Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses.

→ Strategie | Seite 256

Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

Ein zwölfseitiger „Würfel“ ist ein Dodekaeder. Dieser regelmäßige Körper wird von zwölf regelmäßigen Fünfecken begrenzt.

Test 2

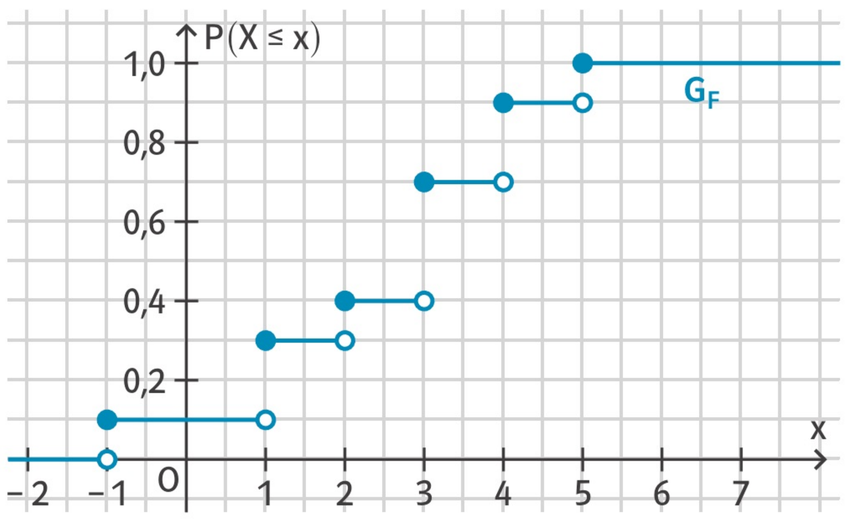
→ Lösungen | Seite 278

13 Gegeben ist der Graph der kumulativen Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße X.

a) Bestimmen Sie $P(X < 3)$, $P(X = 3)$, $P(X \leq 3)$, $P(X = 3{,}5)$ und $P(X \leq 3{,}5)$.

b) Bestimmen Sie $P(1 < X \leq 3)$ und $P(1 \leq X \leq 3)$.

c) Zeichnen Sie das zur Verteilung von X gehörende Säulendiagramm.



14 Leah schreibt vier Briefe und adressiert vier Umschläge. Sie steckt die Briefe in die Umschläge, ohne auf die Adresse zu schauen. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Briefe an, die im richtigen Umschlag stecken. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und veranschaulichen Sie diese mit einem Histogramm mit Rechteckbreite 1.

Diese Aufgabe wird in der Mathematik als das Problem der vertauschten Briefe bezeichnet.

Grundwissen Test

→ Lösungen | Seite 278

G 15 Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Funktion f im Intervall I und anschließend die Stelle $x_m \in I$, an der die lokale Änderungsrate von f gleich dieser mittleren Änderungsrate ist.

a) $f: x \mapsto 3x^3 - 2x;\ I = [1; 2]$

b) $f: x \mapsto e^{0{,}5x} + 1;\ I = [0; 4]$

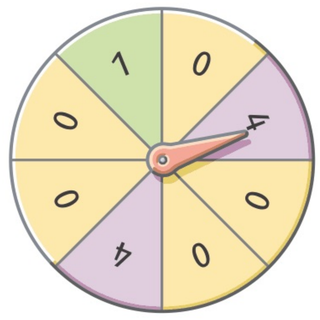
→ Strategie | Seite 260

Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

2 Erwartungswert und Varianz einer Zufallsgröße

Bei einem Spiel werden drei Münzen geworfen. Der Einsatz beträgt 1,60 €. Als Auszahlung erhalten Sie die Anzahl der geworfenen Wappen in Euro. Würden Sie sich an dem Spiel beteiligen?

Bevor ein Spieler am Glücksrad drehen darf, ist ein Einsatz von 1 € zu entrichten. In den gleich großen Sektoren steht der Betrag in Euro, der ausgezahlt wird. Die Zufallsgröße G gibt den Gewinn in Euro an. Ihre Verteilung kann der Tabelle entnommen werden.



g_i	$P(G = g_i)$
−1	$\frac{5}{8}$
0	$\frac{1}{8}$
3	$\frac{2}{8}$

Um herauszufinden, ob der Spieler auf lange Sicht, d.h., wenn er das Spiel sehr oft durchführt, mit einem Verlust rechnen muss, betrachtet man eine große Anzahl von Einzelspielen, z.B. 800. Man interpretiert die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $G = g_i$ als relative Häufigkeiten für das Eintreten dieser Ereignisse bei sehr häufiger Versuchsdurchführung. Dann würde man in $\frac{5}{8}$ der Fälle, also bei 500 Spielen 1 € verlieren, in $\frac{1}{8}$ der Fälle, also bei 100 Spielen weder gewinnen noch verlieren und bei weiteren $\frac{2}{8}$ der Fälle, also 200 Spielen 3 € gewinnen. Somit würde sich bei 800 Spielen folgender Gesamtgewinn ergeben: $500 \cdot (-1\,€) + 100 \cdot 0\,€ + 200 \cdot 3\,€ = 100\,€$.

Den durchschnittlichen Gewinn pro Spiel erhält man, wenn man den Gesamtgewinn durch die Anzahl der Spiele dividiert: $100\,€ : 800 = 0{,}125\,€$. Der Spieler kann also damit rechnen, auf lange Sicht im Durchschnitt pro Spiel 0,125 € zu gewinnen.
Bei der Berechnung des durchschnittlichen Gewinns pro Spiel kann man direkt auf die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $G = g_i$ zurückgreifen, wie folgende Rechnung zeigt:
$(500 \cdot (-1\,€) + 100 \cdot 0\,€ + 200 \cdot 3\,€) : 800 = \frac{5}{8} \cdot (-1\,€) + \frac{1}{8} \cdot 0\,€ + \frac{2}{8} \cdot 3\,€ = 0{,}125\,€$.

Multipliziert man den Wert einer Zufallsgröße mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit, so spricht man von der **Gewichtung des Wertes**. Die Summe der mit den Wahrscheinlichkeiten gewichteten Werte einer Zufallsgröße charakterisiert die Zufallsgröße und erhält daher eine eigene Bezeichnung.

Man spricht hier von einer charakterisierenden Zahl, da sie eine wichtige Information über die Funktion Zufallsgröße gibt.

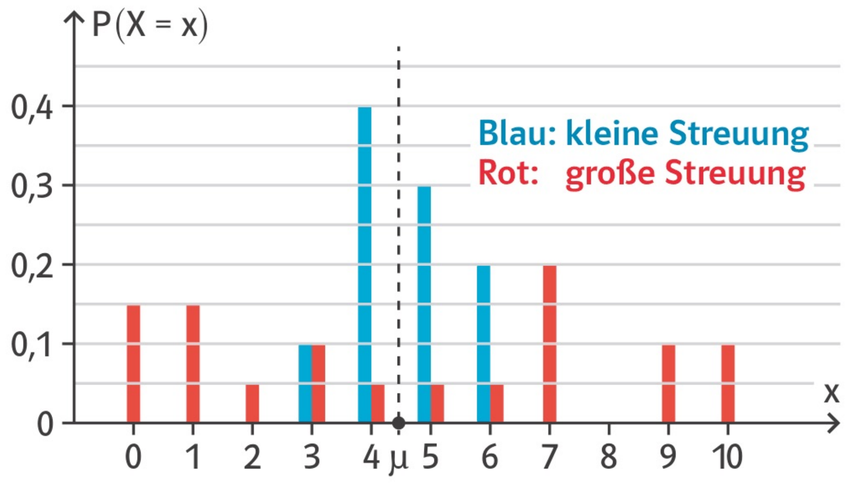
Definition: Ist X eine Zufallsgröße, deren mögliche Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind, so heißt die reelle Zahl $E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$ **Erwartungswert der Zufallsgröße X**.
Der Erwartungswert E(X) ist der mittlere Wert der Zufallsgröße pro Versuch auf lange Sicht.

Diese Interpretation gab Nikolaus I Bernoulli (1687–1759) in „De usu artis conjectandi in jure“ 1709.

Statt E(X) schreibt man auch kürzer μ (lies: my).
Für Summen mit den Summanden $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ist auch folgende Kurzschreibweise mit dem **Summenzeichen Σ** üblich: $s_1 + s_2 + \ldots + s_n = \sum_{i=1}^{n} s_i$. Also gilt $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$.

Bemerkungen:
- Der Erwartungswert einer Zufallsgröße ist im Allgemeinen kein Wert, den die Zufallsgröße annimmt. Im obigen Beispiel ist $\mu = 0{,}125$, während die zugehörige Zufallsgröße nur die Werte −1; 0 und 3 annehmen kann.
- Ein Spiel heißt **fair**, wenn der Erwartungswert des Gewinns für jeden Spieler 0 ist.

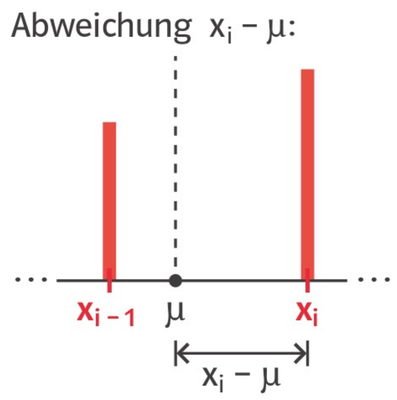
Neben dem Erwartungswert μ wird eine Zufallsgröße X auch durch die Streuung der Werte x_i der Zufallsgröße X um ihren Erwartungswert μ charakterisiert. Die Streuung wird durch eine weitere Größe, die **Varianz**, erfasst. In der Abbildung hat die zu den blauen Säulen gehörende Zufallsgröße eine kleinere Streuung als die zu den roten Säulen gehörende Zufallsgröße, wobei beide Zufallsgrößen den gleichen Erwartungswert μ haben.



Die für die Zufallsgröße charakteristischen Zahlen Erwartungswert und Varianz nennt man **Kenngrößen der Zufallsgröße**.

Es liegt nahe, die Abweichungen $x_i - \mu$ vom Erwartungswert μ heranzuziehen, wenn man die Streuung der Werte x_i messen möchte. Es genügt aber nicht, jede Abweichung $x_i - \mu$ mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ zu gewichten und anschließend die Summe zu bilden, da diese immer den Wert null hat, wie folgende Überlegung zeigt:

$$
\begin{aligned}
& (x_1 - \mu) \cdot P(X = x_1) + (x_2 - \mu) \cdot P(X = x_2) + \ldots + (x_n - \mu) \cdot P(X = x_n) \\
= \; & x_1 \cdot P(X = x_1) - \mu \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) - \mu \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n) - \mu \cdot P(X = x_n) \\
= \; & \underbrace{x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)}_{\mu} - \mu \cdot \underbrace{\left[P(X = x_1) + P(X = x_2) + \ldots + P(X = x_n)\right]}_{1} \\
= \; & 0
\end{aligned}
$$



Ersetzt man die Abweichungen $x_i - \mu$ durch ihre Beträge $|x_i - \mu|$ oder Quadrate $(x_i - \mu)^2$, so nimmt die entsprechende Summe einen Wert ungleich null an, da das Vorzeichen von $x_i - \mu$ nicht mehr ins Gewicht fällt. Man hat sich bei der Definition des Streuungsmaßes für die Quadrate entschieden.

Definition: Ist X eine Zufallsgröße, deren mögliche Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind und die den Erwartungswert $E(X) = \mu$ hat, so heißt die reelle Zahl
$\mathrm{Var}(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + (x_2 - \mu)^2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n)$
Varianz der Zufallsgröße X.

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

Die Werte einer Zufallsgröße sind häufig Maßzahlen einer Größe (z. B. €). Folglich ist die Varianz von X die Maßzahl einer Größe, die im Quadrat (z. B. $€^2$) gemessen wird. Da dies in der Praxis sehr unanschaulich ist, wird ein weiteres Streuungsmaß eingeführt.

Definition: Die reelle Zahl $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ heißt **Standardabweichung der Zufallsgröße** X.

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Bezeichnungen: Statt $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ schreibt man häufig kürzer σ (lies: sigma). Die Varianz wird daher auch mit σ^2 bezeichnet.

Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung können mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms bestimmt werden. In der Abbildung wurde die Formelansicht verwendet.

	A	B	C	D	E
1	x_i	$P(X = x_i)$			
2	0,6	0,25	=A2*B2	=(C6-A2)^2*B2	
3	1,8	0,4	=A3*B3	=(C6-A3)^2*B3	
4	3	0,15	=A4*B4	=(C6-A4)^2*B4	
5	5,5	0,2	=A5*B5	=(C6-A5)^2*B5	
6			=SUMME(C2:C5)	=SUMME(D2:D5)	=WURZEL(D6)

μ σ^2 σ

Für den Erwartungswert und die Varianz gibt es in einem Tabellenkalkulationsprogramm auch eigene Befehle.

Beispiel 1

Bestimmen Sie für den zweifachen Wurf eines Würfels den Erwartungswert der Zufallsgröße „Augensumme“.

Lösung

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$\mu = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + 4\cdot\frac{3}{36} + 5\cdot\frac{4}{36} + 6\cdot\frac{5}{36} + 7\cdot\frac{6}{36} + 8\cdot\frac{5}{36} + 9\cdot\frac{4}{36} + 10\cdot\frac{3}{36} + 11\cdot\frac{2}{36} + 12\cdot\frac{1}{36} = 7$$

Beispiel 2

Ein Würfel wird einmal geworfen. Die Zufallsgröße X ist die Augenzahl. Bestimmen Sie Varianz und Standardabweichung von X.

Lösung

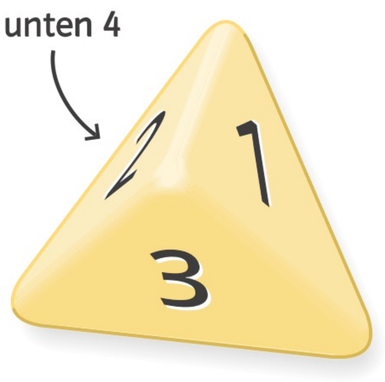
$$\mu = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

$$\sigma^2 = \left(1 - \frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6} + \left(2 - \frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6} + \left(3 - \frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6} + \left(4 - \frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6} + \left(5 - \frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6} + \left(6 - \frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6} = \frac{35}{12}$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1{,}71$$

Aufgaben

1 Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung der Zufallsgröße „Augenzahl“ beim Wurf eines Tetraeders.



2 Eine Zufallsgröße X nimmt nur die in der Tabelle angegebenen Werte x_i jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ an.

a) Bestimmen Sie $P(X = 1)$ und den Erwartungswert der Zufallsgröße X.

b) Bestimmen Sie die Varianz von X.

x_i	$P(X = x_i)$
−2	0,05
0	0,25
1	
3,5	0,45

3 Beim Spiel „Mensch ärgere Dich nicht“ ist in der dargestellten Situation der Spieler mit den grünen Figuren an der Reihe. Er hat also maximal drei Versuche, eine Sechs zu würfeln. Die Zufallsgröße V gibt die Anzahl der Versuche an.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von V.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert von V und interpretieren Sie dessen Wert.

→ Strategie | Seite 256
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

4 Bestimmen Sie beim zweifachen Wurf eines Würfels Varianz und Standardabweichung der Zufallsgröße „Augensumme“ mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms.

5 Berechnen Sie Varianz und Standardabweichung der Zufallsgröße.

→ Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

a)

x_i	−2	0	2	4
$P(X = x_i)$	0,5	0,2	0,2	0,1

b)

y_i	−3	−2	−1	0	1	2
$P(Y = y_i)$	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

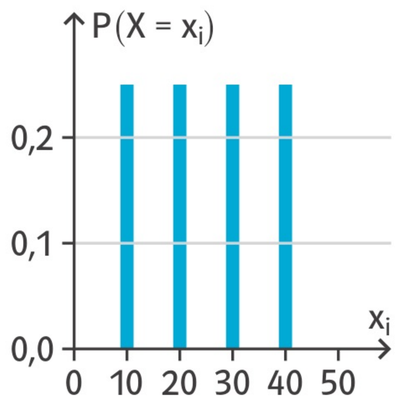
6 Aus dem Satz „Die Varianz ist eine reelle Zahl“ wird zufällig ein Wort ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt die Wortlänge an und die Zufallsgröße Y die Anzahl der Konsonanten des Worts. Bestimmen Sie jeweils Erwartungswert und Varianz von X und Y.

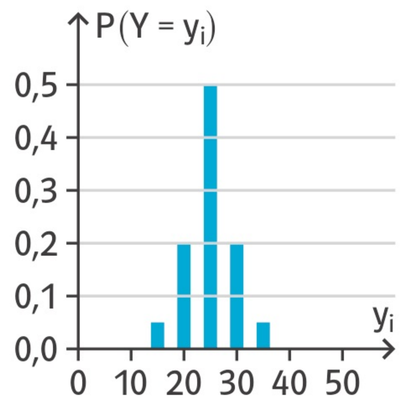
7 Celia erhält als Erwartungswert einer Zufallsgröße die Zahl 4,2. Tabea meint: „Celia muss sich verrechnet haben, da alle Werte der Zufallsgröße ganzzahlig sind.“ Nehmen Sie zu Tabeas Aussage Stellung.

8 Gegeben sind die Zufallsgrößen X und Y sowie deren Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Berechnen Sie den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von X.

a) Begründen Sie, dass beide Zufallsgrößen den gleichen Erwartungswert haben.

b) Erläutern Sie anhand der Säulendiagramme, dass die Varianz von X größer als die Varianz von Y ist.





Test 1

Lösungen | Seite 278

9 In einem Mehrfamilienhaus gibt es vier Haushalte. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Haushalte an, in denen jemand zur Mittagszeit anzutreffen ist.

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Paket um die Mittagszeit abgegeben werden kann, wenn in mindestens einem der vier Haushalte eine Person angetroffen wird.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X und interpretieren Sie ihn im Sachzusammenhang.

c) Berechnen Sie die Standardabweichung von X.

10 Die Zufallsgröße X nimmt die Werte −1; 2 und 3 an. Weiter gilt $P(X = 2) = 0{,}2$ und $\mu = 1{,}7$.

a) Berechnen Sie $P(X = -1)$ und $P(X = 3)$. **b)** Bestimmen Sie die Varianz von X.

Strategie | Seite 259
Aufstellen und Lösen eines Gleichungssystems

11 Zwei Ober und zwei Unter eines Schafkopfblatts werden gemischt und verdeckt auf den Tisch gelegt. Man zieht ohne Zurücklegen eine Karte nach der anderen, bis der erste Ober erscheint.

a) Geben Sie an, wie oft man maximal ziehen muss.

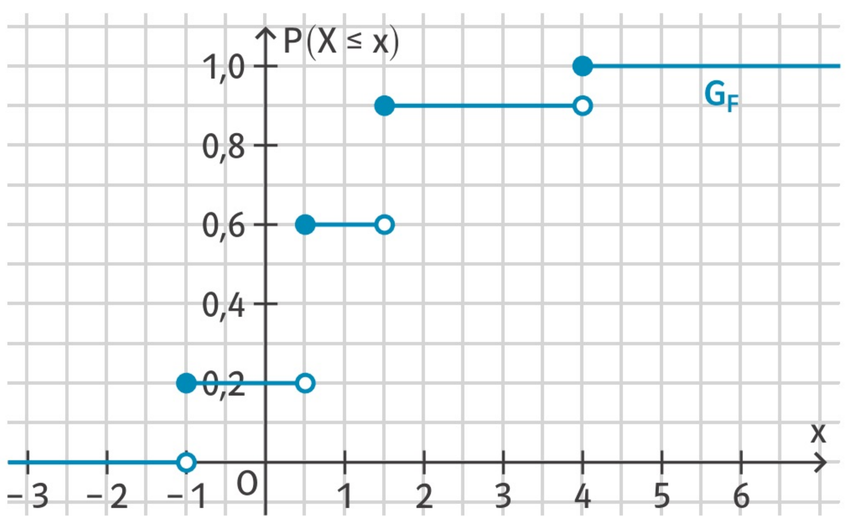
b) Bestimmen Sie, wie oft man im Mittel ziehen muss.

12 Gegeben ist der Graph der kumulativen Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße X.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X.

b) Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung von X.

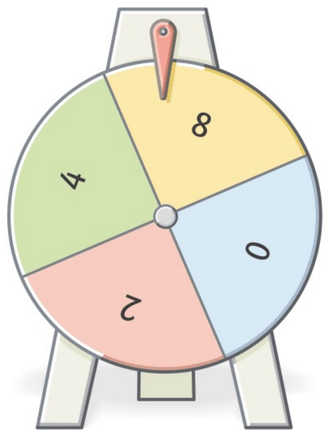
c) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms.



13 Ein Glücksrad hat vier Sektoren, in denen jeweils die Zahlen 0, 2, 4 bzw. 8 stehen. Die Zahlen in den Sektoren geben die Auszahlung pro Spiel in Euro an.

a) Bestimmen Sie, wie hoch der Einsatz sein muss, damit das Spiel fair ist, wenn alle Sektoren die gleiche Größe haben.

b) Der Einsatz bei einem fairen Spiel beträgt 2,50 €. Bestimmen Sie eine Möglichkeit für die Größe der Mittelpunktswinkel der zugehörigen Sektoren. Beschreiben Sie, wie Sie dabei vorgehen.



14 Die Varianz einer Zufallsgröße X hat den Wert 0. Beschreiben Sie ein zugehöriges Zufallsexperiment.

15 Beurteilen Sie folgende Aussage: „Da die Standardabweichung die Wurzel aus der Varianz ist, kann der Wert der Standardabweichung höchstens so groß wie die Varianz sein."

16 Eine Zufallsgröße X kann die Werte $a = 1; 2$ oder 3 annehmen. Zudem gilt $P(X = a) = \frac{4 - a}{b}$, wobei $b \in \mathbb{R}^+$ ist. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

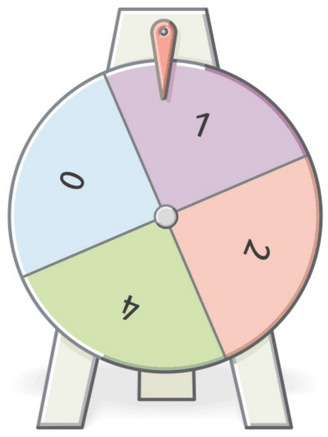
17 Die Zufallsgröße X nimmt die Werte $-2; 0; 3$ und 8 an. Weiter gilt $P(X = -2) = 0{,}3$; $P(X = 0) = 0{,}1$; $P(X = 3) = 0{,}4$; und $P(X = 8) = 0{,}2$. Berechnen Sie $\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot P(X = x_i)$ und $\sum_{i=1}^{4} (E(X) - x_i)^2 \cdot P(X = x_i)$. Geben Sie jeweils die Bedeutung der Summe an.

18 Der Erwartungswert des Gewinns bei einem fairen Spiel soll den Wert null haben. Erläutern Sie, dass diese Festlegung sinnvoll ist.

19 In einer Glücksbude steht das abgebildete Glücksrad, auf dessen gleich großen Sektoren jeweils der Auszahlungsbetrag in Euro eingetragen ist.

a) Bestimmen Sie den Einsatz, den der Glücksbudenbesitzer mindestens verlangen muss, um auf lange Sicht keinen Verlust zu machen.

b) Der Betreiber möchte im Mittel pro Stunde 15 € mit dem Glücksrad verdienen. Bestimmen Sie den Einsatz, wenn man davon ausgeht, dass das Glücksrad alle zwei Minuten gedreht wird.



20 Eine Münze mit den Seiten 1 und 0 wird so lange geworfen, bis eine Null oder drei Einsen erscheinen. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Würfe an. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X.

→ Strategie | Seite 256
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

21 Eine Zufallsgröße X kann nur die beiden Werte 1 oder 0 annehmen, wobei $P(X = 1) = p$ und $P(X = 0) = 1 - p$ gilt. Bestimmen Sie Erwartungswert und Standardabweichung von X in Abhängigkeit von p.

22 Cem und Hannah spielen Roulette. Cem setzt 10 € auf die 13 und Hannah 10 € auf „gerade“. Die Zufallsgrößen G_C und G_H geben jeweils den Gewinn in Euro an.

a) Recherchieren Sie die Regeln des Roulette-Spiels und bestimmen Sie für beide Zufallsgrößen Erwartungswert und Varianz.

b) Erläutern Sie, dass Cem und Hannah bei gleichbleibender Spielweise auf lange Sicht denselben Betrag verlieren.

c) Diskutieren Sie miteinander, ob man Cem als risikofreudiger bezeichnen kann.

Test 2

→ Lösungen | Seite 278

23 Eine Firma stellt Teile her, die zu 95 % einwandfrei sind. Die Herstellungskosten betragen 10 € pro Teil. Ist ein Teil nicht einwandfrei, so kann der Kunde das Teil entsorgen und bekommt kostenlos ein von der Firma getestetes einwandfreies Teil. Bestimmen Sie den Preis, zu dem die Firma ihre Teile anbieten muss, wenn sie pro einwandfreies Teil einen Gewinn von 0,50 € erzielen will.

24 Eine Zufallsgröße X nimmt die Werte -1; 0 und 2 an. Es gilt $P(X = -1) = a$, $P(X = 0) = b$ und $P(X = 2) = c$. Der Erwartungswert von X ist 1 und die Varianz von X beträgt 1,6. Bestimmen Sie die Werte von a, b und c.

Grundwissen Test

→ Lösungen | Seite 278

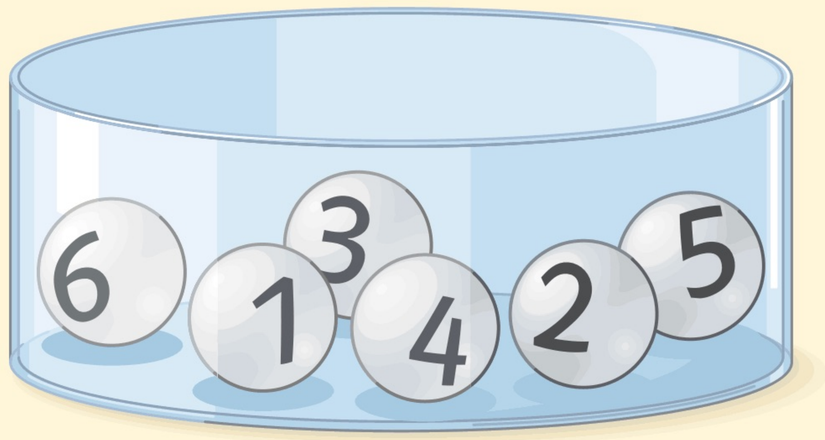
G 25 Das Dreieck ABC hat die Eckpunkte $A(4|-1)$, $B(1|3)$ und $C(-7|-3)$.

a) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks exakt.

b) Begründen Sie, dass das Dreieck rechtwinklig ist.

3 Ziehen aus einer Urne mit Beachtung der Reihenfolge

Die Urne enthält sechs Kugeln, die mit den Ziffern 1 bis 6 beschriftet sind. Aus der Urne werden jeweils vier Kugeln gezogen, einmal mit und einmal ohne Zurücklegen. Die Ziffern werden in der gezogenen Reihenfolge notiert und bilden eine Zahl. Bestimmen Sie jeweils die Anzahl der Zahlen, die so gebildet werden können.

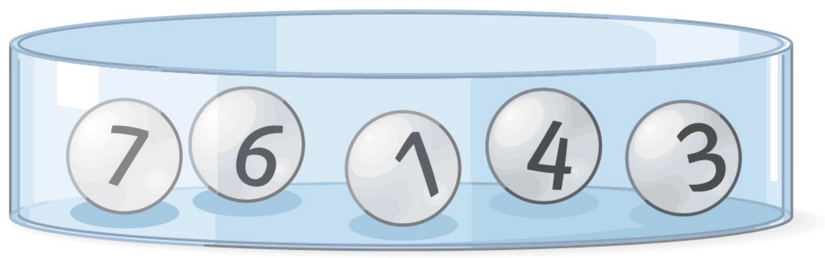


Viele Zufallsexperimente lassen sich durch Urnenexperimente simulieren. Bei den Urnenexperimenten beschränkt man sich dabei auf das Wesentliche des Zufallsgeschehens.
Urnenexperimente werden hinsichtlich folgender Kriterien unterschieden:
- Die Kugeln werden mit bzw. ohne Zurücklegen gezogen.
- Die Reihenfolge der gezogenen Kugeln wird berücksichtigt bzw. nicht berücksichtigt.

Im Folgenden betrachtet man zunächst Urnen mit paarweise unterscheidbaren Kugeln und beachtet beim Ziehen aus der Urne die Reihenfolge der gezogenen Kugeln.

„Paarweise unterscheidbar“ bedeutet, dass je zwei Kugeln unterscheidbar sind.

Eine Urne enthält fünf Kugeln, die mit 1, 3, 4, 6 und 7 beschriftet sind. Aus dieser Urne wird dreimal eine Kugel gezogen und die entstehende Zahl in der Reihenfolge der Ziehungen notiert.



Ziehen mit Zurücklegen
In diesem Fall sind die Ergebnisse Tripel wie z. B. (1; 3; 3). Statt aus einer Urne dreimal mit Zurücklegen zu ziehen, kann man sich auch vorstellen, aus drei gleichen Urnen jeweils einmal zu ziehen. Nach dem Zählprinzip gibt es $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$ Tripel.

Ziehen ohne Zurücklegen
In diesem Fall erhält man auch Tripel, wie z. B. (1; 6; 3). Im Unterschied zum Ziehen mit Zurücklegen verringert sich die Anzahl der Möglichkeiten bei jedem Zug um 1.
Nach dem Zählprinzip erhält man also $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Tripel.

Zur Erinnerung:
Zählprinzip oder Produktregel: Gibt es beim
1. Zug m_1 Möglichkeiten, beim
2. Zug m_2 Möglichkeiten und beim
3. Zug m_3 Möglichkeiten, so gibt es insgesamt $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$ Möglichkeiten.

Ziehen mit Beachtung der Reihenfolge
Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln wird k-mal eine Kugel gezogen. Die gezogenen Kugeln werden in der Reihenfolge des Ziehens notiert.

Ziehen mit Zurücklegen
Es sind $\mathbf{n^k}$ verschiedene Ergebnisse (k-Tupel) möglich.

Ziehen ohne Zurücklegen
Es sind $\mathbf{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}$ verschiedene Ergebnisse (k-Tupel) möglich.

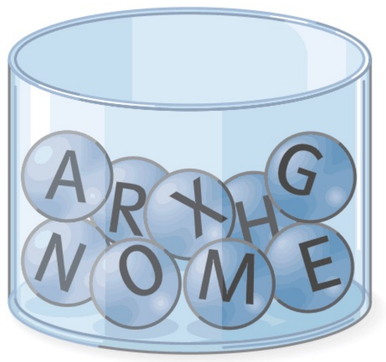
Zur Erinnerung:
Ein k-Tupel ist eine Liste von k Zahlen, bei der die Reihenfolge der Zahlen von Bedeutung ist.

Bemerkungen:
Zieht man aus einer Urne mit unterscheidbaren Kugeln zufällig und beachtet dabei die Reihenfolge der gezogenen Kugeln, dann handelt es sich um ein Laplace-Experiment unabhängig davon, ob mit oder ohne Zurücklegen gezogen wird.
Werden alle Kugeln nacheinander aus der Urne ohne Zurücklegen gezogen, so ist $k = n$. Die Anzahl der unterschiedlichen Reihenfolgen gibt dann an, auf wie viele verschiedene Arten n Elemente angeordnet werden können. Jede Anordnung bezeichnet man auch als eine **Permutation** der n Elemente. Die Anzahl der Permutationen von n Elementen beträgt damit
$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

Mit der Taste nPr am Taschenrechner kann man das Produkt $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$ berechnen.

Zur Erinnerung:
Fakultät:
$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
$0! = 1$

Beispiel 1



Aus der Urne werden nacheinander drei Kugeln gezogen.

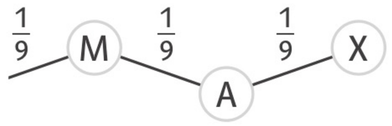
a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei das Wort „MAX“ entsteht, wenn
(1) mit Zurücklegen gezogen wird, (2) ohne Zurücklegen gezogen wird.

b) Es werden drei Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Wort „MAX“ entsteht, wenn man anschließend die Reihenfolge der gezogenen Buchstaben noch ändern kann.

Lösung

a) (1) Es gibt 9 verschiedene Buchstaben, also gibt es $9^3 = 729$ mögliche „Wörter“.
„MAX“ ist genau eines der 9^3 Wörter. Also gilt $P(\text{„MAX“}) = \frac{1}{9^3} = \frac{1}{729}$.

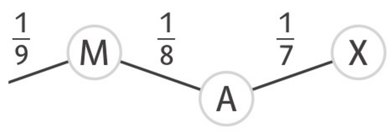
Alternative Lösung mit Baumdiagramm:



$P(\text{„MAX“}) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9^3} = \frac{1}{729}$.

(2) Insgesamt können $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ „Wörter“ gebildet werden.
Also ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit $P(\text{„MAX“}) = \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{504}$.

Alternative Lösung mit Baumdiagramm:



$P(\text{„MAX“}) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{504}$.

b) Es gibt $3! = 6$ Permutationen von „MAX“, also 6 „Wörter“, die aus den 3 Buchstaben bestehen.
Somit ergibt sich $P(\text{„MAX“}) = \frac{3!}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{6}{504} = \frac{1}{84}$.

Beispiel 2

Abdul, Branka, Clara und Daniel setzen sich in zufälliger Reihenfolge auf eine Parkbank.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Daniel links außen sitzt. Geben Sie zunächst ein passendes Urnenmodell an.

b) Bestimmen Sie mithilfe eines geeigneten Urnenmodells die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Abdul neben Branka und Clara neben Daniel sitzt.

Lösung

a) In einer Urne sind vier Kugeln, die die Buchstaben A, B, C und D tragen. Es werden nacheinander vier Kugeln ohne Zurücklegen gezogen, wobei die Reihenfolge angibt, wie die Personen von links nach rechts auf der Bank sitzen.
Anzahl der Möglichkeiten insgesamt: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Anzahl der Möglichkeiten, dass Daniel links außen sitzt: $1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.
$P(\text{„Daniel sitzt links außen.“}) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.
Alternative Lösung: In einer Urne sind vier Kugeln, die die Buchstaben A, B, C und D tragen. Die erste gezogene Kugel belegt den Platz links außen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die mit D beschriftete Kugel als erste gezogen wird, beträgt $\frac{1}{4}$.

b) Gesucht wird die Anzahl der Reihenfolgen, bei denen die angegebenen Paare nebeneinandersitzen.
Der Platz links außen wird als Erstes vergeben. Dort kann jede Person sitzen. Also gibt es 4 Möglichkeiten, den Platz zu besetzen. Auf dem folgenden Platz muss der Partner der Person vom ersten Platz sitzen. Dafür gibt es 1 Möglichkeit. Auf dem dritten Platz kann eine der beiden verbliebenen Personen sitzen. Dafür gibt es 2 Möglichkeiten. Für den letzten Platz bleibt eine Person übrig, wofür es 1 Möglichkeit gibt.
Anzahl der passenden Reihenfolgen:
$4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 8$. Wahrscheinlichkeit für eine passende Reihenfolge: $p = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.

Alternative Lösung durch systematisches Probieren

Außen links	Mitte links	Mitte rechts	Außen rechts
A	B	C	D
A	B	D	C
B	A	C	D
B	A	D	C
C	D	A	B
C	D	B	A
D	C	A	B
D	C	B	A

→ Strategie | Seite 256 Systematisches Probieren

Aufgaben

1 Beschreiben Sie zu jeder Teilaufgabe zunächst ein passendes Urnenmodell.

→ Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

a) Ein Test besteht aus acht Fragen, wobei es zu jeder Frage drei Antworten gibt, von denen jeweils eine richtig ist. Bestimmen Sie, wie viele Möglichkeiten es zum Ankreuzen gibt.

b) Bestimmen Sie die Anzahl dreistelliger Zahlen, die man mit den Ziffern 4, 5, 6, 7 und 8 schreiben kann, wenn keine Ziffer wiederholt auftreten darf.

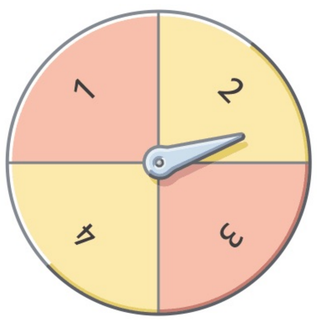
c) Ein Byte besteht aus 8 Bits. Jedes Bit kann mit 0 oder 1 belegt werden. Bestimmen Sie die Anzahl möglicher Bytes.

d) An einem 100-m-Lauf nehmen acht Läufer teil, die nacheinander durchs Ziel laufen. Bestimmen Sie die Anzahl der Reihenfolgen, die für die ersten drei Plätze möglich sind.

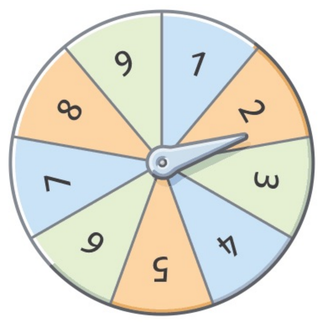
e) David hat für seine sechs Hefte Umschläge in vier verschiedenen Farben zur Verfügung. Berechnen Sie die Anzahl verschiedener Möglichkeiten, die Hefte einzubinden.

2 Jedes der beiden Glücksräder I bzw. II wird dreimal gedreht; man erhält nacheinander die Hunderter-, Zehner- und Einerziffer einer dreistelligen Zahl.

I



II



a) Beschreiben Sie das Zufallsexperiment zu Glücksrad I bzw. II mit einem Urnenmodell.

b) Bestimmen Sie zu Glücksrad I bzw. II die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man

(1) die Zahl 432 erhält,

(2) eine Zahl mit drei gleichen Ziffern erhält,

(3) eine Zahl, bei der mindestens zwei Ziffern verschieden sind, erhält,

(4) eine Zahl, die nur aus ungeraden Ziffern besteht, erhält.

→ Strategie | Seite 258
Betrachten von etwas Gegenteiligem

3 Für eine Trikolore (dreifarbige Fahne) stehen sechs Farben zur Verfügung. Begründen Sie:

a) Es gibt 120 Möglichkeiten, wenn jeder Streifen eine andere Farbe hat.

b) Es gibt 150 Möglichkeiten, wenn benachbarte Streifen verschiedenfarbig sind.

4 Eine Tastatur verfügt über 26 Kleinbuchstaben, 26 Großbuchstaben, zehn Ziffern und 21 Sonderzeichen. Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Passwörter

a) aus acht Zeichen,

b) aus acht Zeichen, wenn kein Zeichen doppelt vorkommen soll.

Test 1

→ Lösungen | Seite 278

5 Sascha hat eine Schachtel Pralinen mit zehn Sorten à fünf Stück. Er isst nacheinander vier Pralinen.

a) Bestimmen Sie die Anzahl möglicher Reihenfolgen der Pralinensorten.

b) Bestimmen Sie die Anzahl möglicher Reihenfolgen der Pralinensorten, wenn keine Sorte mehrfach vorkommt.

6 Die Wochentage der Geburtstage in einer fünfköpfigen Familie werden betrachtet.

a) Geben Sie die Anzahl der Möglichkeiten an, die Geburtstage der fünfköpfigen Familie auf die Wochentage zu verteilen.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Mitglieder der Familie an verschiedenen Wochentagen Geburtstag haben. Geben Sie die Voraussetzung an, von der Sie dabei ausgehen.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei Familienmitglieder am gleichen Wochentag Geburtstag haben.

→ Strategie | Seite 258
Betrachten von etwas Gegenteiligem

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Familienmitglieder entweder alle am Montag oder alle am Freitag Geburtstag haben.

7 Morsezeichen bestehen aus Punkten und Strichen.

a) Berechnen Sie die Anzahl der Zeichen, die man bilden kann, wenn jedes Zeichen
(1) aus genau vier Punkten und Strichen besteht,
(2) aus höchstens vier Punkten und Strichen besteht.

b) Geben Sie die Zeichenfolge für das Notsignal SOS an.

Morsealphabet:

A	● ▬
B	▬ ● ● ●
C	▬ ● ▬ ●
D	▬ ● ●
E	●
…	…
O	▬ ▬ ▬
…	…
S	● ● ●
…	…
Z	▬ ▬ ● ●

8 Eine Playlist umfasst zehn Titel. Beim Abspielen wird die Zufallswiedergabe verwendet.

a) Bestimmen Sie die Anzahl möglicher Reihenfolgen, wenn die ersten drei gespielten Titel mit der Reihenfolge der ersten drei Titel der Playlist identisch sind.

b) Bestimmen Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ersten drei gespielten Titel mit der Reihenfolge der ersten drei Titel der Playlist identisch sind.

9 Aylin, Clara, Noah und Paul setzen sich in zufälliger Reihenfolge auf eine Parkbank.

a) Geben Sie ein Urnenmodell an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
(1) Aylin und Clara zwischen Noah und Paul sitzen,
(2) Noah zwischen Aylin und Clara sitzt,
(3) die Frauen nebeneinandersitzen.

b) Geben Sie in Analogie zu Teilaufgabe a) eine Aufgabe vor und bestimmen Sie gegenseitig die zugehörige Wahrscheinlichkeit.

10 Abgebildet ist ein Kfz-Kennzeichen aus München. Es enthält das M für die Stadt München und danach eine Erkennungsnummer. Diese besteht aus einem oder zwei Buchstaben (keine Umlaute) und einer höchstens vierstelligen Zahl größer null.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der theoretisch möglichen Kfz-Kennzeichen in München.

b) Recherchieren Sie gemeinsam, welche Buchstabenkombinationen nicht erlaubt sind, und erläutern Sie, warum dies so ist.

Test 2

→ Lösungen | Seite 278

11 Eine Münze wird 10-mal geworfen und es wird jedes Mal notiert, ob Wappen oder Zahl fällt.

a) Berechnen Sie die Anzahl möglicher Reihenfolgen.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man
(1) entweder nur Wappen oder nur Zahl erhält, (2) zuerst 5-mal Wappen erhält,
(3) zuerst 5-mal Wappen und dann 5-mal Zahl erhält.

12 **a)** Berechnen Sie für $n = 8$ und $k = 5$ die Werte der Terme $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ und $\frac{n!}{(n-k)!}$.

b) Begründen Sie, dass $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ gilt.

13 Drei Personen nehmen auf sechs nebeneinanderstehenden Stühlen zufällig Platz. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, wie sich die Personen setzen können,

a) wenn es keine Einschränkung bei der Platzwahl gibt,

b) wenn die unbesetzten Stühle nebeneinanderstehen,

c) wenn mindestens zwei unbesetzte Stühle nebeneinanderstehen.

→ Strategie | Seite 256
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

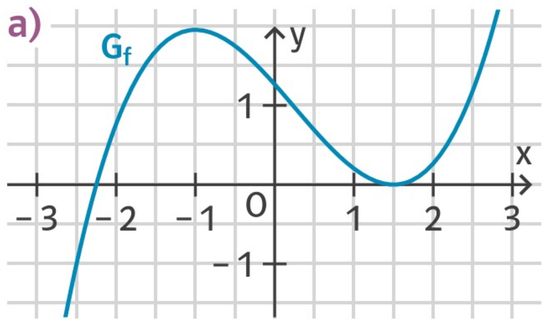
Grundwissen Test

→ Lösungen | Seite 278

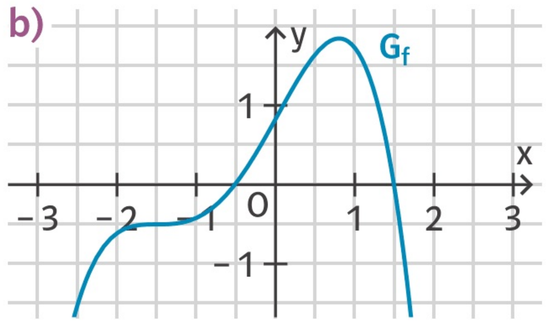
G 14 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f. Skizzieren Sie den Graphen von f' in Ihr Heft.

→ Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

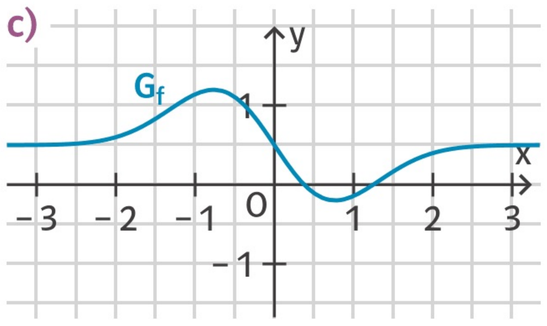
a)



b)



c)



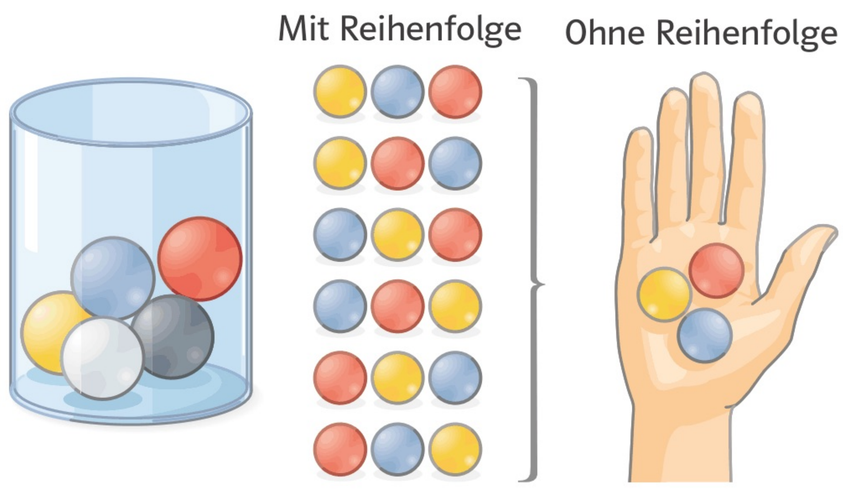
4 Ziehen aus einer Urne ohne Beachtung der Reihenfolge

Unter den 15 Teilnehmenden eines Sportseminars werden drei Eintrittskarten für ein Fußballspiel verlost. Auf wie viele verschiedene Arten kann die Verlosung ausgehen, wenn es sich

a) um drei nummerierte Sitzplätze handelt,

b) um drei Stehplätze handelt?

Zieht man aus der Urne drei Kugeln der Reihe nach ohne Zurücklegen, so erhält man $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ mögliche Ergebnisse. Lässt man die Reihenfolge außer Acht, zieht also z. B. mit einem Griff, dann können jeweils sechs der obigen Ergebnisse (mit Reihenfolge) nicht mehr unterschieden werden, da drei Kugeln auf $3! = 6$ verschiedene Arten angeordnet werden können.



Je 3! Ergebnissen mit Reihenfolge entspricht ein neues Ergebnis ohne Reihenfolge. Die Anzahl der Ergebnisse ohne Beachtung der Reihenfolge erhält man also durch Division der 60 Ergebnisse mit Beachtung der Reihenfolge durch 3!. Somit ergeben sich $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!}$ Ergebnisse ohne Beachtung der Reihenfolge. Dieser Lösungsweg kann verallgemeinert werden.

Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge

Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln werden k Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge, z. B. mit einem Griff, gezogen.

Dann gibt es $\mathbf{\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}}$ mögliche Ergebnisse.

k Faktoren

$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!}$ Ergebnisse

n k

Die obige Anzahl lässt sich auch wie folgt berechnen:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Diese Anzahl bekommt aufgrund ihrer großen Bedeutung eine eigene Bezeichnung.

Definition: Für $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$ heißt $\mathbf{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}$ **Binomialkoeffizient** (lies „k aus n“ oder „n über k“).

Die Anzahlen $\binom{n}{k}$ treten bei der Berechnung des Binoms $(a+b)^n$ auf. Daher rührt die Bezeichnung Binomialkoeffizient.

$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$

Da $0! = 1$ festgelegt ist, gilt $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$.

Beim Ziehen von k Kugeln aus n unterscheidbaren Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge gibt es somit $\binom{n}{k}$ mögliche Ergebnisse.

Für Binomialkoeffizienten gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, da $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$ ist.

Binomialkoeffizienten können auch mit dem Taschenrechner ermittelt werden.

Taschenrechner: nCr

Bemerkung:

Das Ziehen mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge betrachten wir nicht.

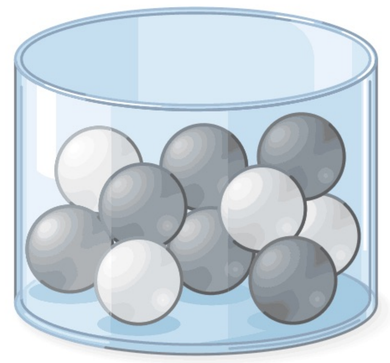
Ziehen mit einem Griff aus einer Urne mit ausschließlich schwarzen und weißen Kugeln

Viele Situationen lassen sich durch Urnen modellieren, die nur zwei Arten von Kugeln enthalten. Im Folgenden wird exemplarisch eine Urne mit sechs schwarzen und vier weißen Kugeln betrachtet. Es werden fünf Kugeln mit einem Griff, also ohne Zurücklegen, gezogen. Man bestimmt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau drei schwarze darunter sind.

Zur Lösung denkt man sich die zehn Kugeln durchnummeriert. Die schwarzen Kugeln tragen die Nummern von 1 bis 6, die weißen von 7 bis 10. Alle Kugeln sind jetzt wieder unterscheidbar, sodass man auf die oben gemachten Überlegungen zurückgreifen kann. Insgesamt gibt es also $\binom{10}{5}$ gleich wahrscheinliche Möglichkeiten, fünf Kugeln aus den zehn auszuwählen. Für die Anzahl der günstigen Ereignisse gilt: Es gibt $\binom{6}{3}$ Möglichkeiten, drei Kugeln aus den sechs schwarzen auszuwählen. Für jede dieser $\binom{6}{3}$ Möglichkeiten gibt es noch $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten, die restlichen zwei weißen Kugeln aus den vier weißen auszuwählen. Nach dem Zählprinzip gilt für die Anzahl der günstigen Ereignisse $\binom{6}{3} \cdot \binom{4}{2}$.

Da es sich um ein Laplace-Experiment handelt, gilt $P(\text{„Genau drei schwarze Kugeln.“}) = \dfrac{\binom{6}{3} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{10}{5}}$.

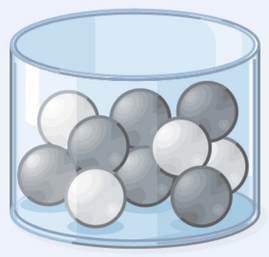
Das obige Vorgehen lässt sich unmittelbar verallgemeinern.



Bei Modellierungen wie dieser stehen z. B. die schwarzen Kugeln häufig für das Vorliegen einer bestimmten Eigenschaft. Es wird beim Ziehen betrachtet, ob diese Eigenschaft vorliegt oder nicht.

Satz: Aus einer Urne mit N Kugeln, von denen S schwarz sind, werden n Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge, z. B. mit einem Griff, gezogen. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl s der gezogenen schwarzen Kugeln an.

Dann gilt $\mathbf{P(X = s) = \dfrac{\binom{S}{s} \cdot \binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}}}$.



$N = 10$
$S = 6$
$N - S = 4$

Zum Beispiel fünf Ziehungen ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolge: $n = 5$.
Für z. B. $s = 3$, also $n - s = 2$, gilt

$P(X = 3) = \dfrac{\binom{6}{3} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{10}{5}} = \dfrac{10}{21}$.

Beispiel 1

Auf einem Parkplatz gibt es 20 Parkplätze, von denen zwölf belegt sind. Bestimmen Sie, auf wie viele Arten dies möglich ist, wenn die Fahrzeuge nicht unterschieden werden. Geben Sie zunächst ein passendes Urnenexperiment an.

Lösung

In einer Urne sind 20 nummerierte Kugeln. Sie stehen für die Parkplätze.
Es werden zwölf Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge, z. B. mit einem Griff, gezogen.

Folglich gibt es $\binom{20}{12} = 125\,970$ Möglichkeiten.

Beispiel 2

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, beim Lotto „6 aus 49“ mindestens vier Richtige zu tippen. Beschreiben Sie zunächst ein geeignetes Urnenexperiment.

Lösung

Eine Urne enthält 49 Kugeln, von denen sechs schwarz und 43 weiß sind. Es werden sechs Kugeln mit einem Griff gezogen. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der schwarzen Kugeln bei einer Ziehung an.

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} + \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} + \frac{\binom{6}{6} \cdot \binom{43}{0}}{\binom{49}{6}}$$

$$= \frac{15 \cdot 903}{13\,983\,816} + \frac{6 \cdot 43}{13\,983\,816} + \frac{1 \cdot 1}{13\,983\,816} \approx \frac{1}{1000}$$

Beim Lotto werden aus einer Lostrommel mit 49 nummerierten Kugeln sechs gezogen. Dabei ist die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, nicht von Bedeutung.

Aufgaben

1 **a)** Berechnen Sie $\binom{7}{4}$, $\binom{11}{5}$, $\binom{12}{10}$, $\binom{12}{2}$, $\binom{20}{15}$ und $\binom{1000}{998}$.

b) Erläutern Sie, ohne zu rechnen, die Gültigkeit der Gleichungen $\binom{11}{1} = \binom{11}{10}$ und $\binom{11}{4} = \binom{11}{7}$.

2 Beschreiben Sie zunächst bei jeder Teilaufgabe ein geeignetes Urnenmodell.
Bestimmen Sie, wie viele Möglichkeiten es gibt,

a) aus zehn Personen einen Ausschuss von vier Personen zu bilden,

b) aus 120 Mitgliedern der „Blauen Funken" einen Elferrat zu bilden,

c) aus einer Klasse mit 15 Mädchen und zehn Jungen eine Gruppe von zwei Mädchen und zwei Jungen auszuwählen.

→ Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

3 In einem Zeltlager mit 20 Teilnehmenden soll eine Dreiergruppe zum Einkaufen geschickt werden. Dazu werden drei Personen ausgelost. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür,

a) dass Adriana, Bea und Christian ausgelost werden,

b) dass keine der in Teilaufgabe a) genannten Personen ausgelost wird.

Beschreiben Sie auch jeweils ein geeignetes Urnenexperiment.

4 Jakob spielt mit drei Freunden Schafkopf. Das Blatt besteht aus insgesamt 32 Karten. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Jakob genau drei Ober bekommt.

Test 1

→ Lösungen | Seite 279

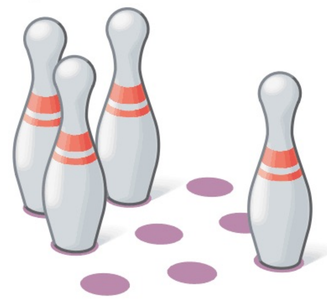
5 Beim Kegeln werden neun Kegel aufgestellt.

a) Bestimmen Sie die Anzahl verschiedener Wurfbilder, wenn jeweils fünf Kegel fallen. Geben Sie zunächst ein geeignetes Urnenmodell an.

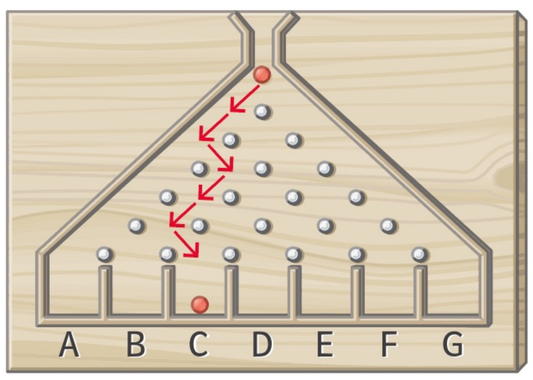
b) Bestimmen Sie die Anzahl verschiedener Wurfbilder, wenn jeweils vier Kegel fallen.

c) Zeigen Sie, dass es 2^9 verschiedene Wurfbilder gibt, wenn 0, 1, 2, …, 9 verschiedene Kegel fallen können.

Mögliches Wurfbild:



6 Bei einem Galton-Brett fällt eine Kugel durch ein Brett mit Zapfen. An jedem Zapfen wird sie entweder nach links (l) oder rechts (r) abgelenkt. Bestimmen Sie jeweils die Anzahl der möglichen Wege, die zu den Behältern A bis G führen, und geben Sie ein passendes Urnenexperiment an.



7 Katharina weiß, dass sich unter 200 Losen einer Tombola genau 50 Gewinnlose befinden.

a) Sie kauft gleich zu Beginn der Lotterie 20 Lose. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie
(1) genau fünf Gewinnlose hat, (2) keinen Gewinn hat, (3) mindestens ein Gewinnlos hat.

b) Katharina hat erfahren, dass die Hälfte der Lose bereits verkauft wurde. Sie kauft 20 Lose. Diskutieren Sie, ob sich Katharinas Gewinnchancen geändert haben.

→ Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

8 **Abiturprüfung 2021 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1**
An einem Samstagvormittag kommen nacheinander vier Familien zum Eingangsbereich eines Freizeitparks. Jede der vier Familien bezahlt an einer der sechs Kassen, wobei davon ausgegangen werden soll, dass jede Kasse mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewählt wird. Beschreiben Sie im Sachzusammenhang zwei Ereignisse A und B, deren Wahrscheinlichkeiten sich mit den folgenden Termen berechnen lassen:

$$P(A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4}; \quad P(B) = \frac{6}{6^4}$$

9 Bestimmen Sie beim Lotto „6 aus 49“ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie bei einem Tipp

a) genau drei richtige Zahlen haben,
b) höchstens drei richtige Zahlen haben,
c) keine richtige Zahl haben,
d) mindestens eine richtige Zahl haben.

10 In einer Bar gibt es 26 Tapas, wovon 16 vegetarisch sind. Begründen Sie, dass $\binom{16}{7} \cdot \binom{10}{3}$ Möglichkeiten existieren, zehn Tapas zu bestellen, von denen genau sieben vegetarisch sind.

11 Unter zehn Personen, darunter Lena und Matteo, werden drei Stifte verlost. Jede Person kann mehrere Stifte gewinnen. Bestimmen Sie gemeinsam die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Lena und Matteo je einen Stift gewinnen.

12 **Abiturprüfung 2021 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 4**

Am Ausgang des Freizeitparks gibt es einen Automaten, der auf Knopfdruck einen Anstecker mit einem lustigen Motiv bedruckt und anschließend ausgibt. Für den Druck wird aus n verschiedenen Motiven eines zufällig ausgewählt, wobei jedes Motiv die gleiche Wahrscheinlichkeit hat. Ein Kind holt sich drei Anstecker aus dem Automaten.

a) Bestimmen Sie für den Fall $n = 5$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nicht alle drei Anstecker dasselbe Motiv haben.

b) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich drei verschiedene Motive auf den Ansteckern befinden, den Wert $\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{n^2}$ hat.

c) Bestimmen Sie, wie groß n mindestens sein muss, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich drei verschiedene Motive auf den Ansteckern befinden, größer als 90 % ist.

Hinweis:
Der Freizeitpark, von dem in Aufgabe 12 die Rede ist, ist Gegenstand von Aufgabe 8.

→ Strategie | Seite 258
Betrachten von etwas Gegenteiligem

→ Strategie | Seite 259
Aufstellen und Lösen einer Gleichung

13 Die elf Spieler einer Fußballmannschaft stellen sich in einer Reihe zufällig auf.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Reihenfolgen,
(1) bei denen Ben an Position 3, Luca an Position 10 und Finn an Position 7 steht,
(2) bei denen Ben, Luca und Finn in dieser Reihenfolge direkt nebeneinanderstehen.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Ben, Luca und Finn unabhängig von ihrer Reihenfolge am Anfang oder am Ende der Reihe stehen.

Test 2

→ Lösungen | Seite 279

14 In einer Urne befinden sich zehn Kugeln, die mit den Zahlen von 1 bis 10 beschriftet sind. Man zieht dreimal eine Kugel. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man

a) dreimal dieselbe Kugel erhält, wenn man mit Zurücklegen zieht,
b) drei verschiedene Kugeln erhält, wenn man mit Zurücklegen zieht,
c) die drei Kugeln mit den höchsten Zahlen erhält, wenn man ohne Zurücklegen zieht,
d) drei Kugeln mit Zahlen größer als 6 erhält, wenn man mit einem Griff zieht.

15 In einer Urne befinden sich vier schwarze und eine weiße Kugel. Aus der Urne werden drei Kugeln mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge zufällig gezogen. Geben Sie eine geeignete Ergebnismenge an. Begründen Sie, dass hier kein Laplace-Experiment vorliegt.

Grundwissen Test

→ Lösungen | Seite 279

G 16 Berechnen Sie mithilfe des Sinus- bzw. Kosinussatzes die fehlende Seitenlänge und die fehlenden Winkelgrößen des Dreiecks ABC.

a) $a = 5\,\text{cm},\ b = 3{,}5\,\text{cm},\ \gamma = 75°$
b) $b = 6\,\text{cm},\ c = 3{,}5\,\text{cm},\ \beta = 70°$

5 Bernoulli-Experimente und Bernoulli-Ketten

Eine Münze mit den Seiten 1 und 0 wird mehrfach geworfen. Dabei entstehen die in der Abbildung angegebenen Reihenfolgen.

a) Beantworten Sie folgende Frage intuitiv, also ohne zu rechnen. Welche der angegebenen Reihenfolgen tritt mit der größten Wahrscheinlichkeit ein?

b) Überprüfen Sie Ihre Angabe aus Teilaufgabe a) rechnerisch.

(1) 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0

(2) 1 0 0 1 0 1 1 1 0 0

(3) 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1

Im Folgenden werden Zufallsexperimente mit genau zwei Ergebnissen, die oft als „Treffer“ und „Niete“ bezeichnet werden, betrachtet. Wiederholte Durchführungen solcher Zufallsexperimente können als ein einziges, neues Zufallsexperiment aufgefasst werden, wie z. B. das 4-malige Werfen einer Münze. Wenn man davon ausgehen kann, dass sich die Teilexperimente nicht gegenseitig beeinflussen, dann spricht man von unabhängigen Durchführungen des ursprünglichen Zufallsexperiments.

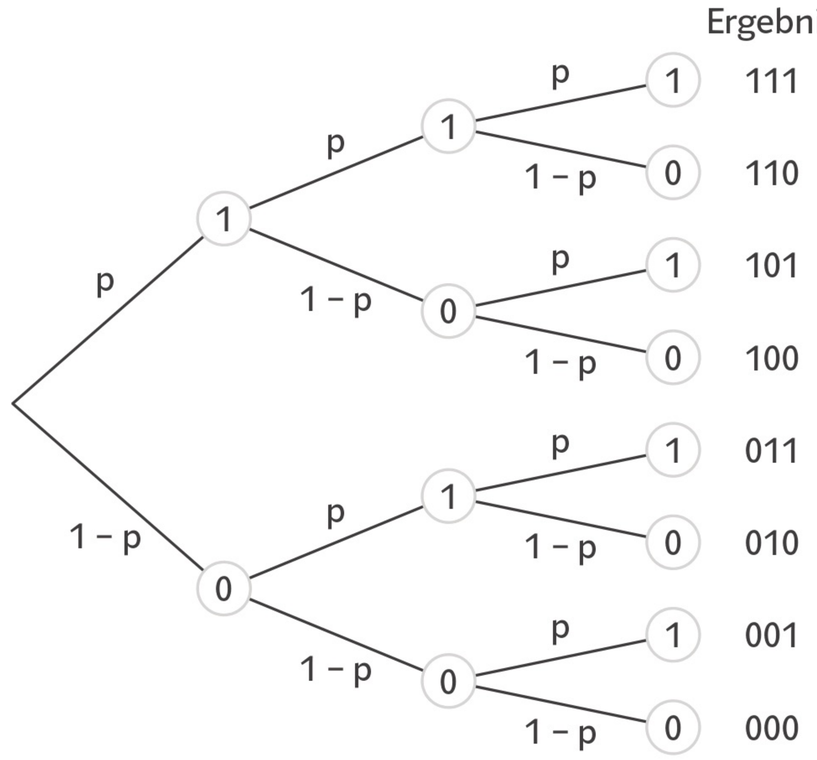
Definition: Ein Zufallsexperiment mit genau zwei Ergebnissen heißt **Bernoulli-Experiment**.
Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer wird mit p, die für eine Niete mit q bezeichnet, wobei $q = 1 - p$ ist.
Ein Zufallsexperiment, das aus n unabhängigen Durchführungen desselben Bernoulli-Experiments besteht, heißt **Bernoulli-Kette** der Länge n mit dem Parameter p.

Jakob I Bernoulli (1655 – 1705), Schweizer Mathematiker und Physiker. Er gehörte zu der in Basel ansässigen Familie Bernoulli, deren Mitglieder bedeutende Leistungen in den Naturwissenschaften und der Mathematik vollbrachten.

Zieht man aus einer Urne, die nur schwarze und weiße Kugeln enthält, mehrmals eine Kugel mit Zurücklegen, so liegt eine Bernoulli-Kette vor. Zieht man dagegen ohne Zurücklegen, so ändert sich von Zug zu Zug die Wahrscheinlichkeit für eine schwarze bzw. weiße Kugel. Die einzelnen Bernoulli-Experimente sind also abhängig und somit liegt keine Bernoulli-Kette vor.

Bei Aufgaben ist jeweils genau zu prüfen, ob eine Bernoulli-Kette vorliegt oder nicht. Das heißt, es ist zu überprüfen, ob die einzelnen Bernoulli-Experimente unabhängig sind.

Die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse einer Bernoulli-Kette können mithilfe eines Baumdiagramms bestimmt werden.
Die Abbildung zeigt das Baumdiagramm einer Bernoulli-Kette der Länge 3 mit „1“ für Treffer, „0“ für Niete sowie der Trefferwahrscheinlichkeit p. Die Ergebnisse sind Tripel. Bei einer Bernoulli-Kette der Länge n sind die Ergebnisse n-Tupel. Da die einzelnen Bernoulli-Experimente unabhängig sind, wiederholen sich die Wahrscheinlichkeiten an den Ästen nach jeder Verzweigung. Für die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses „Nur im 3. Versuch Treffer“ ergibt die Pfadregel
$P(001) = (1 - p) \cdot (1 - p) \cdot p = (1 - p)^2 \cdot p$.
Das Ergebnis „Genau drei Nieten“ hat die Wahrscheinlichkeit $P(000) = (1 - p)^3 = q^3$.



Zur Erinnerung:
Ein Ereignis kann auch nur aus einem Element bestehen. In diesem Sinn sprechen wir von der Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses.
Statt $P(\{010\})$ schreiben wir also $P(010)$.

Beispiel 1

In der deutschen Bevölkerung haben 43 % der Menschen die Blutgruppe A. Fünf Patienten unterziehen sich nacheinander einer Untersuchung, bei der auch die Blutgruppe bestimmt wird. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ersten drei Patienten die Blutgruppe A haben und die letzten beiden nicht.

Verteilung der Blutgruppen in Deutschland:
A: 43 %
B: 11 %
0: 41 %
AB: 5 %

Lösung

„1“ steht für Treffer (Blutgruppe A) und „0“ für Niete (nicht Blutgruppe A). Mit $n = 5$ und $p = 0{,}43$ ergibt sich $P(11100) = 0{,}43^3 \cdot (1 - 0{,}43)^2 \approx 2{,}6\,\%$.

Beispiel 2

In Deutschland tragen ca. 67 % der Bevölkerung eine Brille. Bei fünf zufällig ausgewählten Personen wird festgestellt, ob sie Brillenträger sind. Das Experiment wird als Bernoulli-Kette modelliert. Es werden folgende Ereignisse festgelegt:
A: „Die ersten vier Personen tragen eine Brille, die fünfte Person nicht.“
B: „Die ersten vier Personen tragen eine Brille.“
C: „Genau vier Personen tragen eine Brille.“

a) Geben Sie die Ereignisse A, B und C in aufzählender Form an.
b) Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse A, B und C.

Lösung

a) 1: Brillenträger, 0: kein Brillenträger.
$A = \{11110\}$, $B = \{11110; 11111\}$ und $C = \{11110; 11101; 11011; 10111; 01111\}$.
b) $P(A) = 0{,}67^4 \cdot 0{,}33 \approx 0{,}07$; $P(B) = 0{,}67^4 \cdot 0{,}33 + 0{,}67^5 \approx 0{,}20$; $P(C) = 5 \cdot 0{,}67^4 \cdot 0{,}33 \approx 0{,}33$.

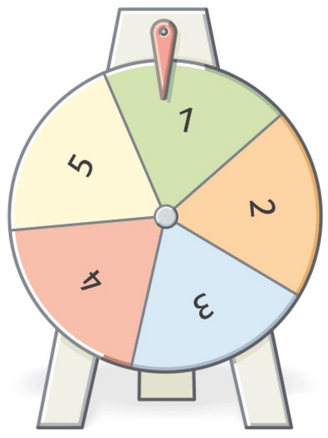
Aufgaben

1 Diskutieren Sie untereinander, ob das folgende Zufallsexperiment als Bernoulli-Kette aufgefasst werden kann. Geben Sie Ihr Ergebnis und gegebenenfalls die Länge n und die Trefferwahrscheinlichkeit p der Bernoulli-Kette an.

a) Aus einer Urne mit zehn weißen und 30 roten Kugeln werden fünf Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen gezogen und es wird jeweils festgestellt, ob die Kugel rot ist oder nicht.
b) Aus der laufenden Produktion von Glühbirnen werden fünf ausgewählt und es wird jeweils die Brenndauer bestimmt und festgestellt, ob diese mindestens 1000 Stunden beträgt.
c) Die Fußballmannschaft A hat von fünf Spielen drei gegen die Mannschaft B gewonnen. Bei den nächsten drei Spielen wird jeweils festgestellt, ob A gewonnen hat oder nicht.
d) Eine Münze wird zehnmal geworfen.
e) Zehn Münzen werden gleichzeitig geworfen.
f) Eine verbeulte Münze wird zehnmal geworfen.
g) Aus einem 20-köpfigen Seminar werden fünf Personen ausgelost.

2 Bei dem abgebildeten Glücksrad erscheint jedes der fünf Felder mit der gleichen Wahrscheinlichkeit. Das Glücksrad wird fünfmal gedreht und es wird jeweils die ermittelte Zahl festgestellt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) die erste und die letzte Zahl gerade und die übrigen ungerade sind,
b) nur die ersten zwei Zahlen gerade sind,
c) nur die mittlere Zahl größer als 3 ist,
d) alle Zahlen verschieden sind.



3 Bei einer verbeulten Münze ist die Wahrscheinlichkeit für Zahl 0,4. Sie wird dreimal geworfen und es wird jedes Mal notiert, ob Zahl erscheint.

a) Zeichnen Sie ein zugehöriges Baumdiagramm.
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nur beim 3. Wurf Zahl erscheint.
c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau einmal Zahl erscheint.

Test 1

→ Lösungen | Seite 279

4 Ein Medikament gegen eine Krankheit führt mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 % zur Besserung. Es werden fünf Personen mit dem Medikament behandelt und es wird jeweils festgestellt, ob eine Besserung eintritt oder nicht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür,

a) dass nur bei der vierten Person keine Besserung eintritt,

b) dass bei allen Personen eine Besserung eintritt,

c) dass nur bei den ersten drei Personen eine Besserung eintritt,

d) dass bei genau einer Person eine Besserung eintritt.

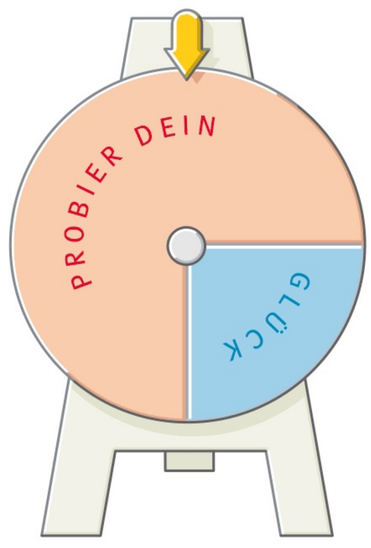
5 Zehn Würfel werden gleichzeitig geworfen. Es wird jeweils notiert, ob eine Sechs fiel.
Begründen Sie, dass man dieses Zufallsexperiment als Bernoulli-Kette modellieren kann.

6 Begründen Sie, dass folgende Aussage falsch ist: Die Wahrscheinlichkeit dafür, bei drei Würfen eines Würfels genau eine Eins zu werfen, beträgt $\left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$.

7 Das Glücksrad wird sechsmal gedreht.

a) Begründen Sie gemeinsam, dass eine Bernoulli-Kette vorliegt, und geben Sie die Werte der Parameter n und p an.

b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.
A: „Zuerst erscheint dreimal ‚Rot', dann dreimal ‚Blau'."
B: „Es erscheint kein ‚Blau'."
C: „Beim letzten Drehen erscheint ‚Rot'."
D: „Es erscheint mindestens einmal ‚Rot'."
E: „Beim ersten und letzten Drehen erscheint ‚Rot'."



→ Strategie | Seite 258
Betrachten von etwas Gegenteiligem

8 Ein blutdrucksenkendes Medikament führt bei 20 % der Patienten, die es einnehmen, nicht zu einer Senkung des Blutdrucks. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 20 Patienten, die das Medikament einnehmen,

a) genau bei einem der Blutdruck nicht sinkt, **b)** nur beim letzten der Blutdruck nicht sinkt.

Test 2

→ Lösungen | Seite 279

9 Ein Basketballspieler hat bei Freiwürfen eine Trefferquote von 85 %. Er wirft fünf Freiwürfe. Das Zufallsexperiment wird als Bernoulli-Kette modelliert. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A bis E.

A: „Nur der erste Wurf ist kein Treffer."

B: „Es gibt genau vier Treffer."

C: „Die ersten vier Würfe sind Treffer."

D: „Der Spieler wirft genau einmal daneben."

E: „Nur der dritte Wurf ist kein Treffer."

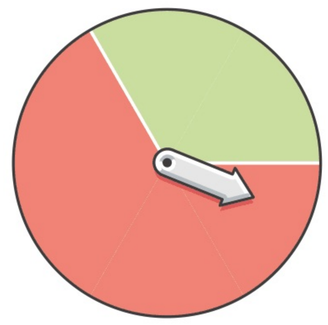
10 Das nebenstehende Glücksrad wird viermal gedreht. Erläutern Sie, mit welchen Termen sich die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen lässt, dass genau einmal „Rot" erscheint.

(1) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$

(2) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3}$

(3) $\left(\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^4$

(4) $4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$



→ Lösungen | Seite 279

Grundwissen Test

G 11 Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung.

a) $2^x = 32$ **b)** $2e^{t+1} = 18$ **c)** $\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0{,}99$ **d)** $5 + e^{2x} = -4$

e) $x^4 = 81$ **f)** $(1 - p)^{10} = 0{,}9$ **g)** $10 + 4t^3 = 6$ **h)** $\frac{1}{3}x^4 + 7 = 2$

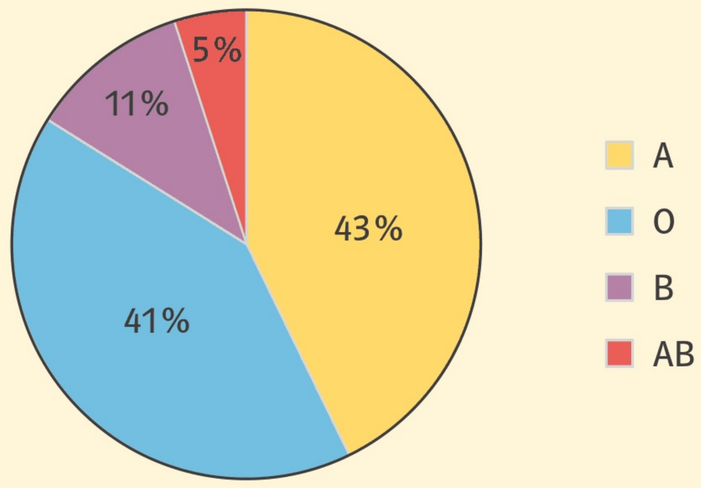
6 Binomialverteilung

Für eine Studie werden Personen mit der Blutgruppe AB gesucht. Von fünf Studienteilnehmern wird jeweils festgestellt, ob sie die Blutgruppe AB haben oder nicht.

a) Geben Sie ein Urnenexperiment mit Ergebnismenge Ω an, das obige Situation modelliert. Erläutern Sie, dass $|\Omega| = 2^5$ gilt.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Studienteilnehmer die Blutgruppe AB hat.

Verteilung der Blutgruppen in Deutschland

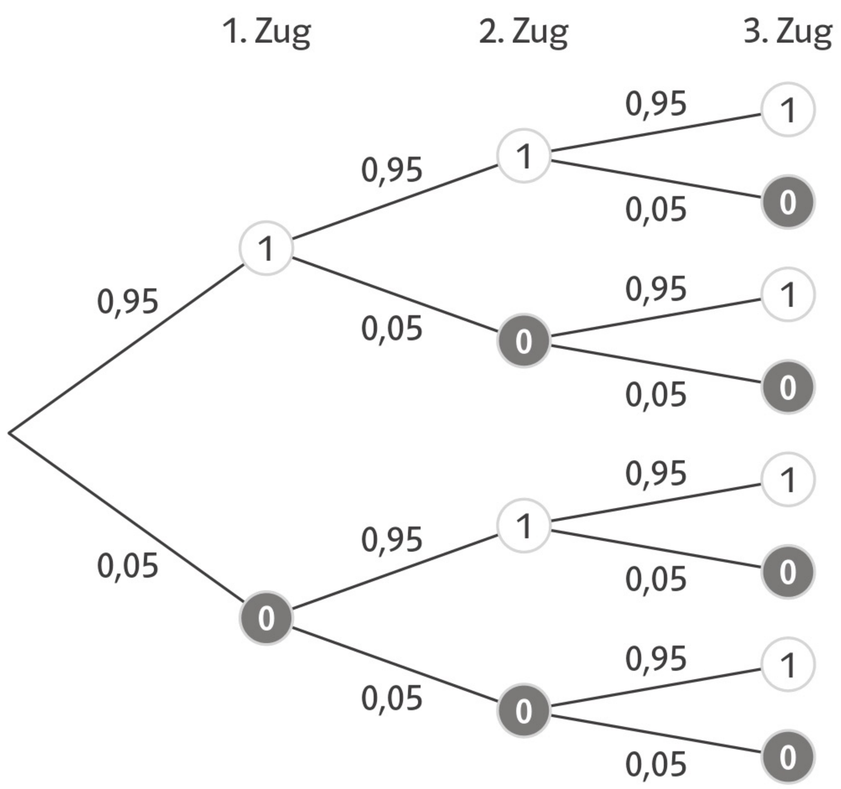


Bei einer Bernoulli-Kette der Länge n besteht ein konkretes Ergebnis aus einer Folge von insgesamt n Nullen und Einsen; z. B. ist $\omega = 11010$ bei $n = 5$ ein mögliches Ergebnis. Oft interessiert jedoch nur die Anzahl der Treffer. Dies wäre beispielsweise bei $\omega = 11010$ die Trefferanzahl 3.

Zur Erinnerung:
„1“ steht für Treffer,
„0“ steht für Niete.

Gibt die Zufallsgröße X die Anzahl der Treffer einer Bernoulli-Kette der Länge n an, so kann X die Werte 0; 1; 2; …; n annehmen. Im Folgenden soll anhand einer konkreten Situation die Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$ dafür, dass die Zufallsgröße X den Wert k annimmt, bestimmt werden.
In einer Urne sind 19 weiße und eine schwarze Kugel. Aus der Urne werden drei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Eine weiße Kugel werde mit „1“ (Treffer) und eine schwarze Kugel mit „0“ (Niete) bezeichnet. Das Zufallsexperiment kann somit durch eine Bernoulli-Kette der Länge 3 mit dem Parameter $p = \frac{19}{20} = 0{,}95$ beschrieben werden. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der weißen Kugeln an.

Baumdiagramm zur Bernoulli-Kette:



Wahrscheinlichkeitsverteilung:

ω	P(ω)	X(ω)
111	$0{,}95^3$	3
110	$0{,}95^2 \cdot 0{,}05$	2
101	$0{,}95^2 \cdot 0{,}05$	2
100	$0{,}95 \cdot 0{,}05^2$	1
011	$0{,}95^2 \cdot 0{,}05$	2
010	$0{,}95 \cdot 0{,}05^2$	1
001	$0{,}95 \cdot 0{,}05^2$	1
000	$0{,}05^3$	0

Das Ereignis $\{110; 101; 011\}$ kann durch $X = 2$ beschrieben werden, da nur die Ergebnisse 110, 101 und 011 jeweils genau zwei Treffer enthalten. Jedes dieser Ergebnisse hat die Wahrscheinlichkeit $0{,}95^2 \cdot 0{,}05$. Also ergibt sich $P(X = 2) = 3 \cdot 0{,}95^2 \cdot 0{,}05 \approx 14\,\%$.
Das Ereignis $X = k$ besteht aus allen Ergebnissen mit genau k Treffern. Bei diesem Ereignis sind jeweils k Stellen eines Ergebnisses mit Einsen besetzt. Da es $\binom{3}{k}$ Möglichkeiten gibt, k Stellen aus 3 Stellen auszuwählen, besteht das Ereignis $X = k$ aus insgesamt $\binom{3}{k}$ Ergebnissen. Also gilt $P(X = k) = \binom{3}{k} \cdot 0{,}95^k \cdot 0{,}05^{3-k}$.

Zur Erinnerung:
X gibt die Anzahl der Treffer an.

Verallgemeinert man die vorhergehenden Überlegungen von drei auf n Züge, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit für k weiße Kugeln $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot 0{,}95^k \cdot 0{,}05^{n-k}$.
Verallgemeinert man die Trefferwahrscheinlichkeit von 0,95 auf p, so gilt der folgende Satz.

Satz: Gegeben ist eine Bernoulli-Kette der Länge n, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, mit der Trefferwahrscheinlichkeit p. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Treffer an.
Dann beträgt die **Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer** mit $k \in \{0; 1; \ldots; n\}$

$\mathbf{P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$ **(Formel von Bernoulli)**.

Besitzt eine Zufallsgröße X eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, wie sie bei einer Bernoulli-Kette auftritt, so definiert man:

Definition (Binomialverteilung): Eine Zufallsgröße X heißt **binomialverteilt** nach $B(n; p)$ oder $B(n; p)$-verteilt, wenn gilt:
- X kann die Werte 0; 1; 2; …; n mit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ annehmen,
- $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ mit $0 \le p \le 1$.

Schreibweisen:
- Ist die Zufallsgröße X binomialverteilt, dann schreibt man für die Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$ auch $P_p^n(X = k)$. Dies hat den Vorteil, dass die Parameter n und p sofort ersichtlich sind.
- $B(n; p; k) = P_p^n(X = k)$
- Wird $q = 1 - p$ verwendet, so gilt $P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$.

Ist X nach $B(n; p)$ verteilt, so schreibt man $P_p^n(X = k)$.

Die Zufallsgröße „Anzahl der Treffer einer Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p“ ist folglich $B(n; p)$-verteilt. Umgekehrt kann jede binomialverteilte Zufallsgröße als Trefferanzahl in einer Bernoulli-Kette gedeutet werden.

Ist die Zufallsgröße X binomialverteilt mit den Parametern n und p, so gibt $P_p^n(X = k)$ die Wahrscheinlichkeit für k Treffer und $P_p^n(X \le k)$ die Wahrscheinlichkeit für höchstens k Treffer an. Es gilt
$P_p^n(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} P_p^n(X = i) = \sum_{i=0}^{k} B(n; p; i) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i}$.

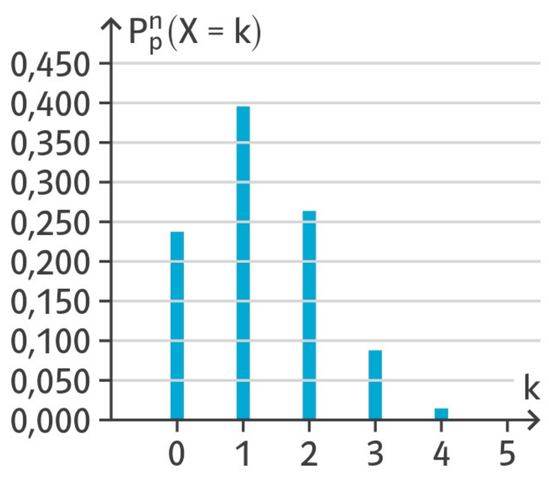
Die kumulative Verteilungsfunktion einer nach $B(n; p)$ verteilten Zufallsgröße wird häufig mit F_p^n bezeichnet. Es gilt $F_p^n(x) = P_p^n(X \le x) = \sum_{k \le x} B(n; p; k)$, wobei die Schreibweise bedeutet, dass über alle Trefferanzahlen k summiert wird, die kleiner oder gleich der reellen Zahl x sind.
Im Folgenden sind Tabelle, Säulendiagramm und kumulative Verteilungsfunktion einer nach $B(5; 0{,}25)$ verteilten Zufallsgröße dargestellt.

Zur Erinnerung:
Die Funktion, die bei gegebener Zufallsgröße X jeder reellen Zahl x die Wahrscheinlichkeit $P(X \le x)$ zuordnet, heißt kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X.

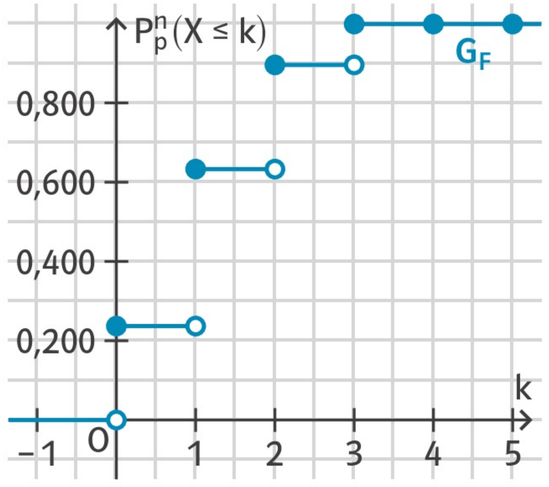
Tabelle:

k	$P_p^n(X = k)$	$P_p^n(X \le k)$
0	0,237…	0,237…
1	0,395…	0,632…
2	0,263…	0,896…
3	0,087…	0,984…
4	0,014…	0,999…
5	0,000…	1,000…

Säulendiagramm:



Kumulative Verteilungsfunktion:



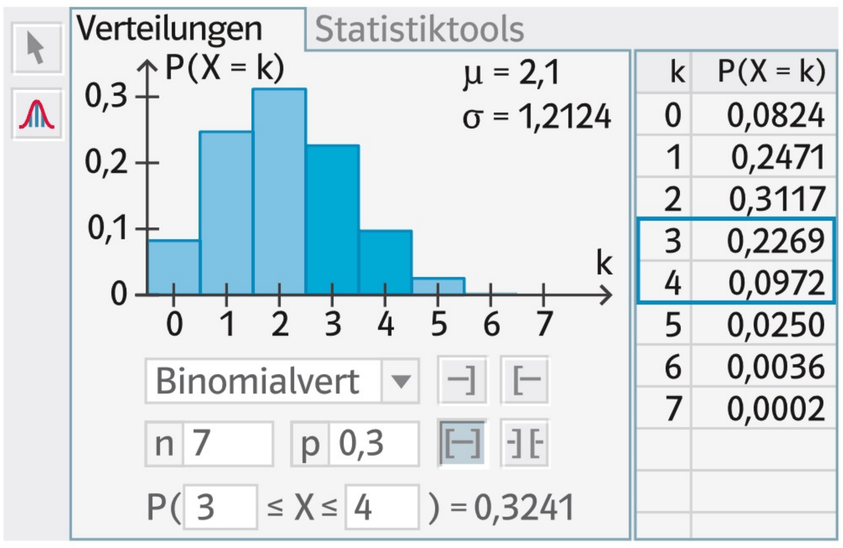
Mit Taschenrechnern, Tabellenkalkulationsprogrammen oder Mathematiksoftware können Werte der Binomialverteilung und der kumulativen Verteilungsfunktion ermittelt werden.

Beim **Taschenrechner** lauten die Befehle für die Werte von $B(n; p; k)$ meist „binomial pdf“ oder „binomial pd“ und für kumulierte Wahrscheinlichkeiten, also $P_p^n(X \le k)$, „binomial cdf“ oder „binomial cd“.

pdf: probability density function
cdf: cumulative density function

Bei **Tabellenkalkulationsprogrammen** sind folgende oder ähnliche Formeln üblich:
$B(n; p; k)$ = Binomial(n, p, k, false) oder $B(n; p; k)$ = BINOM.VERT(k; n; p; FALSCH) und
$P_p^n(X \le k)$ = Binomial(n, p, k, true) oder $P_p^n(X \le k)$ = BINOM.VERT(k; n; p; WAHR).

Mit einem **„Wahrscheinlichkeitsrechner“** lassen sich sowohl die Werte von Binomialverteilungen als auch die Werte kumulativer Verteilungsfunktionen unmittelbar bestimmen. Man ruft die Binomialverteilung auf. Anschließend werden die Werte für die Parameter n und p sowie die interessierenden Trefferanzahlen als Grenzen eines Intervalls eingegeben. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit kann dann unmittelbar abgelesen werden.



Zum Wahrscheinlichkeitsrechner: vgl. auch die Exkursion ab Seite 116.

Beispiel 1

Die Zufallsgröße X ist $B(20; 0{,}4)$-verteilt. Ermitteln Sie.

a) $P_{0,4}^{20}(X = 10)$ **b)** $P_{0,4}^{20}(X \le 10)$ **c)** $P_{0,4}^{20}(X < 10)$ **d)** $P_{0,4}^{20}(X > 10)$ **e)** $P_{0,4}^{20}(4 \le X \le 10)$

→ Strategie | Seite 260 Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

Lösung

a) $P_{0,4}^{20}(X = 10) = B(20; 0{,}4; 10) \approx 0{,}117$

b) $P_{0,4}^{20}(X \le 10) \approx 0{,}872$

c) $P_{0,4}^{20}(X < 10) = P_{0,4}^{20}(X \le 9) \approx 0{,}755$

d) $P_{0,4}^{20}(X > 10) = 1 - P_{0,4}^{20}(X \le 10) = 1 - 0{,}872\,48\ldots \approx 0{,}128$

e) $P_{0,4}^{20}(4 \le X \le 10) = P_{0,4}^{20}(X \le 10) - P_{0,4}^{20}(X \le 3) = 0{,}872\,48\ldots - 0{,}015\,96\ldots \approx 0{,}857$

Beispiel 2

Eine Tierärztin behandelt zehn kranke Tiere mit einem Medikament, das in 80 % aller Anwendungen zur Heilung führt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) genau sechs Tiere geheilt werden, **b)** mindestens sieben Tiere geheilt werden.

Lösung

Die Behandlung kann als Bernoulli-Kette der Länge $n = 10$ mit dem Parameter $p = 0{,}8$ aufgefasst werden, wobei Treffer „Tier wird geheilt“ bedeutet. Die Zufallsgröße X ist die Anzahl geheilter Tiere und nach $B(10; 0{,}8)$ verteilt.

a) $P_{0,8}^{10}(X = 6) = \binom{10}{6} \cdot 0{,}8^6 \cdot 0{,}2^4 \approx 0{,}088$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 9 % werden genau sechs von zehn Tieren geheilt.

b) $P_{0,8}^{10}(X \ge 7) = P_{0,8}^{10}(X = 7) + P_{0,8}^{10}(X = 8) + P_{0,8}^{10}(X = 9) + P_{0,8}^{10}(X = 10)$

$= \binom{10}{7} \cdot 0{,}8^7 \cdot 0{,}2^3 + \binom{10}{8} \cdot 0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2 + \binom{10}{9} \cdot 0{,}8^9 \cdot 0{,}2^1 + \binom{10}{10} \cdot 0{,}8^{10} \cdot 0{,}2^0 \approx 0{,}879$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 88 % werden mindestens sieben Tiere geheilt.

Alternativer Lösungsweg: $P_{0,8}^{10}(X \ge 7) = 1 - P_{0,8}^{10}(X \le 6) = 1 - 0{,}120\,87\ldots \approx 0{,}879$

Aufgaben

1 Die Zufallsgröße X sei $B(n; p)$-verteilt. Geben Sie eine Wertetabelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an. Zeichnen Sie zudem ein Säulendiagramm und den Graphen der kumulativen Verteilungsfunktion.

a) $n = 4,\ p = 0{,}25$ **b)** $n = 6,\ p = 0{,}4$ **c)** $n = 8,\ p = 0{,}5$ **d)** $n = 10,\ p = 0{,}8$

Zur Erinnerung:
$F_p^n(k) = P_p^n(X \leq k)$

2 Begründen Sie, dass $B(n; p; k) \leq F_p^n(k)$ gilt.

3 Beschreiben Sie mit Worten, welche Wahrscheinlichkeit der Term angibt, und berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit.

a) $\sum_{i=3}^{12} B\left(12; \frac{1}{3}; i\right)$ **b)** $\sum_{i=0}^{3} B\left(12; \frac{1}{3}; i\right)$ **c)** $\sum_{i=3}^{5} B\left(12; \frac{1}{3}; i\right)$ **d)** $\sum_{i=3}^{3} B\left(12; \frac{1}{3}; i\right)$

4 Bestimmen Sie den angegebenen Wert mithilfe des Taschenrechners.

a) $B(10; 0{,}3; 5)$ **b)** $B\left(50; \frac{1}{3}; 20\right)$ **c)** $B\left(50; \frac{2}{3}; 17\right)$ **d)** $B\left(50; \frac{2}{3}; 34\right)$

e) $\sum_{i=0}^{5} B(10; 0{,}3; i)$ **f)** $F_{\frac{1}{3}}^{50}(20)$ **g)** $F_{\frac{2}{3}}^{50}(43)$ **h)** $\sum_{i=0}^{17} B\left(50; \frac{2}{3}; i\right)$

i) $\sum_{i=0}^{43} B\left(50; \frac{2}{3}; i\right)$ **j)** $\sum_{i=0}^{50} B\left(50; \frac{2}{3}; i\right)$ **k)** $\sum_{i=37}^{37} B\left(50; \frac{2}{3}; i\right)$ **l)** $\sum_{i=36}^{37} B\left(50; \frac{2}{3}; i\right)$

5 Ein Würfel wird fünfmal nacheinander geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) genau zwei Sechsen fallen, **b)** genau drei Sechsen fallen,

c) genau fünf Sechsen fallen, **d)** mindestens eine Sechs fällt,

e) mindestens drei Sechsen fallen, **f)** höchstens zwei Sechsen fallen.

→ Strategie | Seite 258
Betrachten von etwas Gegenteiligem

6 Die Zufallsgröße X ist $B(100; 0{,}4)$-verteilt. Stellen Sie zunächst den Term mithilfe des Summenzeichens dar und bestimmen Sie anschließend dessen Wert.

a) $P_{0,4}^{100}(X \leq 40)$ **b)** $P_{0,4}^{100}(X < 40)$ **c)** $P_{0,4}^{100}(X \geq 40)$ **d)** $P_{0,4}^{100}(X > 40)$

e) $P_{0,4}^{100}(30 \leq X \leq 50)$ **f)** $P_{0,4}^{100}(30 < X \leq 50)$ **g)** $P_{0,4}^{100}(30 < X < 50)$ **h)** $P_{0,4}^{100}(0 \leq X < 50)$

7 Die Zufallsgröße X ist $B(50; 0{,}4)$-verteilt.

a) Geben Sie alle Trefferanzahlen an, für die $|X - 20| < 5$ gilt.

b) Bestimmen Sie den Wert.

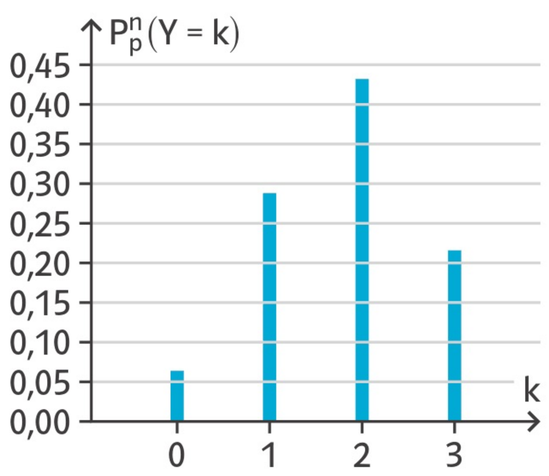
(1) $P_{0,4}^{50}(|X - 20| < 5)$ (2) $P_{0,4}^{50}(|X - 20| \leq 5)$ (3) $P_{0,4}^{50}(|X - 20| = 5)$

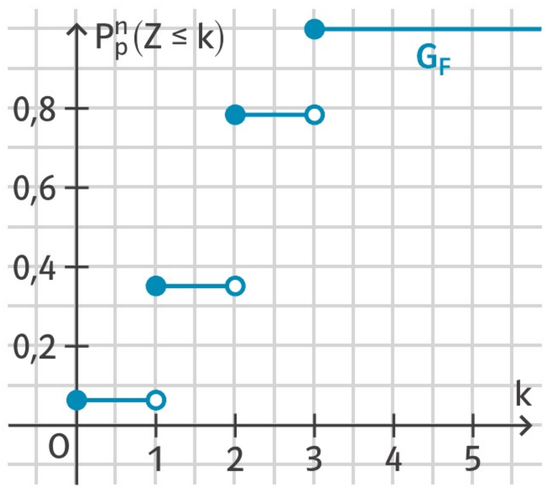
(4) $P_{0,4}^{50}(|X - 20| > 5)$ (5) $P_{0,4}^{50}(|X - 20| = 0)$ (6) $P_{0,4}^{50}(|X - 20| \leq 20)$

(7) $P_{0,4}^{50}(|X - 15| \leq 3)$ (8) $P_{0,4}^{50}(|X - 15| < 2)$ (9) $P_{0,4}^{50}(|X - 15| \geq 2)$

8 Die Wertetabelle der Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße X, das Säulendiagramm einer Zufallsgröße Y und der Graph der kumulativen Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße Z sind abgebildet. Jede Zufallsgröße ist $B(n; p)$-verteilt. Geben Sie jeweils die Werte der zugehörigen Parameter n und p an.

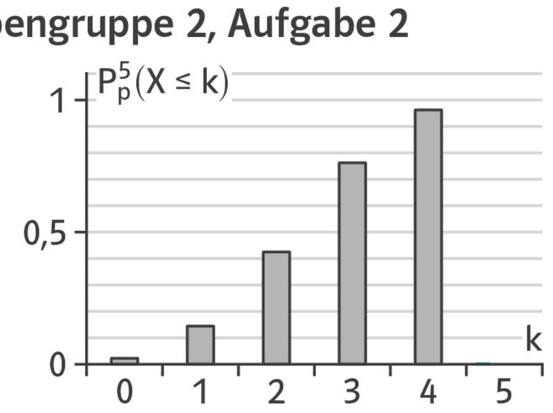
k	$P_p^n(X = k)$
0	0,4096
1	0,4096
2	0,1536
3	0,0256
4	0,0016





9 **Abiturprüfung 2019 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 2**

Gegeben ist eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit dem Parameterwert $n = 5$. Dem Diagramm in der Abbildung kann man die Wahrscheinlichkeitswerte $P_p^5(X \leq k)$ mit $k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ entnehmen. Ergänzen Sie den zu $k = 5$ gehörenden Wahrscheinlichkeitswert im Diagramm. Ermitteln Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P_p^5(X = 2)$.



Übertragen Sie zunächst das Diagramm in Ihr Heft und ergänzen Sie dort den zu $k = 5$ gehörenden Wahrscheinlichkeitswert.

Test 1

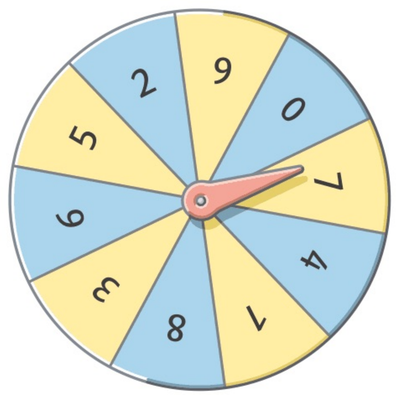
Lösungen | Seite 279

10 Beschreiben Sie, welche Wahrscheinlichkeit der Term angibt, und berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit.

a) $P_{0,2}^{10}(X = 4)$ **b)** $\sum_{i=0}^{3} B\left(9; \frac{1}{3}; i\right)$ **c)** $P_{0,2}^{10}(2 < X \leq 4)$ **d)** $\sum_{i=6}^{8} B\left(8; \frac{3}{4}; i\right)$

11 Eine Zufallsgröße ist $B\left(5; \frac{1}{4}\right)$-verteilt. Beschreiben Sie jeweils ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$ bzw. $\binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$ angegeben wird.

12 Ein Glücksrad trägt auf seinen zehn gleich großen Feldern die Ziffern 0 bis 9.



a) Das Glücksrad wird sechsmal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(1) höchstens zwei Ziffern größer als 5 sind, (2) mindestens drei Ziffern gerade sind,

(3) die ersten vier Ziffern gerade sind, (4) nur die ersten vier Ziffern gerade sind,

(5) genau drei Ziffern hintereinander ungerade und die anderen Ziffern gerade sind.

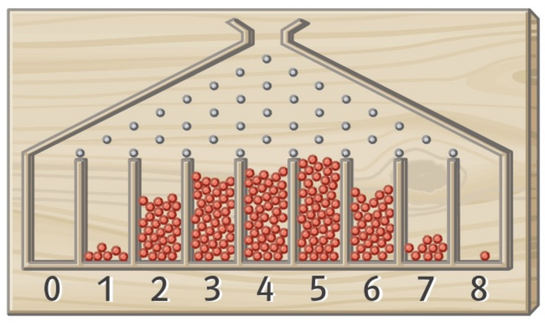
b) Das Glücksrad wird achtmal gedreht. Geben Sie sich gegenseitig eine Ziffernfolge oder eine Aussage über die gezogenen Ziffern vor und lassen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen. Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse gegenseitig.

c) Das Glücksrad wird gedreht. Formulieren Sie ein Zufallsexperiment und geben Sie ein Ereignis dazu an, dessen Wahrscheinlichkeit sich mithilfe des Terms berechnen lässt.

(1) $\binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^3$ (2) $\binom{10}{3} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^7$ (3) $\left(\frac{3}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^7$

(4) $\sum_{i=0}^{4} \binom{8}{i} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^i \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{8-i}$ (5) $\binom{8}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8$ (6) $\sum_{i=0}^{2} B(6; 0{,}2; i)$

13 Bei einem Galton-Brett wird eine Kugel beim Fallen durch die Hindernisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach links oder rechts abgelenkt. Die Zufallsgröße X gibt die Nummer des Fachs an, in das die Kugel fällt. Geben Sie gemeinsam die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X in Form einer Tabelle an und zeichnen Sie das zugehörige Säulendiagramm.



14 Bestimmen Sie den Wert von k, für den $B(10; 0{,}7; k)$ am größten bzw. am kleinsten ist.

15 In Urne I sind vier weiße und sechs rote Kugeln, in Urne II sind 40 weiße und 60 rote Kugeln. Aus jeder Urne werden fünf Kugeln nacheinander gezogen und es wird ihre Farbe notiert.

a) Berechnen Sie für jede Urne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den fünf Kugeln genau drei rote anzutreffen sind

(1) beim Ziehen mit Zurücklegen, (2) beim Ziehen ohne Zurücklegen.

b) Berechnen Sie für jede Urne die prozentuale Abweichung der Wahrscheinlichkeit beim Ziehen ohne Zurücklegen von der beim Ziehen mit Zurücklegen.

c) Vergleichen Sie die in Teilaufgabe b) berechneten prozentualen Abweichungen der Wahrscheinlichkeiten beim Ziehen aus den Urnen I und II.

16 Die Zufallsgröße X ist $B(50; 0{,}8)$-verteilt. Bestimmen Sie mithilfe des Taschenrechners, eines Tabellenkalkulationsprogramms oder eines Wahrscheinlichkeitsrechners die Werte für k, für die die Ungleichung gilt.

a) $P_{0,8}^{50}(X = k) \geq 10\,\%$ **b)** $P_{0,8}^{50}(X = k) < 10\,\%$ **c)** $P_{0,8}^{50}(X = k) < 1\,\%$

d) $\sum_{i=0}^{k} B(50; 0{,}8; i) \geq 95\,\%$ **e)** $F_{0,8}^{50}(k) \geq 95\,\%$ **f)** $F_{0,8}^{50}(k) \geq 99\,\%$

17 Aus einem Korb, der sechs Birnen und vier Äpfel enthält, werden drei Früchte zufällig gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass darunter höchstens zwei Birnen sind.

18 Eine Maschine stellt Schrauben mit einem Ausschussanteil von 3% her. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) unter vier Schrauben kein Ausschussstück ist,

b) unter zehn Schrauben genau vier Ausschussstücke sind,

c) unter acht Schrauben weniger als vier Ausschussstücke sind,

d) unter 15 Schrauben mehr als ein, aber weniger als vier Ausschussstücke sind.

19 Eine Firma, die einen Artikel in Paketen zu je 15 Stück an den Einzelhandel vertreibt, berechnet Pakete mit mehr als zwei schadhaften Stücken nicht. Bestimmen Sie, wie viel Prozent der ausgelieferten Pakete die Firma als unberechnet kalkulieren muss, wenn ihr bekannt ist, dass durchschnittlich 2% der Artikel schadhaft sind.

20 **Abiturprüfung 2017 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1**

Ein Glücksrad hat drei Sektoren, einen blauen, einen gelben und einen roten. Diese sind unterschiedlich groß. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der blaue Sektor getroffen wird, beträgt p.

a) Interpretieren Sie den Term $(1 - p)^7$ im Sachzusammenhang.

b) Das Glücksrad wird zehnmal gedreht. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass der blaue Sektor genau zweimal getroffen wird.

c) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der gelbe Sektor getroffen wird, beträgt 50%. Felix hat 100 Drehungen des Glücksrads beobachtet und festgestellt, dass bei diesen der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wurde, deutlich geringer als 50% war. Er folgert: „Der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wird, muss also bei den nächsten 100 Drehungen deutlich größer als 50% sein." Beurteilen Sie die Aussage von Felix.

d) Das Glücksrad wird viermal gedreht und die Abfolge der Farben als Ergebnis notiert. Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Ergebnisse, in denen die Farbe Blau nicht vorkommt.

Test 2

Lösungen | Seite 279

21 **Abiturprüfung 2019 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 3**

Gegeben ist eine Bernoulli-Kette mit der Länge n und der Trefferwahrscheinlichkeit p. Erklären Sie, dass für alle $k \in \{0; 1; 2; \ldots; n\}$ die Beziehung $B(n; p; k) = B(n; 1 - p; n - k)$ gilt.

22 Auf einem Bauernhof werden Eier in Schachteln zu zehn Stück verpackt. Erfahrungsgemäß ist eines von zehn Eiern beschädigt.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Schachtel nur unbeschädigte Eier enthält.

b) Zwölf Schachteln werden an zwölf Kunden verkauft. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zwei Kunden je eine Schachtel mit nur unbeschädigten Eiern erhalten.

23 In einer Urne befinden sich fünf rote, drei schwarze und zwei weiße Kugeln. Es werden nacheinander neun Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Das Ereignis A ist „Es wird viermal ‚Rot', zweimal ‚Schwarz' und dreimal ‚Weiß' gezogen."

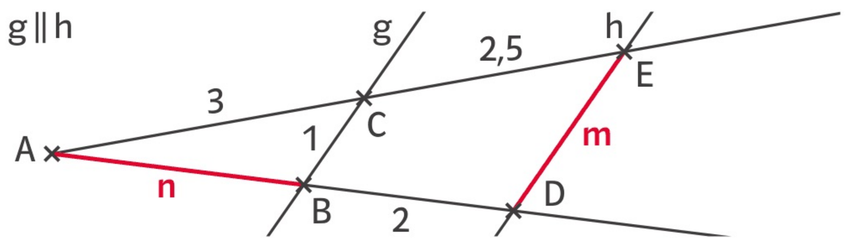
Begründen Sie, dass $P(A) = \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3$ gilt.

Grundwissen Test

Lösungen | Seite 280

G 24 **a)** Berechnen Sie die Längen der Strecken n und m.

b) Berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke ABC und ADE.



7 Modellieren mithilfe der Binomialverteilung

In einer Firma arbeiten mehrere hundert Personen, von denen ein Drittel männlich ist. In der Kantine sitzen an einem großen Tisch 20 Personen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter diesen 20 Personen die Mehrzahl männlich ist. Erläutern Sie zunächst, welche Annahmen in Ihre Rechnung eingehen.

Zahlreiche Anwendungssituationen können mithilfe der Binomialverteilung modelliert werden. Anhand des folgenden Beispiels wird der Modellierungsprozess erläutert.
Es ist bekannt, dass der Anteil der Studierenden, die einen Nebenjob haben, bei 70 % liegt. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 100 zufällig ausgewählten Studierenden mindestens 65 und höchstens 75 einen Nebenjob haben. Zur Beschreibung der Situation mithilfe einer Binomialverteilung geht man wie folgt vor.

Modellannahmen treffen

- Annahme 1: Im angegebenen Beispiel wird davon ausgegangen, dass die ausgewählten Studierenden unabhängig voneinander antworten. Die Unabhängigkeit wäre beispielsweise nicht gewahrt, wenn unter den ausgewählten Studierenden eine Gruppe wäre, die sich über den Nebenjob kennengelernt hat.
- Annahme 2: Es wird das Modell „Ziehen mit Zurücklegen“ verwendet, obwohl hier ein „Ziehen ohne Zurücklegen“ vorliegt. Bei der großen Anzahl an Studierenden kann man davon ausgehen, dass sich der Anteil der Studierenden mit Nebenjob nur vernachlässigbar ändert, wenn sich die Anzahl aller Studierenden lediglich geringfügig ändert.

Parameter der Binomialverteilung festlegen

Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Studierenden mit Nebenjob unter den 100 zufällig ausgewählten Studierenden an. Somit ist $n = 100$. Der Anteil von 70 % wird als Trefferwahrscheinlichkeit p interpretiert, wobei „Treffer“ bedeutet, dass der bzw. die Studierende einen Nebenjob hat.

Wahrscheinlichkeit berechnen

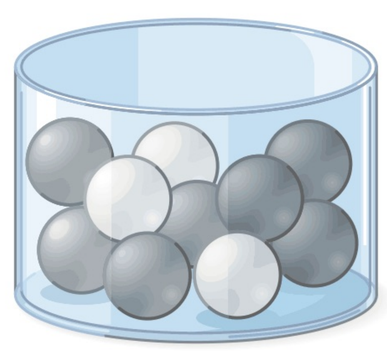
$P_{0,70}^{100}(65 \leq X \leq 75) = P_{0,70}^{100}(X \leq 75) - P_{0,70}^{100}(X \leq 64) = 0{,}770\,35\ldots \approx 77\,\%$.
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit liegt bei ca. 77 %.

Vorgehen beim Modellieren mit der Binomialverteilung

1. Man prüft, ob das Zufallsexperiment als Bernoulli-Kette der Länge n mit der Wahrscheinlichkeit p für Treffer angesehen werden kann.
2. Ist dies der Fall, führt man eine $B(n; p)$-verteilte Zufallsgröße X ein.
3. Man bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit mithilfe der Binomialverteilung.

In der Praxis erweist es sich als vorteilhaft, zunächst zu überlegen, was „Treffer“ bedeutet.

Jede Bernoulli-Kette mit rationalem Parameter p kann als mehrmaliges Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen gedeutet werden. Ist beispielsweise $n = 100$ und $p = 0{,}7$, so kann man dies als 100-maliges Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne mit sieben schwarzen Kugeln (Treffer) und drei weißen Kugeln (Nieten) deuten. Die Wahrscheinlichkeit für genau k schwarze Kugeln beträgt dann $P_{0,7}^{100}(X = k) = B(100; 0{,}7; k) = \binom{100}{k} \cdot 0{,}7^k \cdot 0{,}3^{100-k}$.



Allgemein gilt: Zieht man aus einer Urne mit N Kugeln, von denen S schwarz sind, n-mal mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge, so beträgt die Wahrscheinlichkeit für genau k schwarze Kugeln $P_p^n(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ mit $p = \frac{S}{N}$.

Beispiel 1

Etwa 2 % aller Schulkinder gelten als hochbegabt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer zufällig ausgewählten Gruppe von 50 Schulkindern mehr als eines hochbegabt ist. Begründen Sie Ihre Modellierung.

→ Strategie | Seite 258
Betrachten von etwas Gegenteiligem

Lösung

Es liegt eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 50$ mit dem Parameter $p = 0{,}02$ vor, da die Kinder zufällig ausgewählt wurden, d.h., die Bernoulli-Experimente sind unabhängig. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl Hochbegabter in der Gruppe an und ist nach $B(50; 0{,}02)$ verteilt.

$P^{50}_{0{,}02}(X > 1) = 1 - P^{50}_{0{,}02}(X \leq 1) = 1 - F^{50}_{0{,}02}(1) = 1 - 0{,}73577\ldots \approx 26\,\%$

Beispiel 2

Einer großen Sendung von Stanzteilen mit einem Ausschussanteil von 4 % werden 30 Teile zu Prüfzwecken entnommen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens ein Stanzteil Ausschuss ist. Begründen Sie Ihre Modellierung.

Lösung

In der Praxis werden die Teile ohne Zurücklegen gezogen. Da die Anzahl der Teile insgesamt sehr groß ist, wird sich der Ausschussanteil bei Entnahme der 30 Teile praktisch nicht ändern, d.h., man kann die einzelnen Züge als unabhängig ansehen. Somit kann man den Vorgang als Bernoulli-Kette der Länge $n = 30$ mit dem Parameter $p = 0{,}04$ betrachten. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Ausschussteile an und ist somit nach $B(30; 0{,}04)$ verteilt.

$P^{30}_{0{,}04}(X \leq 1) = 0{,}66117\ldots \approx 66\,\%$

Beispiel 3 („Dreimal-mindestens-Aufgabe“)

Für einen Test werden Schulkinder nach dem Zufallsprinzip ausgewählt. Bestimmen Sie die Anzahl der Kinder, die man mindestens auswählen muss, um mit mindestens 99 % Wahrscheinlichkeit mindestens ein hochbegabtes Kind in der Testgruppe zu haben, wenn etwa 2 % aller Schulkinder als hochbegabt gelten.

→ Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

Lösung

Da die „Trefferwahrscheinlichkeit“ für ein hochbegabtes Kind konstant bleibt, handelt es sich um eine Bernoulli-Kette der Länge n mit dem Parameter $p = 0{,}02$. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der hochbegabten Kinder und ist $B(n; 0{,}02)$-verteilt.

$P^{n}_{0{,}02}(X \geq 1) \geq 0{,}99$ mit $P^{n}_{0{,}02}(X \geq 1) = 1 - P^{n}_{0{,}02}(X = 0) = 1 - 0{,}98^n$

$1 - 0{,}98^n \geq 0{,}99 \iff 0{,}98^n \leq 0{,}01 \iff \ln(0{,}98^n) \leq \ln(0{,}01) \iff n \cdot \ln(0{,}98) \leq \ln(0{,}01)$

Logarithmengesetz:
$\log_a(b^x) = x \cdot \log_a(b)$

Da $\ln(0{,}98) < 0$ ist, folgt $n \geq \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}98)} \approx 227{,}9$.

Es müssen mindestens 228 Schulkinder nach dem Zufallsprinzip ausgewählt werden.

Alternative Lösung: Die Gleichung $0{,}98^n = 0{,}01$ hat die Lösung $n = \log_{0{,}98}(0{,}01)$. Mit dem Taschenrechner wird $\log_{0{,}98}(0{,}01) \approx 227{,}9$ direkt bestimmt. Die Ungleichung $0{,}98^n \leq 0{,}01$ wird für $n \geq 228$ erfüllt, da $0{,}98^{228} \leq 0{,}01$ und $0{,}98^{227} > 0{,}01$ ist.

Aufgaben

1 Ein Würfel wird 100-mal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Sechs

a) genau 15-mal fällt, **b)** höchstens 15-mal fällt, **c)** mehr als 15-mal fällt,
d) mehr als 15-mal und weniger als 25-mal fällt,
e) mindestens 15-mal und höchstens 25-mal fällt.

2 In einer Klinik werden pro Jahr 200 Patienten mit einem bestimmten Medikament behandelt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Patient auf dieses Medikament unerwünschte Nebenwirkungen zeigt, beträgt 0,02. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Laufe eines Jahres bei

(1) höchstens einem, (2) mehr als fünf, (3) mehr als zehn

so behandelten Patienten unerwünschte Nebenwirkungen auftreten.

3 Ein Händler hat einen Posten B-Ware elektronischer Bauteile erworben, von denen im Durchschnitt eines von zehn Bauteilen defekt ist. Er verkauft die Ware zum Sonderpreis.

a) Ein Bastler kauft 20 Bauteile. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 19 Bauteile einwandfrei arbeiten.

b) Ein Bastler denkt: „Wenn ich 16 Bauteile benötige und 18 kaufe, also gut 10 % mehr als nötig, dann sind mit Sicherheit 16 einwandfreie Bauteile dabei. Beurteilen Sie diese Überlegung.

→ Strategie | Seite 258
Betrachten von etwas Gegenteiligem

4 **Abiturprüfung 2018 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, daraus Teilaufgabe 1a)**
Ein Unternehmen stellt Kunststoffteile her. Erfahrungsgemäß sind 4 % der hergestellten Teile fehlerhaft. Die Anzahl fehlerhafter Teile unter zufällig ausgewählten kann als binomialverteilt angenommen werden.
50 Kunststoffteile werden zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
A: „Genau zwei der Teile sind fehlerhaft."
B: „Mindestens 6 % der Teile sind fehlerhaft."

5 Diskutieren Sie gemeinsam, ob sich der Sachverhalt als Bernoulli-Kette modellieren lässt. Geben Sie Ihre Ergebnisse an und beschreiben Sie gegebenenfalls zusätzliche Annahmen, die dafür gemacht werden müssen.

a) Ein Basketballspieler hat bei Freiwürfen eine Trefferquote von 85 %. Er wirft zehn Freiwürfe. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Treffer an.

b) Eine Lostrommel enthält sechs Gewinne und vier Nieten. Man zieht drei Lose. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Gewinne an.

c) Ein Medikament wirkt bei 90 % der Patienten. Ein Arzt verabreicht es zwölf Patienten. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Patienten an, bei denen das Medikament wirkt.

6 Eine verbogene Münze mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}4$ für Zahl wird zehnmal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) in den ersten drei Würfen Zahl und in den restlichen Wappen fällt,

b) höchstens dreimal Zahl fällt,

c) in den ersten drei Würfen jedes Mal Zahl, insgesamt aber viermal Wappen fällt,

d) in den ersten drei Würfen höchstens einmal Wappen und unter den letzten fünf Würfen mindestens zweimal Wappen fällt.

7 Ein Sportverein hat 2080 Mitglieder; davon sind 930 männlich. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem aus neun Personen bestehenden Ausschuss die Mehrzahl der Ausschussmitglieder männlich ist, und erläutern Sie, welche Annahmen in Ihre Rechnung eingehen.

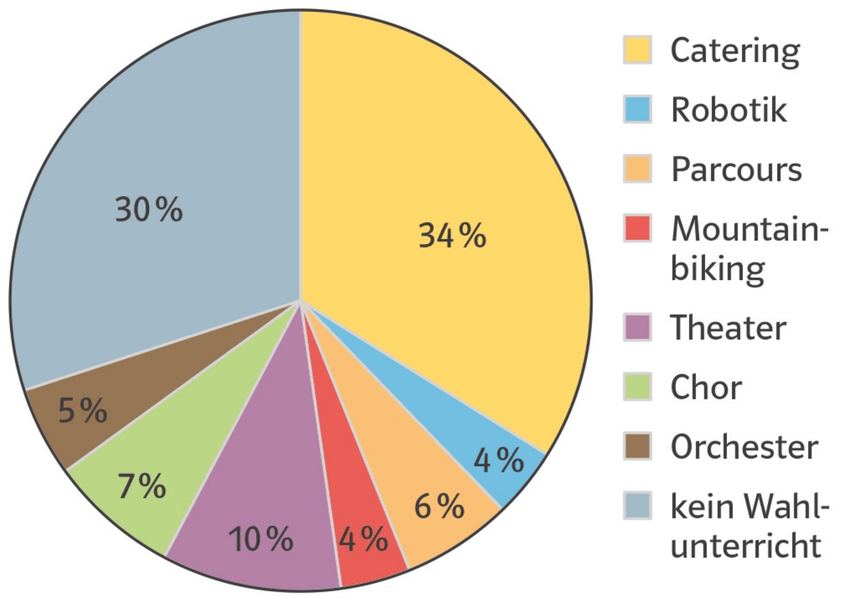
8 Die Grafik zeigt, welcher Wahlunterricht in der Unterstufe gewählt wurde.

a) Erläutern Sie, dass das Diagramm nur dann sinnvoll ist, wenn jede Schülerin bzw. jeder Schüler nur höchstens einen Kurs belegen kann.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(1) höchstens 10 von 50 zufällig ausgewählten Lernenden keinen Wahlunterricht haben,

(2) von 20 zufällig ausgewählten Lernenden mindestens drei einen der Wahlkurse Theater oder Chor belegt haben.



9 Überlegen Sie gemeinsam eine mögliche binomialverteilte Zufallsgröße zu dem angegebenen Zufallsexperiment. Geben Sie die Parameter n und p an und beschreiben Sie ihre Bedeutung.

a) Werfen von mehreren Würfeln

b) Prüfen von elektronischen Bauteilen

c) Freiwurftraining beim Basketball

d) Drehen eines Glückrades

10 Ein Biathlet schießt auf fünf Scheiben und hat eine Trefferquote von 90 %.

a) Ordnen Sie jedem Ereignis den Term zu, der die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses angibt, und begründen Sie Ihre Zuordnung.

A: „Er trifft alle fünf Scheiben."

B: „Er trifft mindestens drei Scheiben."

C: „Er trifft nur die beiden letzten Scheiben."

D: „Er trifft erstmals beim 3. Schuss."

E: „Er braucht weniger als drei Schüsse bis zum ersten Treffer."

F: „Treffer und Fehlschuss wechseln sich in dieser Reihenfolge ab."

(1) $0{,}1^2 \cdot 0{,}9$

(2) $0{,}9^3 \cdot 0{,}1^2$

(3) $\sum_{i=3}^{5} \binom{5}{i} \cdot 0{,}9^i \cdot 0{,}1^{5-i}$

(4) $0{,}9^2 \cdot 0{,}1^3$

(5) $0{,}9^5$

(6) $0{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}9$

b) Erörtern Sie, ob es gerechtfertigt ist, die Ereignisse „Nur der erste Schuss ist ein Fehler" und „Nur der letzte Schuss ist ein Fehler" als gleich wahrscheinlich zu betrachten.

11 **Abiturprüfung 2017 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, daraus Teilaufgaben a), b) und c)**

Ein Großhändler bietet Samenkörner für Salatgurken in zwei Qualitätsstufen an. Ein Samenkorn der höheren Qualität A keimt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %, eines der Qualität B mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 %. Ein Anbaubetrieb kauft Samenkörner beider Qualitätsstufen, 65 % aller gekauften Samenkörner sind von der Qualität A.

a) In einem Gedankenexperiment werden die eingekauften Samenkörner zusammengeschüttet und gemischt. Bestimmen Sie mithilfe eines beschrifteten Baumdiagramms

α) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Samenkorn keimt;

β) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Samenkorn, das nach der Saat keimt, von der Qualität B ist.

b) Der Anbaubetrieb sät 200 Samenkörner der Qualität B. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E: „Von den gesäten Samenkörnern keimen genau 140."

F: „Von den gesäten Samenkörnern keimen mehr als 130 und weniger als 150."

c) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang die Bedeutung des Terms $1 - P(X \geq 275)$, wobei X eine binomialverteilte Zufallsgröße mit den Parametern $n = 300$ und $p = 0{,}95$ bezeichnet.

Test 1

→ Lösungen | Seite 280

12 Für eine Sorte von Blumenzwiebeln gibt es eine Keimgarantie von 90 %.

a) In einer Packung sind 20 Zwiebeln. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(1) genau 16,

(2) mindestens 16,

(3) höchstens 14,

(4) alle 20 Zwiebeln keimen.

Erläutern Sie Ihre Modellierungsannahmen.

b) Begründen Sie, dass man mindestens 16 Blumenzwiebeln pflanzen muss, wenn mit mindestens 95 % Wahrscheinlichkeit wenigstens zwölf Zwiebeln keimen sollen.

13 Nach der „Fünften Deutschen Mundgesundheitsstudie" waren 1989 nur 13 % der 13- bis 14-Jährigen kariesfrei. Im Jahr 2014 waren acht von zehn Personen dieser Altersgruppe frei von Karies. Ein Zahnarzt untersucht 25 Personen dieser Altersgruppe im Jahr 2014.

a) Bestimmen Sie die Anzahl von Personen mit kariesfreien Zähnen, für die die Wahrscheinlichkeit dafür am größten ist.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 18 Personen kariesfreie Zähne haben.

→ Strategie | Seite 256
Systematisches Probieren

14 Wird in der Mensa eines bestimmten Gymnasiums ein Fischgericht angeboten, dann wählt von 100 Gästen erfahrungsgemäß ein Drittel das Fischgericht.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Fischgerichte, die mindestens vorbereitet werden müssen, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % ausreichen.

b) Die Küche bereitet 33 Fischgerichte vor. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zu viele Fischgerichte vorbereitet wurden.

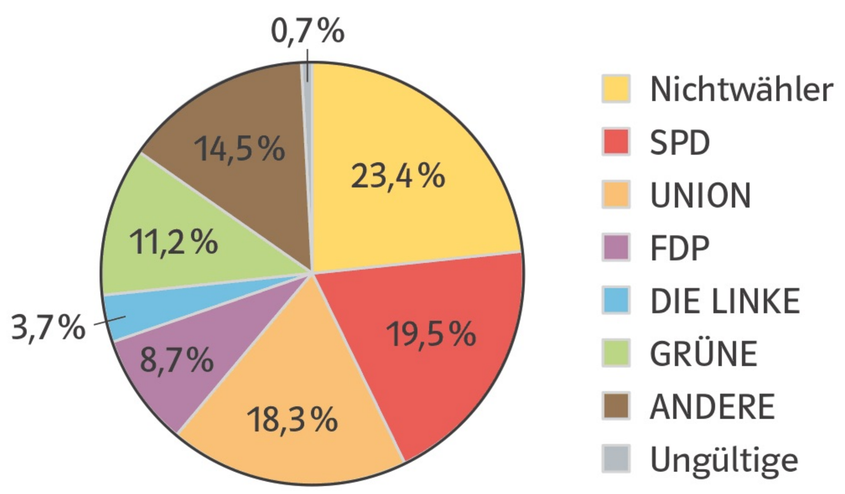
15 Berechnen Sie, wie oft man einen Würfel mindestens werfen muss, wenn man mit einer Wahrscheinlichkeit

a) von mehr als 90 %, **b)** von mehr als 99 %, **c)** von mehr als 99,9 %

mindestens einmal die Sechs erhalten will.

→ Strategie | Seite 258
Betrachten von etwas Gegenteiligem

16 Das Diagramm zeigt, wem die Wahlberechtigten, unter Einbeziehung der Nichtwählenden, bei der Bundestagswahl 2021 ihre Zweitstimme gegeben haben.



a) In den Veröffentlichungen der Wahlergebnisse wird der Zweitstimmenanteil der SPD mit 25,7 % angegeben. Erläutern Sie, wie diese Angabe mit der entsprechenden im Diagramm zusammenhängt.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Wahlberechtigten, die man mindestens auswählen muss, damit mit mindestens 99 % Wahrscheinlichkeit mindestens ein Nichtwähler unter ihnen ist. Erläutern Sie, welche Annahmen bei Ihrer Rechnung Eingang gefunden haben.

17 In den Hauptreisezeiten werden angebotene Reisen vom Veranstalter häufig überbucht, d. h., es werden mehr Plätze verkauft, als tatsächlich vorhanden sind. Ein Veranstalter weiß aus Erfahrung, dass im Schnitt 10 % der angemeldeten Personen eine Reise nicht antreten. Er bucht deshalb bei einer Fluggesellschaft 46 Plätze und verkauft an seine Kunden 50 Plätze. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es bei Reisebeginn keinen Ärger gibt.

18 **Abiturprüfung 2020 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 2**

Ein Telekommunikationsunternehmen möchte neue Kunden gewinnen. Dazu schickt es an zufällig ausgewählte Haushalte Werbematerial. Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass die angeschriebenen Haushalte unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils 20 % noch nicht über einen schnellen Internetanschluss verfügen.

a) Ermitteln Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 10 angeschriebenen Haushalten
- mindestens zwei noch nicht über einen schnellen Internetanschluss verfügen.
- genau acht bereits über einen schnellen Internetanschluss verfügen.

b) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term $0{,}2^{10} + (1 - 0{,}2)^{10}$ angegeben wird.

c) Ermitteln Sie, wie viele Haushalte das Unternehmen mindestens anschreiben müsste, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % wenigstens ein angeschriebener Haushalt, der noch nicht über einen schnellen Internetanschluss verfügt, einen solchen einrichten lassen würde. Gehen Sie dabei davon aus, dass sich jeder hundertste angeschriebene Haushalt, der noch nicht über einen schnellen Internetanschluss verfügt, dafür entscheidet, einen solchen einrichten zu lassen.

19 Ein Basketballspieler hat bei Freiwürfen eine Trefferquote von 80 %. Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment und geben Sie dazu ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit sich mit dem angegebenen Term berechnen lässt.

a) $\binom{8}{5} \cdot 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^3$ **b)** $1 - (9 \cdot 0{,}2^8 \cdot 0{,}8 + 0{,}2^9)$ **c)** $1 - \sum_{i=0}^{3} \binom{6}{i} \cdot 0{,}8^i \cdot 0{,}2^{6-i}$

20 Ein Produzent behauptet, dass in einer Lieferung von 500 Teilen höchstens 40 fehlerhaft sind. Um dies zu überprüfen, entnimmt ein Abnehmer der Lieferung drei Teile. Wenn eines davon fehlerhaft ist, schickt er die gesamte Lieferung zurück. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lieferung zurückgeschickt wird, obwohl die Angaben des Produzenten richtig sind, wenn

a) ohne Zurücklegen gezogen wird,

b) mit Zurücklegen gezogen wird.

21 Bei einem System zur Nachrichtenübertragung werden nur einzelne Zeichen übertragen, wobei im Durchschnitt jedes zehnte Zeichen falsch übermittelt wird.

a) Es werden fünf Zeichen übermittelt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse.
A: „Nur die ersten drei Zeichen werden richtig übertragen."
B: „Mindestens drei Zeichen werden richtig übertragen."

b) Eine Nachricht aus 100 Zeichen wird übertragen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei Zeichen falsch übertragen werden.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass vier hintereinander übertragene Zeichen fehlerfrei übermittelt werden.

d) Bestimmen Sie die Anzahl von Vierergruppen von Zeichen, die man mindestens übertragen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 99 % mindestens eine Vierergruppe fehlerfrei übermittelt wird.

e) Ermitteln Sie, wie groß der Anteil falsch übermittelter Zeichen mindestens sein muss, damit in einer zufällig ausgewählten Nachricht aus 100 Zeichen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens ein falsches Zeichen enthalten ist.

22 Ein Müsli wird in 500-g-Packungen in Kartons zu 8 Stück verkauft. Abfüllungsbedingt enthalten 30 % der Packungen weniger als 500 g. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 10 zufällig ausgewählten Kartons höchstens einer nur Packungen mit mindestens 500 g enthält.

Test 2

→ Lösungen | Seite 280

23 **Abiturprüfung 2021 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 2**

Ein Süßwarenunternehmen stellt verschiedene Sorten Fruchtgummis her.
Vor dem Verpacken werden die verschiedenfarbigen Gummibärchen in großen Behältern gemischt, wobei der Anteil der roten Gummibärchen 25 % beträgt. Ein Verpackungsautomat füllt jeweils 50 Gummibärchen aus einem der großen Behälter in eine Tüte.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer zufällig ausgewählten Tüte mehr als ein Drittel der Gummibärchen rot ist.

b) Um sicherzustellen, dass jeweils genau 50 Gummibärchen in eine Tüte gelangen, fallen diese einzeln nacheinander aus einer Öffnung des Behälters in den Verpackungsautomaten. Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem folgenden Term berechnet werden kann: $\sum_{k=0}^{3} (0{,}75^k \cdot 0{,}25)$

c) Ermitteln Sie, wie groß der Anteil der gelben Gummibärchen in der Produktion mindestens sein muss, damit in einer zufällig ausgewählten Tüte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens ein gelbes Gummibärchen enthalten ist.

24 Jeder 3. Studierende an einer Uni studiert im Fachbereich Technik. Bestimmen Sie die Mindestanzahl an Studierenden, die man zufällig auswählen muss, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass darunter mindestens 3 Studierende dieses Fachbereichs sind, mindestens 95 % beträgt.

Grundwissen Test

→ Lösungen | Seite 280

G 25 Fassen Sie den Term so weit wie möglich zusammen.

a) $4x - (7x - 3) - 3^2 + 3x$

b) $(x^2 + 5x) \cdot 6x - 6x \cdot (4 + 5x)$

c) $(2x^2 - 1) \cdot 6 - (3x - 2) \cdot 4x$

d) $(x^2 + 3x) \cdot 2x - (x^2 - 1) \cdot (2x + 3)$

e) $2z - (z + 1) \cdot (z + 3) + z(z - 9)$

f) $4t^2 - 6t + 2 \cdot (13 - 3t) - 2 \cdot (-3t \cdot 2)$

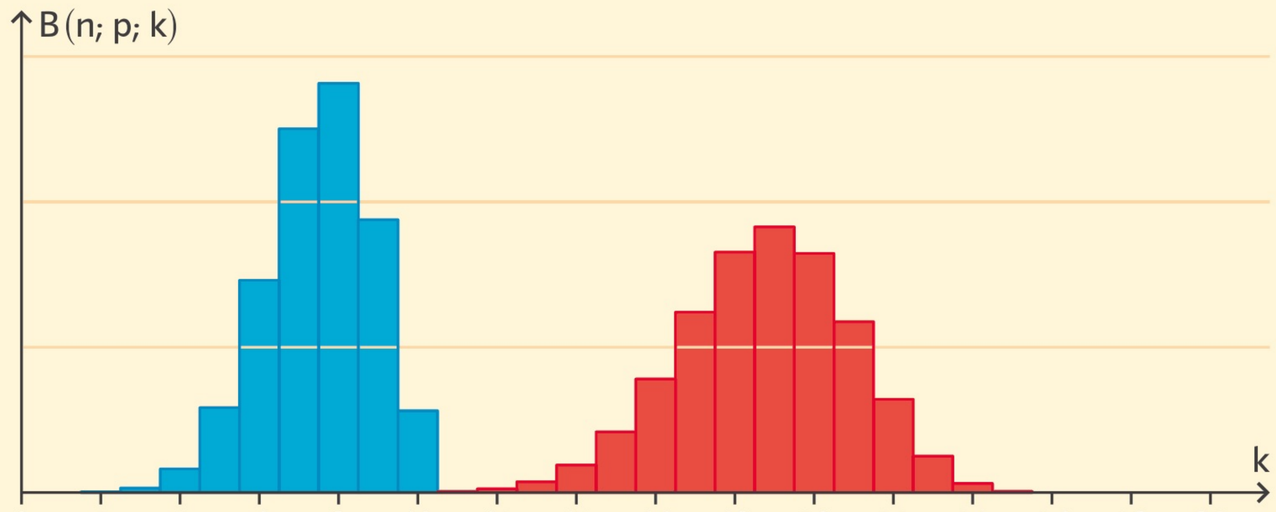
8 Erwartungswert und Varianz der Binomialverteilung

Die Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer nach $B(10;\,0{,}75)$ bzw. $B(25;\,0{,}75)$ verteilten Zufallsgröße.

a) Ordnen Sie die Diagramme den Verteilungen zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

b) Geben Sie eine Vermutung zum jeweiligen Erwartungswert der Zufallsgröße ab.

c) Erläutern Sie anhand der Diagramme, welche Zufallsgröße die größere Streuung besitzt.



Wichtige Kenngrößen der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße sind Erwartungswert und Varianz. Diese Kenngrößen werden nun für binomialverteilte Zufallsgrößen bestimmt.

Für den Erwartungswert $E(X)$ einer $B(n;\,p)$-verteilten Zufallsgröße X gilt

$$E(X) = 0 \cdot P_p^n(X = 0) + 1 \cdot P_p^n(X = 1) + \ldots + n \cdot P_p^n(X = n) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P_p^n(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Diese Summe und damit der **Erwartungswert** wird zunächst für $n = 1;\ 2$ und 3 berechnet.

$$n = 1:\ E(X) = \sum_{k=0}^{1} k \cdot \binom{1}{k} \cdot p^k \cdot q^{1-k} = 0 + p = p = 1p$$

$$n = 2:\ E(X) = \sum_{k=0}^{2} k \cdot \binom{2}{k} \cdot p^k \cdot q^{2-k} = 0 + 2pq + 2p^2 = 2p(q + p) = 2p \cdot 1 = 2p$$

$$n = 3:\ E(X) = \sum_{k=0}^{3} k \cdot \binom{3}{k} \cdot p^k \cdot q^{3-k} = 0 + 3pq^2 + 6p^2q + 3p^3 = 3p \cdot (p + q)^2 = 3p \cdot 1^2 = 3p$$

Man kann zeigen, dass allgemein gilt:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = np \cdot (p + q)^{n-1} = np \cdot 1^{n-1} = np.$$

Zur Erinnerung:
Erwartungswert einer Zufallsgröße X:
$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$,
wobei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die möglichen Werte der Zufallsgröße X sind.

Für die **Varianz** einer $B(n;\,p)$-verteilten Zufallsgröße gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= (0 - np)^2 \cdot P_p^n(X = 0) + (1 - np)^2 \cdot P_p^n(X = 1) + \ldots + (n - np)^2 \cdot P_p^n(X = n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (k - np)^2 \cdot P_p^n(X = k) = \sum_{k=0}^{n} (k - np)^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}. \end{aligned}$$

Es wird exemplarisch die Varianz für $n = 2$ bestimmt.

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= (0 - 2p)^2 \cdot P_p^2(X = 0) + (1 - 2p)^2 \cdot P_p^2(X = 1) + (2 - 2p)^2 \cdot P_p^2(X = 2) \\ &= (0 - 2p)^2 \cdot \quad q^2 \quad + (1 - 2p)^2 \cdot \quad 2pq \quad + (2 - 2p)^2 \cdot \quad p^2 \\ &= 2pq \qquad\qquad \text{(nach algebraischer Umformung)} \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass allgemein gilt:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{k=0}^{n} (k - np)^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = npq.$$

Zur Erinnerung:
Varianz einer Zufallsgröße X:
$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$.

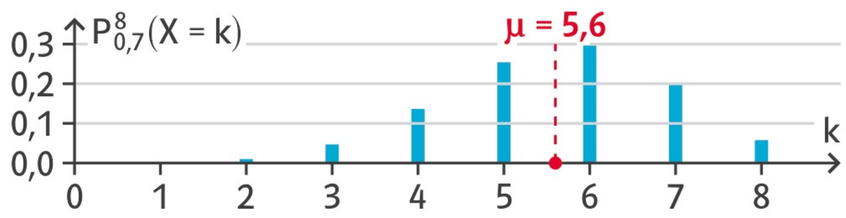
Satz: Für die Kenngrößen einer nach $B(n;\,p)$ verteilten Zufallsgröße X gilt:

Erwartungswert: $\mu = E(X) = np$,

Varianz: $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = npq$ mit $q = 1 - p$,

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{npq}$.

Der Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße ist im Allgemeinen keine Trefferanzahl. Ist die Zufallsgröße X z. B. nach $B(8;\,0{,}7)$ verteilt, so gilt $E(X) = 8 \cdot 0{,}7 = 5{,}6$.

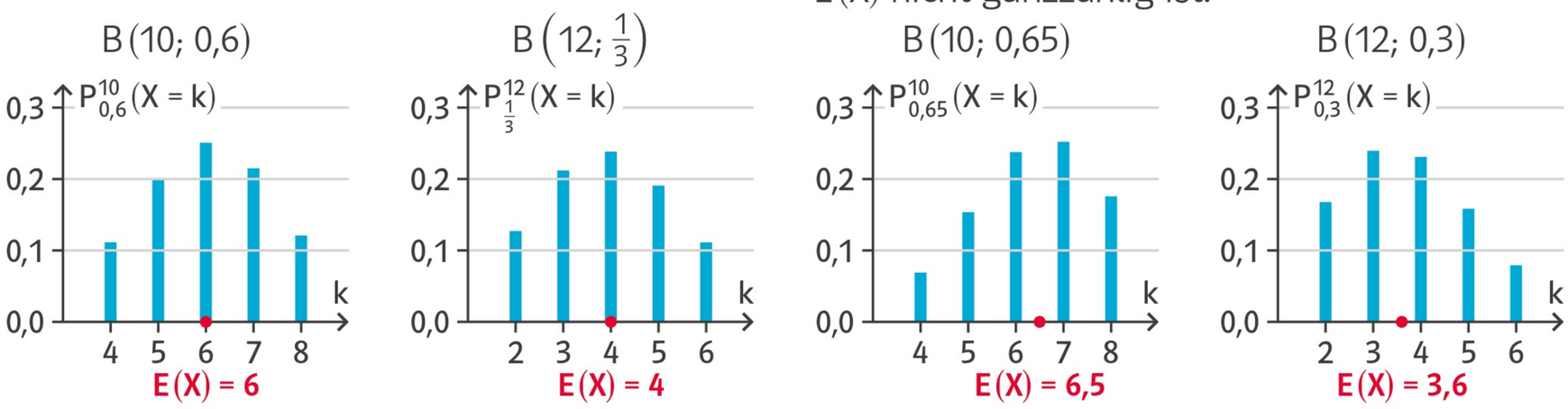


Binomialverteilung – Säulendiagramme und Histogramme

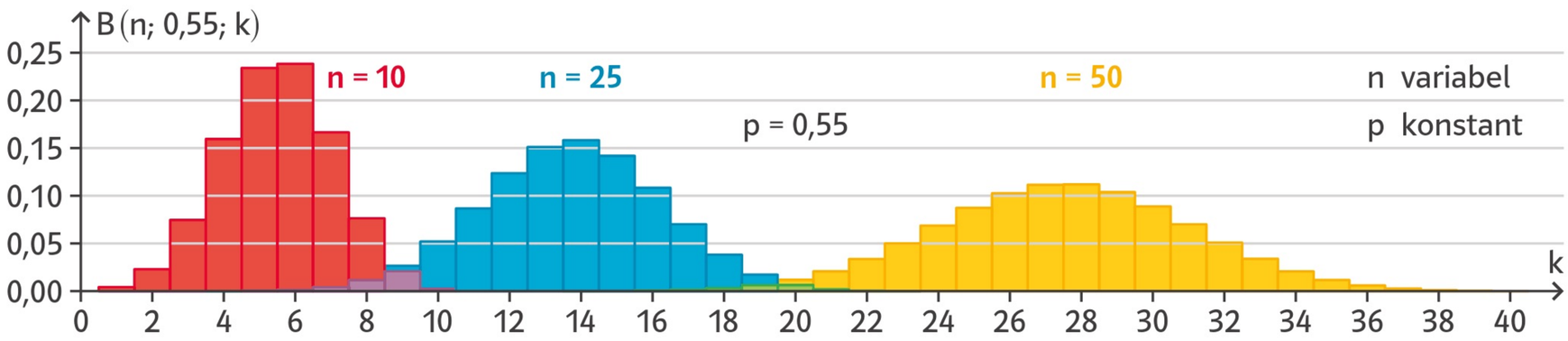
Ist die Zufallsgröße X nach $B(n; p)$ verteilt, so ist die Trefferanzahl mit der größten Wahrscheinlichkeit

bei $k = E(X)$, wenn $E(X)$ ganzzahlig ist.

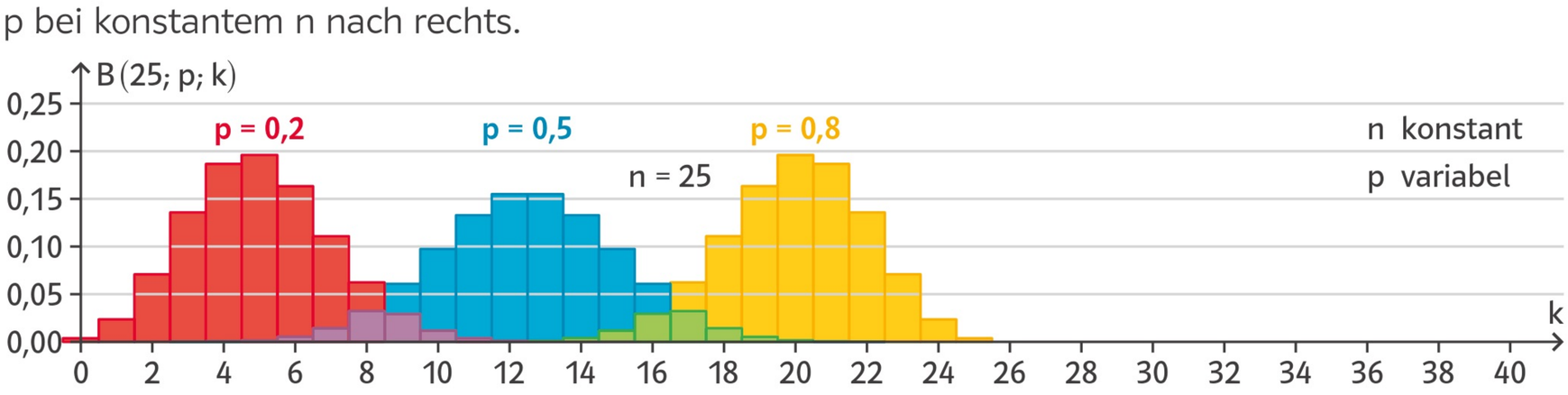
bei der von $E(X)$ aus gesehen nächstkleineren oder nächstgrößeren Trefferanzahl k, wenn $E(X)$ nicht ganzzahlig ist.



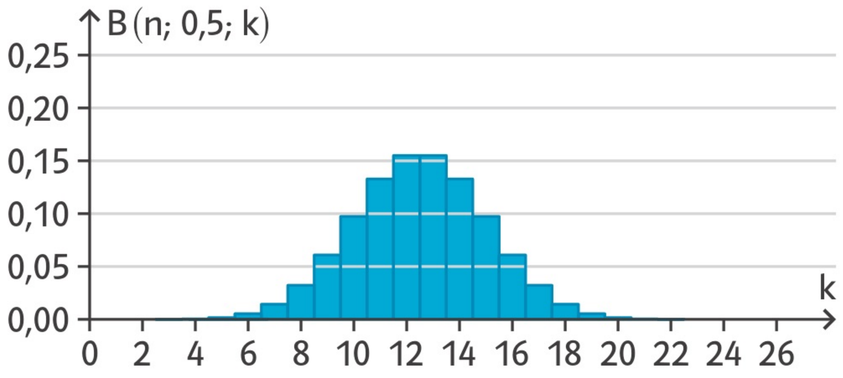
Die Histogramme einer nach $B(n; p)$ verteilten Zufallsgröße werden mit wachsendem n bei konstantem p flacher. Die Maximalwerte der Wahrscheinlichkeitsfunktionen nehmen dabei ab.



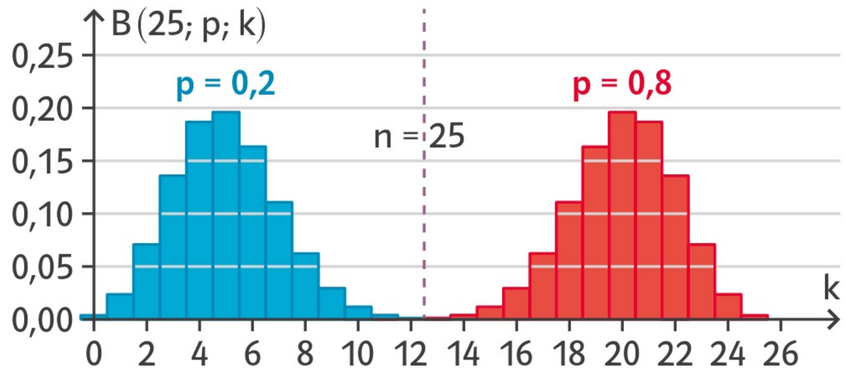
Die Histogramme einer nach $B(n; p)$ verteilten Zufallsgröße verschieben sich mit wachsendem p bei konstantem n nach rechts.



Das Histogramm bzw. Säulendiagramm einer nach $B(n; p)$ verteilten Zufallsgröße ist für $p = 0,5$ achsensymmetrisch.



Die Histogramme bzw. Säulendiagramme von nach $B(n; p)$ und $B(n; 1 - p)$ verteilten Zufallsgrößen sind zueinander symmetrisch.



Beispiel 1

Eine Bogenschützin gibt wiederholt eine Serie von fünf Schüssen auf eine Scheibe ab. Sie trifft bei jedem Schuss mit der Wahrscheinlichkeit 0,75 ins „Gelbe“. Bestimmen Sie, mit wie vielen Treffern sie auf lange Sicht im Durchschnitt pro Serie rechnen kann.

Lösung

Eine Serie kann als Bernoulli-Kette der Länge $n = 5$ mit dem Parameter $p = 0,75$ betrachtet werden. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Treffer bei einer Serie an.

Es ist $E(X) = 5 \cdot 0,75 = 3,75$. Die Bogenschützin kann auf lange Sicht im Durchschnitt mit 3,75 Treffern ins „Gelbe“ pro Serie rechnen.

Hinweis:
vgl. Aufgabe 14

Mit einer dynamischen Mathematiksoftware können unterschiedliche Histogramme mithilfe von Schiebereglern erzeugt werden.

Wenn n konstant ist, dann nehmen die Maximalwerte der Wahrscheinlichkeitsfunktionen bei $p = 0,5$ ihr Minimum an.

Zur linken Abbildung:
vgl. Aufgabe 25.

Beispiel 2

Ein Würfel wird 50-mal geworfen. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Sechsen an.

a) Erstellen Sie ein Säulendiagramm und markieren Sie den Bereich, in dem die Werte von X liegen, die vom Erwartungswert höchstens um eine Standardabweichung abweichen.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Wert von X höchstens um eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht.

Lösung

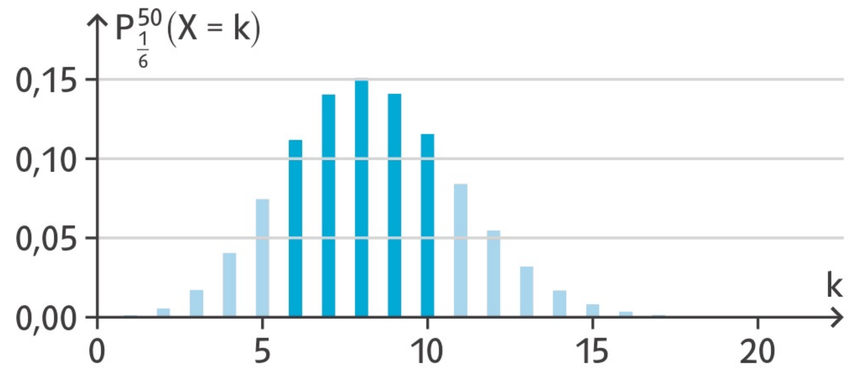
a) Die Zufallsgröße X ist $B\left(50; \frac{1}{6}\right)$-verteilt.

Erwartungswert: $\mu = E(X) = 50 \cdot \frac{1}{6} \approx 8{,}3$.

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{50 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 2{,}6$.

$\mu - \sigma \approx 8{,}3 - 2{,}6 = 5{,}7$

$\mu + \sigma \approx 8{,}3 + 2{,}6 = 10{,}9$



b) $P^{50}_{\frac{1}{6}}(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) = P^{50}_{\frac{1}{6}}(5{,}7 \le X \le 10{,}9) = P^{50}_{\frac{1}{6}}(6 \le X \le 10) = P^{50}_{\frac{1}{6}}(X \le 10) - P^{50}_{\frac{1}{6}}(X \le 5)$

$= 0{,}798\,62\ldots - 0{,}138\,81\ldots \approx 0{,}660$

Aufgaben

1 Eine Zufallsgröße X ist $B(n; 0{,}4)$-verteilt.

a) Bestimmen Sie jeweils Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung von X für $n = 10;\ 20;\ 50$ und 100.

b) Bestimmen Sie jeweils den Wert von k so, dass $B(n; 0{,}4; k)$ maximal wird für $n = 10;\ 20;\ 50$ und 100.

→ Strategie | Seite 260 Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

2 Aus einer Urne mit 75 weißen und 25 roten Kugeln wird 25-mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln an, die Zufallsgröße Y die der roten Kugeln.

a) Bestimmen Sie jeweils Erwartungswert und Varianz von X und Y.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zehn rote Kugeln gezogen werden.

→ Strategie | Seite 258 Betrachten von etwas Gegenteiligem

3 Eine Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ. Berechnen Sie jeweils die Werte von n und p.

→ Strategie | Seite 259 Aufstellen und Lösen eines Gleichungssystems

a) $\mu = 20,\ \sigma = 4$ **b)** $\mu = \frac{10}{3},\ \sigma = \frac{2}{3}\sqrt{5}$ **c)** $\mu = 75,\ \sigma = 7{,}5$

d) $\mu = \frac{2000}{6},\ \sigma = \frac{100}{6}$ **e)** $\mu = 400,\ \sigma = 4\sqrt{15}$ **f)** $\mu = 60,\ \sigma = 3\sqrt{5}$

4 Bei der Fertigung von Spielzeugautos weist durchschnittlich jedes 15. Auto Mängel auf.

a) Bestimmen Sie die Anzahl mängelbehafteter Autos, mit der man auf lange Sicht im Durchschnitt an einem Produktionstag rechnen muss, wenn pro Arbeitstag 630 Stück produziert werden.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 30 zufällig herausgegriffenen Exemplaren höchstens eines mit Mängeln behaftet ist.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 30 zufällig ausgewählten Spielzeugautos genau zwei Autos Mängel aufweisen.

5 Eine Zufallsgröße X ist $B(50; 0{,}4)$-verteilt.

a) Bestimmen Sie alle Werte von X, die in dem Intervall liegen, das durch $|X - \mu| \le \sigma$ festgelegt wird.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsgröße X Werte aus dem in Teilaufgabe a) berechneten Intervall annimmt.

6 Begründen Sie: Vervierfacht man bei einer Bernoulli-Kette die Anzahl der Teilexperimente und lässt die Trefferwahrscheinlichkeit gleich, so verdoppelt sich die Standardabweichung.

7 Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit den Parametern n und p, wobei $0 < p < 1$ gilt. Begründen Sie, dass die Varianz von X kleiner als der Erwartungswert von X ist.

8 Gegeben sind eine Zufallsgröße X sowie ihr Erwartungswert μ und ihre Varianz σ^2. Erklären Sie sich gegenseitig mit Worten, was die Ungleichung $|X - \mu| \leq \sigma$ bedeutet.

9 **Abiturprüfung 2017 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1**
Das elektronische Stabilitätsprogramm (ESP) eines Autos kann Schleuderbewegungen und damit Unfälle verhindern.
Gehen Sie bei der folgenden Aufgabe davon aus, dass 40 % aller Autos mit ESP ausgerüstet sind. 200 Autos werden nacheinander zufällig ausgewählt; die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der ausgewählten Autos mit ESP.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den ausgewählten Autos mindestens 70 mit ESP ausgerüstet sind.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse.
A: „Das fünfte ausgewählte Auto ist das erste mit ESP."
B: „Die Zufallsgröße X nimmt einen Wert an, der von ihrem Erwartungswert höchstens um eine Standardabweichung abweicht."

10 Bei der Produktion von elektronischen Bauteilen ist im Mittel eines von sechs Bauteilen nicht einwandfrei. Es werden n Bauteile zufällig ausgewählt.

a) Erläutern Sie, dass die Anzahl der nicht einwandfreien Bauteile als binomialverteilt angesehen werden kann.

b) Es sei $n = 330$. Bestimmen Sie die Anzahl nicht einwandfreier Bauteile, die mit der größten Wahrscheinlichkeit auftritt.

Test 1

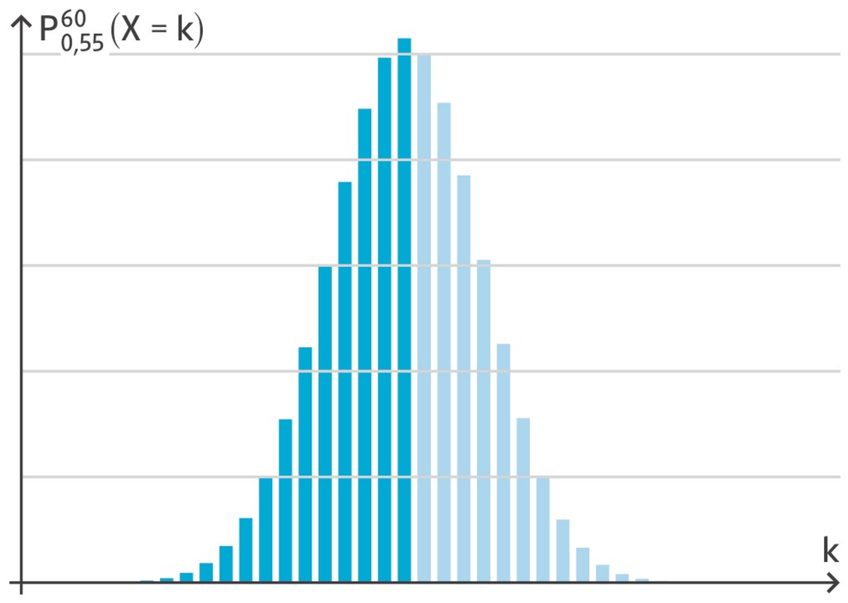
Lösungen | Seite 280

11 In einer Fabrik werden die hergestellten Teile von einer Kontrolleurin überprüft, die jedes Teil mit einer Wahrscheinlichkeit von 96 % richtig beurteilt. X sei die Anzahl der falschen Entscheidungen der Kontrolleurin bei 200 Kontrollen.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert μ von X und interpretieren Sie die ermittelte Zahl.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der falsch beurteilten Teile im Intervall $[\mu - \sigma;\ \mu + \sigma]$ liegt.

12 Die Zufallsgröße X ist nach $B(60; 0{,}55)$ verteilt. Das Säulendiagramm zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.



a) Ermitteln Sie den Wert von k, für den die dunkelblau markierten Säulen die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq k)$ darstellen.

b) Die Zufallsgröße Z ist nach $B(60; p_Z)$ verteilt. Geben Sie alle Werte von p_Z mit $0 < p_Z < 1$ an, für die die Wahrscheinlichkeit $P(Z = 20)$ kleiner ist als die Wahrscheinlichkeit $P(Z = 40)$.

13 Die Zufallsgröße X ist $B(60; 0{,}26)$-verteilt. Begründen Sie ohne Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X bei 15 oder 16 den größten Wert hat.

14 Die Zufallsgröße ist nach $B(n; 0{,}4)$ verteilt.

a) Veranschaulichen Sie mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware, dass mit zunehmendem Wert von n die zugehörigen Histogramme flacher werden.

b) Erläutern Sie, dass mit zunehmendem Wert von n die Varianzen größer werden.

15 Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit den Parametern n und p, wobei $0 < p < 1$ gilt. Geben Sie für n und p Werte so an, dass die Standardabweichung von X größer als der Erwartungswert von X ist. Begründen Sie Ihre Angabe.

16 Eine binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = 4$ und die Varianz $\sigma^2 = 2{,}4$. Beschreiben Sie zur Zufallsgröße X ein Urnenexperiment.

17 Mäuse bringen in der Regel mehrere Jungtiere zur Welt. Bei 100 Würfen mit je vier Jungtieren pro Wurf wurde jeweils die Anzahl k der weiblichen Tiere festgestellt.

k	0	1	2	3	4
n_k	7	32	33	24	4

n_k: Häufigkeit eines Wurfs mit k weiblichen Jungtieren

a) Berechnen Sie das arithmetische Mittel $\bar{k}$ der Anzahl der weiblichen Tiere pro Wurf.

b) Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der weiblichen Tiere pro Wurf an. Man nimmt an, dass X eine $B(4; p)$-verteilte Zufallsgröße ist. Bestimmen Sie den Näherungswert p^* für p, wenn man $\bar{k}$ als Näherung für den Erwartungswert μ auffasst.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $B(4; p^*; k)$ für $k = 0; 1; 2; 3$ und 4. Vergleichen Sie diese Wahrscheinlichkeiten mit den empirisch gefundenen relativen Häufigkeiten.

18 Eine Zufallsgröße X ist $B(n; p)$-verteilt.

a) Es sei $p = 0{,}4$. Übertragen Sie die Tabelle in Ihr Heft und vervollständigen Sie diese unter Zuhilfenahme einer dynamischen Mathematiksoftware.

$p = 0{,}4$

n	10	30	50	100
$P(\lvert X - \mu\rvert < \sigma)$				

b) Es sei $n = 50$. Übertragen Sie die Tabelle in Ihr Heft und vervollständigen Sie diese unter Zuhilfenahme einer dynamischen Mathematiksoftware.

$n = 50$

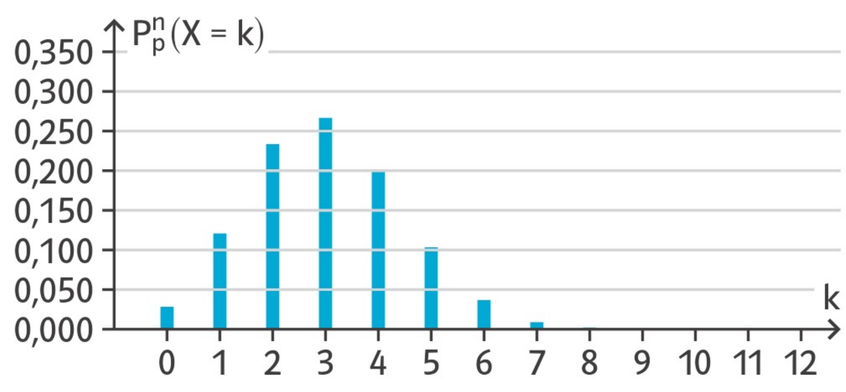
p	0,4	0,5	0,60	0,75
$P(\lvert X - \mu\rvert < \sigma)$				

c) Formulieren Sie gemeinsam eine Auffälligkeit der Ergebnisse der Teilaufgaben a) und b). Überprüfen Sie Ihre Hypothese für verschiedene selbst gewählte Werte von n und p.

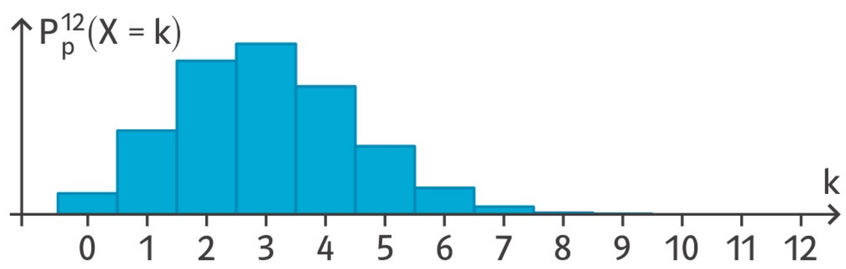
19 Das Diagramm beschreibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer nach $B(10; p)$ verteilten Zufallsgröße X.

a) Bestimmen Sie Erwartungswert μ und Standardabweichung σ der Zufallsgröße X.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\lvert X - \mu\rvert \leq \sigma)$.



20 Die Zufallsgröße X ist nach $B(12; p)$ verteilt und besitzt die Standardabweichung 1,5. Die Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.
Ermitteln Sie den Wert des Parameters p.



21 Eine binomialverteilte Zufallsgröße hat die Parameter $n = 100$ und $p = 25\,\%$. Ermitteln Sie den kleinsten symmetrisch um den Erwartungswert liegenden Bereich, in dem die Werte der Zufallsgröße mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % liegen.

22 **Abiturprüfung 2021 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 4**

Ein Süßwarenunternehmen stellt verschiedene Sorten Fruchtgummis her.
Bei einer Werbeaktion werden den Fruchtgummitüten Rubbellose beigelegt. Beim Freirubbeln werden auf dem Los bis zu drei Goldäpfel sichtbar. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Goldäpfel, die beim Freirubbeln sichtbar werden. Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	p_0	p_1	0,2	0,1

a) Die Zufallsgröße X hat den Erwartungswert 1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 und berechnen Sie die Varianz von X.

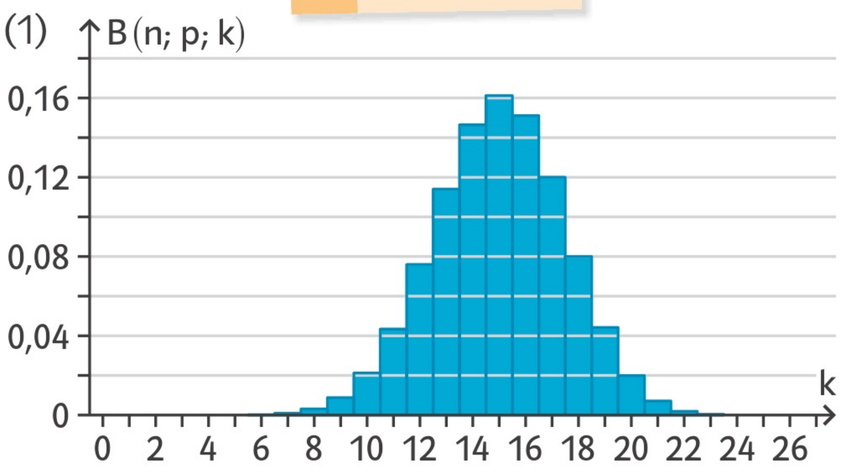
b) Ohne Kenntnis des Erwartungswerts ist die Varianz in der Regel nicht aussagekräftig. Daher wird für den Vergleich verschiedener Zufallsgrößen oft der Quotient aus der Standardabweichung und dem Erwartungswert betrachtet, der als relative Standardabweichung bezeichnet wird.
Die Zufallsgröße Y_n beschreibt die Anzahl der Goldäpfel, die beim Freirubbeln von n Losen sichtbar werden. Es gilt $E(Y_n) = n$ und $Var(Y_n) = n$. Bestimmen Sie den Wert von n, für den die relative Standardabweichung 5 % beträgt.

23 Zwei Zufallsgrößen sind binomialverteilt und haben beide den Erwartungswert $\mu = 15$.
Ordnen Sie jeder Varianz das zugehörige Histogramm zu und berechnen Sie jeweils die Werte der Parameter n und p.

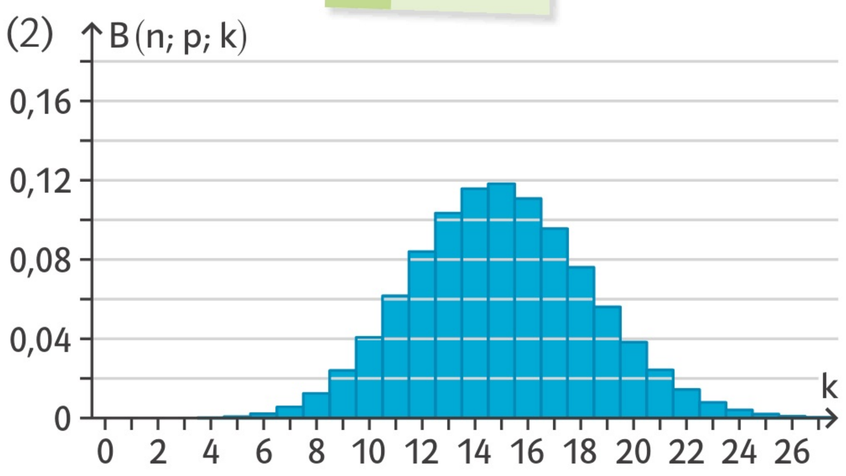
A $\sigma^2 = 11{,}25$

B $\sigma^2 = 6$

(1)



(2)



Test 2

→ Lösungen | Seite 280

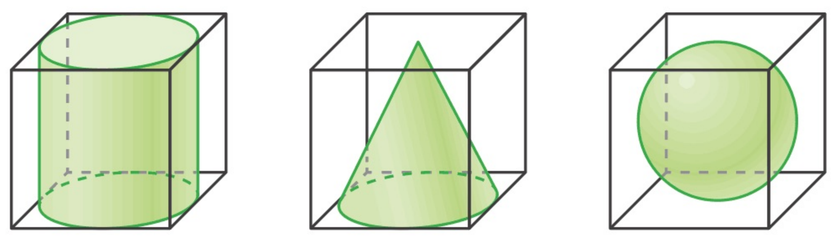
24 In einer großen Autowerkstatt führt im Mittel jede fünfte Reparatur zu einer Kundenbeschwerde. Die Chefin der Autowerkstatt möchte die Kundenzufriedenheit erhöhen und startet ein Programm zur Qualitätssicherung. Sie überprüft dessen Fortschritt nach einiger Zeit, indem sie 50 Reparaturen zufällig auswählt und damit verbundene Beschwerden zählt.
Die Chefin ist zufrieden, wenn in einer Stichprobe von 50 Reparaturen die Anzahl der Beschwerden um mehr als eine Standardabweichung unter dem Erwartungswert liegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Chefin weiter unzufrieden ist, obwohl sich im Mittel die Anzahl der Beschwerden gegenüber dem ursprünglichen Wert halbiert hat.

25 Beweisen Sie, dass das Histogramm einer binomialverteilten Zufallsgröße mit $p = \frac{1}{2}$ achsensymmetrisch ist.

Grundwissen Test

→ Lösungen | Seite 280

G 26 Einem Würfel ist ein Zylinder bzw. ein Kegel bzw. eine Kugel einbeschrieben. Bestimmen Sie jeweils den Anteil des Körpervolumens vom Würfelvolumen in Prozent.



9 Axiomatische Definition von Wahrscheinlichkeit

Alice

An meinem Geburtstag schenkt mir meine Freundin mit 50-prozentiger Wahrscheinlichkeit einen Kuchen.

Benjamin

Beim Wurf zweier Würfel ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{9}$, dass die Augensumme 5 beträgt.

Erläutern Sie, wie Alice, Benjamin und Clara zu ihren Aussagen gekommen sein könnten.

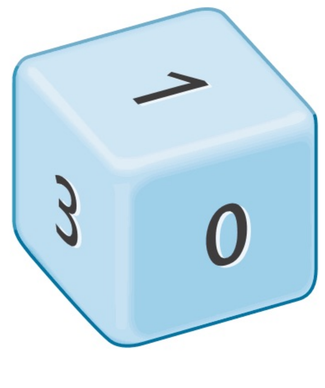
Clara

Die Streichholzschachtel fällt mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % auf die Ober- oder Unterseite.

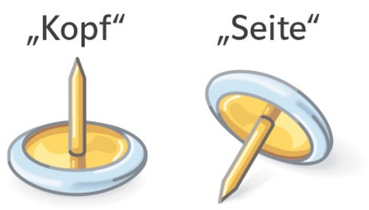
Beim Wurf eines Würfels beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Augenzahl gerade“ $\frac{3}{6}$, wobei die Annahme gilt, dass alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind. Allgemein wird bei Laplace-Experimenten die Wahrscheinlichkeit P(A) eines Ereignisses A als Quotient

$$\frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$ berechnet.

Man sagt, dass Laplace-Experimenten der **Laplace’sche Wahrscheinlichkeitsbegriff** zugrunde liegt.



Beim Wurf eines Reißnagels sind die Ergebnisse „Kopf“ und „Seite“ nicht gleich wahrscheinlich. Zur Ermittlung ihrer Wahrscheinlichkeiten wird das „empirischen Gesetz der großen Zahlen“ verwendet. Man wiederholt das Experiment unter gleichen Bedingungen häufig und erhält dabei Näherungswerte für die unbekannten Wahrscheinlichkeiten. Diesem Vorgehen liegt der **frequentistische Wahrscheinlichkeitsbegriff** zugrunde.



Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Hakim morgen in der Mathematikschulaufgabe mindestens die Note zwei erreicht, wird von verschiedenen Personen (Hakim, Lehrkraft, Eltern) je nach Erfahrungswerten unterschiedlich angegeben. Hier liegt ein **subjektiver Wahrscheinlichkeitsbegriff** zugrunde, da man den Ergebnissen keine personenunabhängigen Wahrscheinlichkeiten zuordnen kann. Zudem können sich die Wahrscheinlichkeiten ändern, wenn Zusatzinformationen vorliegen. Hakim könnte seine angegebene Wahrscheinlichkeit ändern, wenn die Schulaufgabe geschrieben, aber noch nicht korrigiert ist.

Die drei genannten Wahrscheinlichkeitsbegriffe erwiesen sich als nicht tragfähig für die Definition von Wahrscheinlichkeit.

- Der Laplace’sche Wahrscheinlichkeitsbegriff setzt voraus, dass alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, was häufig nicht der Fall ist.
- Der frequentistische Wahrscheinlichkeitsbegriff setzt voraus, dass man ein Zufallsexperiment beliebig oft wiederholen kann, was nicht möglich ist.
- Beim subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff werden Ereignissen vom Wissensstand des Beobachters abhängige Wahrscheinlichkeiten zugeschrieben.

Zur Erinnerung:
Besteht ein Ereignis nur aus einem Element, so sprechen wir der Einfachheit halber von der Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses anstatt von der Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses.

Andrei Kolmogorow erreichte 1933 mit einem völlig anderen Ansatz den Durchbruch bei der Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Er interessierte sich gewissermaßen nicht mehr für die konkrete Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, sondern beschrieb nur noch sehr allgemeine Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten. Kolmogorow verwendete in seiner Definition eine Menge Ω (Ergebnismenge), die Teilmengen von Ω (Ereignisse) und eine Funktion P mit bestimmten Eigenschaften, die jeder Teilmenge A von Ω einen Wert P(A) (Wahrscheinlichkeit) zuordnet.

Andrei Nikolajewitsch Kolmogorow (1903 – 1987), russischer Mathematiker

Definition: Eine Funktion $P: A \mapsto P(A)$ mit $A \subset \Omega$ und $P(A) \in \mathbb{R}$ heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung** und **P(A) Wahrscheinlichkeit** von A, wenn P folgende Bedingungen, die **Axiome von Kolmogorow**, erfüllt:
Axiom I: $P(A) \geq 0$.
Axiom II: $P(\Omega) = 1$.
Axiom III: Wenn $A \cap B = \{\ \}$ ist, dann gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Zur Erinnerung:
Ein Axiom ist eine Aussage, die aufgrund der Erfahrung oder Anschauung ohne Nachweis als wahr vorausgesetzt wird.

Diese sehr allgemeine Definition von Kolmogorow genügt, um die Wahrscheinlichkeitsrechnung lückenlos zu formulieren und deren Sätze zu beweisen. Die in der Definition für Wahrscheinlichkeiten festgelegten Eigenschaften gelten analog für relative Häufigkeiten.

Das Paar $(\Omega; P)$ heißt Wahrscheinlichkeitsraum.

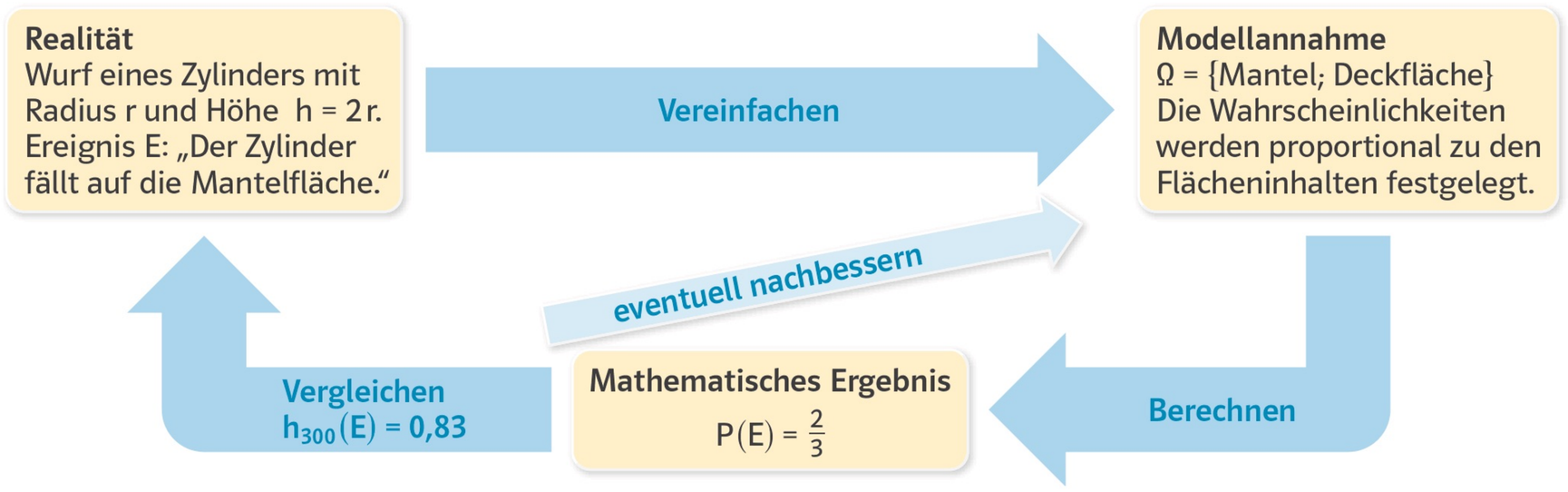
Mit den Kolmogorow-Axiomen lässt sich beispielsweise die Regel für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ auf rein formalem Weg beweisen:
Nach Definition von $\overline{A}$ gilt $A \cap \overline{A} = \{\ \}$. Mit Axiom III folgt $P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$. (*)
Nach Definition von $\overline{A}$ gilt auch $A \cup \overline{A} = \Omega$. Mit Axiom II folgt $P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1$. (**)
Aus den Gleichungen (*) und (**) ergibt sich $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, also $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

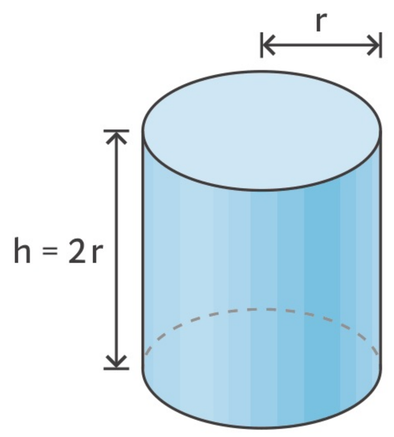
Zur Erinnerung:
Gegenereignis $\overline{A}$ zu A:
$\overline{A} = \Omega \backslash A$

Die Definition von Kolmogorow enthält keine Aussage, wie gut ein reales Zufallsexperiment durch eine Menge Ω und eine Funktion P beschrieben wird. Es wird nur gefordert, dass P bestimmte Eigenschaften besitzen muss.
Bei einem Münzwurf mit $\Omega = \{W; Z\}$ (W: Wappen; Z: Zahl) werden beispielsweise die beiden verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen P_1 bzw. P_2 wie folgt festgelegt:
$P_1(\{W\}) = 0{,}5$ und $P_1(\{Z\}) = 0{,}5$ bzw.
$P_2(\{W\}) = 0{,}3$ und $P_2(\{Z\}) = 0{,}7$.
Dann stehen sowohl P_1 als auch P_2 mit den Axiomen von Kolmogorow in Einklang.

Die relative Häufigkeit des Eintretens von {W} bzw. {Z} liefert Hinweise darauf, welche der beiden Funktionen P_1 oder P_2 die Realität besser beschreibt. Dazu wird die relative Häufigkeit von {W} bzw. {Z} nach einer großen Anzahl von Versuchsdurchführungen bestimmt und mit der Wahrscheinlichkeit verglichen, die P_1 bzw. P_2 vorgibt. Stimmen die relativen Häufigkeiten annähernd mit den Werten einer der Wahrscheinlichkeitsverteilungen überein, so wird man diese als eine gute Modellierung der Realität verwenden.

Am Wurf eines Zylinders wird ein möglicher Modellierungskreislauf dargestellt.





Leitkegel, auch Pylon genannt

Beispiel 1

a) Beurteilen Sie die Aussage „Man kann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Leitkegel auf die Seite fällt, durch genügend häufiges Werfen des Leitkegels auf 0,01 genau bestimmen."

b) Elias stuft vor Schulbeginn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er heute wenig Hausaufgaben bekommen und am Nachmittag Zeit für Freunde haben wird, hoch ein. Beschreiben Sie, wie sich seine Einschätzung im Laufe des Vormittags mehrfach ändern könnte.

Lösung

a) Die Aussage ist nicht wahr. Da es sich um ein Zufallsexperiment handelt, kann man sich bei keiner endlichen Anzahl von Würfen sicher sein, dass sich die relative Häufigkeit ab dieser Anzahl um weniger als 0,01 von einem bestimmten Wert unterscheidet.

b) Individuelle Lösung: z. B.:
Elias bekommt in den ersten beiden Stunden unerwartet viel Hausaufgaben. Er stuft daher seine Wahrscheinlichkeit dafür, am Nachmittag Zeit für Freunde zu haben, herab. Dies ändert sich nach den beiden folgenden Sportstunden nicht. Schließlich hat er noch Mathematik und bekommt dort unerwartet wenig Hausaufgaben. Er wird seinen momentanen Wert für die Wahrscheinlichkeit dafür, Zeit für Freunde zu haben, wieder nach oben korrigieren.

Beispiel 2

Eine Ergebnismenge Ω lautet $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \omega_4; \omega_5\}$. Folgende Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten werden festgelegt: $A = \{\omega_1; \omega_3\}$ mit $P(A) = 0{,}6$, $B = \{\omega_2; \omega_5\}$ mit $P(B) = 0{,}4$ und $C = \{\omega_4\}$ mit $P(C) = 0{,}1$.

a) Begründen Sie, dass P keine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten von ω_2 und ω_5 so, dass P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, wobei $P(\omega_2)$ fünfmal so groß sein soll wie $P(\omega_5)$.

Lösung:

a) Da $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{\ \}$ ist, muss gelten: $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 1{,}1 > 1$ im Widerspruch zu $P(\Omega) = 1$.

b) Es ist $P(B) = 1 - P(A) - P(C) = 0{,}3$, also $P(\omega_2) + P(\omega_5) = 0{,}3$ und $P(\omega_2) : P(\omega_5) = 5 : 1$.
Somit gilt $P(\omega_2) = \frac{5}{6} \cdot 0{,}3 = 0{,}25$ und $P(\omega_5) = \frac{1}{6} \cdot 0{,}3 = 0{,}05$.

Aufgaben

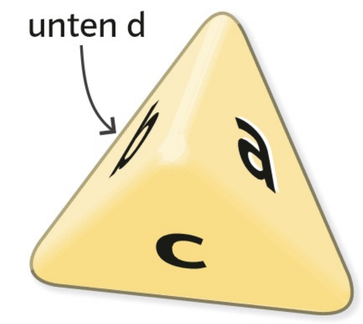
1 Beschreiben Sie Situationen, in denen der frequentistische bzw. der subjektive Wahrscheinlichkeitsbegriff Anwendung findet.

2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim Wurf dreier Münzen genau zweimal Zahl erscheint, und geben Sie den dabei verwendeten Wahrscheinlichkeitsbegriff an.

3 Ein gezinktes Tetraeder wird geworfen. Relative Häufigkeiten legen nahe, das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten, auf die Seiten a, b, c bzw. d zu fallen, wie folgt festzulegen: 2 : 3 : 4 : 3.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass das Tetraeder auf die Seite a, b, c bzw. d fällt.

b) Folgende Ereignisse werden festgelegt: $A = \{a; b\}$, $B = \{b; c\}$ und $C = \{c; d\}$.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B und C sowie die von $A \cap B$, $A \cup C$ und $A \cup B$.



4 Geben Sie an, welcher Wahrscheinlichkeitsbegriff verwendet wird, und erläutern Sie Ihre Angabe.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) meine Lieblingsmannschaft am Wochenende gewinnt, beträgt 70 %,

b) ein Zug im Fernverkehr Verspätung hat, beträgt 25 %,

c) beim Roulette die Kugel auf „Rot" fällt, beträgt $\frac{18}{37}$,

d) der Träger eines bestimmten Genotyps eine bestimmte Krankheit bekommt, beträgt 60 %.

Test 1

Lösungen | Seite 280

5 Geben Sie an, welcher Wahrscheinlichkeitsbegriff verwendet wird, und erläutern Sie Ihre Angabe. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) ein Paket verspätet zugestellt wird, beträgt 40 %,

b) beim dreifachen Münzwurf das Ergebnis WZW eintritt (W: Wappen; Z: Zahl), beträgt $\frac{1}{8}$,

c) mein für meine Mutter ausgesuchtes Weihnachtsgeschenk ihr gefällt, beträgt 75 %,

d) ein Getriebe bei einer Laufleistung von unter 200 000 km ausfällt, ist kleiner als 1 %.

6 Ein Zufallsexperiment hat drei Ergebnisse: ω_1, ω_2 und ω_3. Die Wahrscheinlichkeit von ω_1 beträgt 0,2, die von ω_3 beträgt 0,45. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit von ω_2. Geben Sie zudem die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Ereignisse dieses Zufallsexperiments an.

7 Begründen Sie, dass Laplace-Wahrscheinlichkeiten mit den Axiomen von Kolmogorow im Einklang sind.

8 Sechs paarweise unterschiedlich große Freunde stellen sich für ein Foto in zufälliger Reihenfolge nebeneinander auf. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Freunde der Größe nach geordnet nebeneinanderstehen, wobei der Größte ganz links steht. Geben Sie an, welcher Wahrscheinlichkeitsbegriff hier zugrunde liegt.

9 **a)** Begründen Sie mithilfe der Axiome von Kolmogorow: $P(\{\ \}) = 0$.

b) Begründen Sie für die Ereignisse A und B folgende Aussage mithilfe der Axiome von Kolmogorow: Wenn $A \cap B = \{\ \}$ ist, dann gilt $P(\overline{A}) \geq P(B)$.

10 Erläutern Sie sich gegenseitig die axiomatische Definition von Wahrscheinlichkeit.

11 Die Ereignisse A, B, C und D bilden eine Zerlegung der Ergebnismenge Ω. Weiter gilt $P(A) = 2 \cdot P(B)$, $P(B) = 2 \cdot P(C)$ und $P(D) = P(A)$.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten von A, B, C und D.

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten von $A \cup C$ und $A \cap C$ an.

12 Begründen Sie die Aussage mithilfe der Axiome von Kolmogorow: Wenn A und B Ereignisse sind mit $A \subset B$, dann gilt $P(A) \leq P(B)$.

Test 2

Lösungen | Seite 281

13 Für die Ereignisse A, B und C gilt:
$A \cap B = B \cap C = A \cap C = \{\ \}$ sowie $P(A \cup B) = 0{,}4$, $P(B \cup C) = 0{,}9$ und $P(A \cup C) = 0{,}7$.
Berechnen Sie P(A), P(B) und P(C).

14 Begründen Sie die Aussage: Für zwei Ereignisse E_1 und E_2 gilt $P(E_1) + P(E_2) \geq P(E_1 \cup E_2)$.

15 Beschreiben Sie, was eine 30-prozentige Niederschlagswahrscheinlichkeit bedeutet. Führen Sie dafür geeignete Recherchen durch und erläutern Sie, welcher Wahrscheinlichkeitsbegriff hier zugrunde liegt.

Grundwissen Test

Lösungen | Seite 281

G 16 Fassen Sie den Term zu einem Bruch zusammen und vereinfachen Sie diesen anschließend.

a) $\frac{8x - 1}{3x + 2} + \frac{5 - 2x}{3x + 2}$ **b)** $\frac{1 - 2x^2}{x^2 + 1} + 3$ **c)** $x + \frac{6x}{0{,}5x - 3}$ **d)** $2x - 1 - \frac{x - 2}{x + 2}$

Wiederholen

1 In einem Spielcasino steht eine Urne, die fünf schwarze und fünf weiße Kugeln enthält. Man zieht drei Kugeln und erhält einen Gewinn, wenn mindestens zwei schwarze Kugeln dabei sind. Untersuchen Sie, ob es günstiger ist, mit oder ohne Zurücklegen zu ziehen.

2 Bei einem Rennen mit acht Pferden werden zwei Wetten angeboten.
(1) Man wettet auf den Einlauf der ersten drei Pferde in der richtigen Reihenfolge.
(2) Man wettet auf den Einlauf der ersten drei Pferde, wobei die Reihenfolge egal ist.
a) Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten bei den beiden Wetten.
b) Berechnen Sie jeweils die Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn man annimmt, dass alle Pferde gleiche Siegchancen haben.

3 Untersuchen Sie, ob es sich um eine Bernoulli-Kette handelt. Geben Sie gegebenenfalls die Länge n und die Trefferwahrscheinlichkeit p an.
a) Eine ideale Münze wird zehnmal geworfen und es wird jedes Mal notiert, ob Zahl erscheint.
b) Eine „Münze“ aus Knetmasse wird zehnmal geworfen und es wird jedes Mal notiert, ob Zahl erscheint.
c) Ein Würfel wird siebenmal geworfen und es wird jedes Mal die Augenzahl notiert.
d) Ein Würfel wird siebenmal geworfen und es wird jedes Mal notiert, ob eine Drei erscheint.

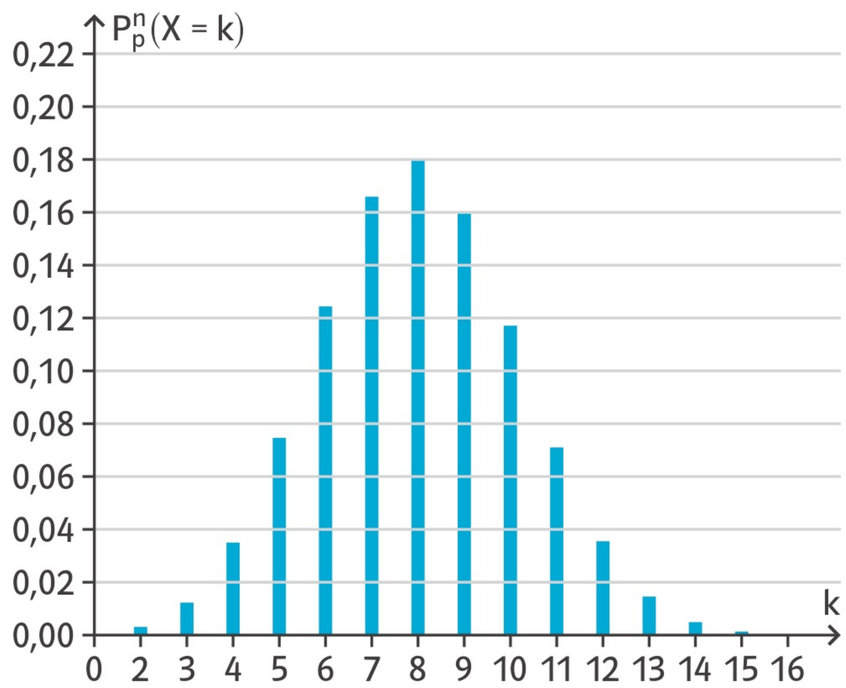
4 Beim Roulette erscheint jede der Zahlen 0, 1, 2, …, 36 mit gleicher Wahrscheinlichkeit.
a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
(1) bei zehn Spielen mehr als einmal die 13 auftritt,
(2) bei 20 Spielen mindestens dreimal eine Zahl größer als 30 auftritt,
(3) bei 20 Spielen höchstens sechsmal eine ungerade Zahl auftritt.
b) Im Spielcasino von Monte Carlo fiel am 18. August 1913 die Kugel beim Roulette 26-mal hintereinander auf „Schwarz“. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach 26-mal „Schwarz“ die Kugel im folgenden Spiel auf „Rot“ fällt.

5 Das Säulendiagramm gehört zu einer $B(n; p)$-verteilten Zufallsgröße. Geben Sie an, zu welcher der angegebenen Verteilungen das Diagramm passt. Begründen Sie Ihre Entscheidung und überprüfen Sie diese mit einer Mathematiksoftware.

(1) $B\left(12; \frac{2}{3}\right)$

(2) $B\left(20; \frac{2}{5}\right)$

(3) $B\left(40; \frac{1}{5}\right)$



6 **Abiturprüfung 2016 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 2**
Nach einer aktuellen Erhebung leiden 25 % der Einwohner Deutschlands an einer Allergie. Aus den Einwohnern Deutschlands werden n Personen zufällig ausgewählt.
a) Bestimmen Sie, wie groß n mindestens sein muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens eine der ausgewählten Personen an einer Allergie leidet.
b) Im Folgenden ist $n = 200$. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Personen unter den ausgewählten Personen, die an einer Allergie leiden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert der binomialverteilten Zufallsgröße X höchstens um eine Standardabweichung von ihrem Erwartungswert abweicht.

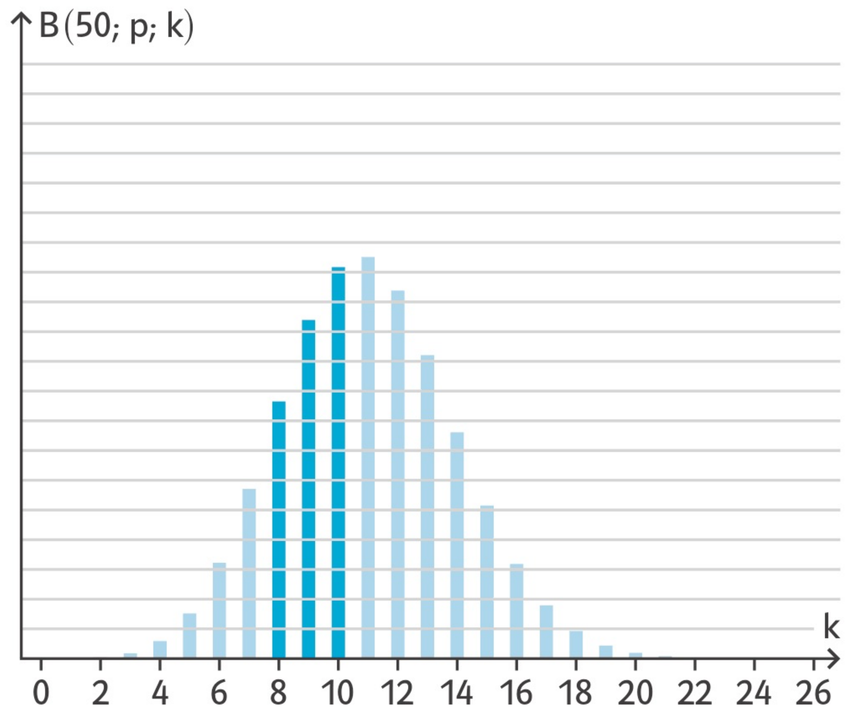
7 Das Säulendiagramm gehört zu einer B(50; p)-verteilten Zufallsgröße mit ganzzahligem Erwartungswert.

a) Bestimmen Sie die Trefferwahrscheinlichkeit p.

b) Beschreiben Sie das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch die dunkelblau markierten Säulen dargestellt wird.

c) Beschreiben Sie, wie sich das Säulendiagramm verändert, wenn p vergrößert wird.

d) Erläutern Sie, wie sich die Wahrscheinlichkeit aus Teilaufgabe b) ändert, wenn p vergrößert wird.



8 Eine Zufallsgröße X ist B(30; 0,5)-verteilt.

a) Bestimmen Sie jeweils alle Werte von X, die in den Intervallen $[\mu - \sigma;\ \mu + \sigma]$, $[\mu - 2\sigma;\ \mu + 2\sigma]$ bzw. $[\mu - 3\sigma;\ \mu + 3\sigma]$ liegen.

b) Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X Werte aus den in Teilaufgabe a) berechneten Intervallen annimmt.

Vertiefen

9 Noah hat sechs Freikarten für eine Vorstellung im Planetarium. Er verlost fünf Karten unter seinen Freunden (fünf Mädchen und sieben Jungen). Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er

a) nur Mädchen,

b) nur Jungen,

c) drei Jungen und zwei Mädchen,

d) seine Freunde Lars und Kai lost.

Geben Sie auch jeweils ein geeignetes Urnenexperiment an.

10 **Abiturprüfung 2016 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2**

An einem P-Seminar nehmen acht Mädchen und sechs Jungen teil, darunter Anna und Tobias. Für eine Präsentation wird per Los aus den Teilnehmerinnen und Teilnehmern ein Team aus vier Personen zusammengestellt.

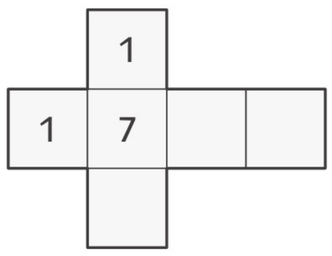
a) Geben Sie zu jedem der folgenden Ereignisse einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses berechnet werden kann.
A: „Anna und Tobias gehören dem Team an."
B: „Das Team besteht aus gleich vielen Mädchen und Jungen."

b) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den folgenden Term berechnet werden kann:

$$\frac{\binom{14}{4} - \binom{6}{4}}{\binom{14}{4}}$$

11 **Abiturprüfung 2022 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2**

Die Abbildung zeigt das Netz eines Würfels, von dem nur drei Seiten beschriftet sind.



a) Der Würfel wird so lange geworfen, bis die Zahl 1 zum ersten Mal erzielt wird. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau viermal gewürfelt wird.

b) Die drei leeren Seiten des Würfels sollen jeweils mit einer positiven geraden Zahl beschriftet werden. Ermitteln Sie eine Möglichkeit für die Beschriftung dieser drei Seiten, sodass bei einmaligem Werfen des Würfels der Erwartungswert für die erzielte Zahl $\frac{31}{6}$ beträgt.

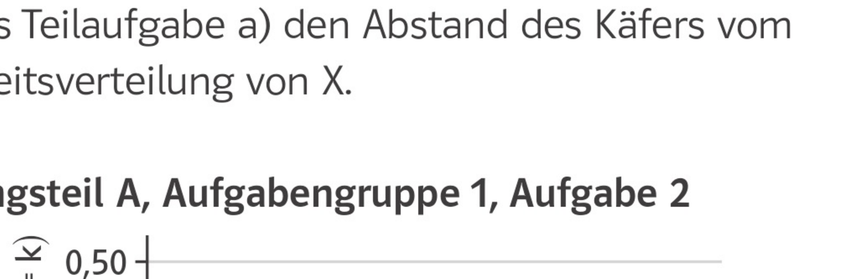
12 Die Tabelle zeigt die Verteilung einer Zufallsgröße X. Weiter ist der Erwartungswert von X bekannt: $\mu = 2{,}5$.

a) Bestimmen Sie zwei mögliche Verteilungen der Zufallsgröße X, indem Sie jeweils für a, b und c konkrete Werte angeben.

b) Ermitteln Sie, welche Ihrer gewählten Verteilungen die kleinere Varianz hat.

x_i	$P(X = x_i)$
0	a
1	0,1
2	b
3	0,3
4	c
5	0,2

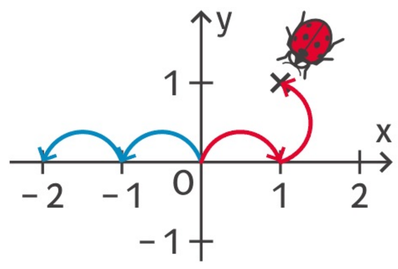
13 Von fünf Feldern mit den Zahlen 1 bis 5 werden zwei zufällig angekreuzt. Alle Möglichkeiten seien gleich wahrscheinlich.



a) Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten.

b) Die Zufallsgröße Z ordnet jedem Ergebnis die Summe der Zahlen der angekreuzten Felder zu. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Z.

14 Ein Käfer beginnt zur Zeit 0 im Ursprung eines Koordinatensystems eine Wanderung, bei der er jede Minute seine Position um eine Einheit nach rechts, links, oben oder unten jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 0,25 ändert. Die Wanderung des Käfers dauert zwei Minuten; die Figur zeigt zwei mögliche Wege.

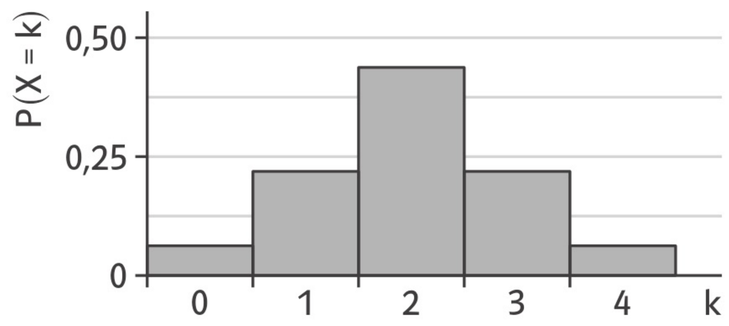


a) Geben Sie die Koordinaten aller Punkte an, in denen sich der Käfer nach der zweiten Minute befinden kann.

b) Die Zufallsgröße X ordnet jedem der Punkte aus Teilaufgabe a) den Abstand des Käfers vom Ursprung zu. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

15 **Abiturprüfung 2017 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 2**

In der Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X mit der Wertemenge $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ und dem Erwartungswert 2 dargestellt. Weisen Sie nach, dass es sich dabei nicht um eine Binomialverteilung handeln kann.



16 Aus einer Urne mit acht schwarzen und zwei roten Kugeln wird ohne Zurücklegen gezogen.

a) Bestimmen Sie die Mindestanzahl an Zügen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens eine rote Kugel zu ziehen.

b) Die Wahrscheinlichkeit, bei sechs Zügen mindestens einmal eine rote Kugel zu ziehen, soll mehr als 90 % betragen. Ermitteln Sie,

(1) wie viele rote Kugeln man mindestens zusätzlich in die Urne legen muss,

(2) wie viele schwarze Kugeln man mindestens aus der Urne nehmen muss.

17 **Abiturprüfung 2019 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 1**

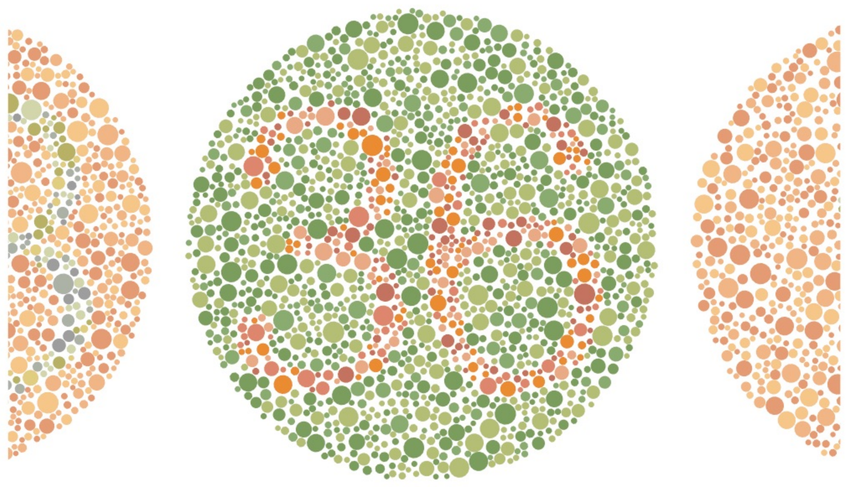
Jeder sechste Besucher eines Volksfests trägt ein Lebkuchenherz um den Hals. Während der Dauer des Volksfests wird 25-mal ein Besucher zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der ausgewählten Besucher, die ein Lebkuchenherz tragen.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ausgewählten Besuchern höchstens ein Besucher ein Lebkuchenherz trägt.

b) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\sum_{i=5}^{8} B\left(25; \frac{1}{6}; i\right)$ berechnet werden kann.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert der Zufallsgröße X höchstens um eine Standardabweichung vom Erwartungswert der Zufallsgröße abweicht.

18 Rund 8 % der Männer, aber nur rund 0,4 % der Frauen in Deutschland haben eine angeborene Farbenfehlsichtigkeit, d.h., bei diesen Personen ist die Farbwahrnehmung gestört.



Der englische Physiker und Chemiker John Dalton (1766 – 1844) untersuchte 1798 als Erster die Farbenfehlsichtigkeit. Er und zwei seiner Brüder waren rotgrünblind. Für Personen mit Rotgrün-Störung ist auf der abgebildeten Farbtafel die 36 nicht erkennbar

a) Bei einem Sehtest wird von acht zufällig ausgewählten Frauen die Farbwahrnehmung untersucht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nur bei der letzten Frau diese Wahrnehmung gestört ist.

b) Eine Augenärztin untersucht nacheinander die Farbwahrnehmung von zehn zufällig ausgewählten Männern. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass erst bei der sechsten Untersuchung zum ersten Mal eine Farbenfehlsichtigkeit festgestellt wird.

19 **Abiturprüfung 2020 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 3**

Beim Torwandschießen treten zwei Schützen gegeneinander an. Zunächst gibt der eine sechs Schüsse ab, anschließend der andere. Wer dabei mehr Treffer erzielt, hat gewonnen; andernfalls geht das Torwandschießen unentschieden aus.

Joe trifft beim Torwandschießen bei jedem Schuss mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 %, Hans mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 %.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Joe beim Torwandschießen gegen Hans gewinnt, wenn Hans bei seinen sechs Schüssen genau zwei Treffer erzielt hat. Erläutern Sie anhand einer konkreten Spielsituation, dass das dieser Aufgabe zugrunde gelegte mathematische Modell im Allgemeinen nicht der Realität entspricht.

b) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term $\sum_{k=0}^{6} (B(6; 0{,}2; k) \cdot B(6; 0{,}3; k))$ angegeben wird.

c) Lisa erreichte im Training in 90 % aller Fälle bei sechs Schüssen mindestens einen Treffer. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ihr erster Schuss im Wettbewerb ein Treffer ist, wenn man davon ausgeht, dass sich ihre Trefferquote im Vergleich zum Training nicht ändert. Legen Sie Ihrer Berechnung als Modell eine geeignete Bernoullikette zugrunde.

Vernetzen

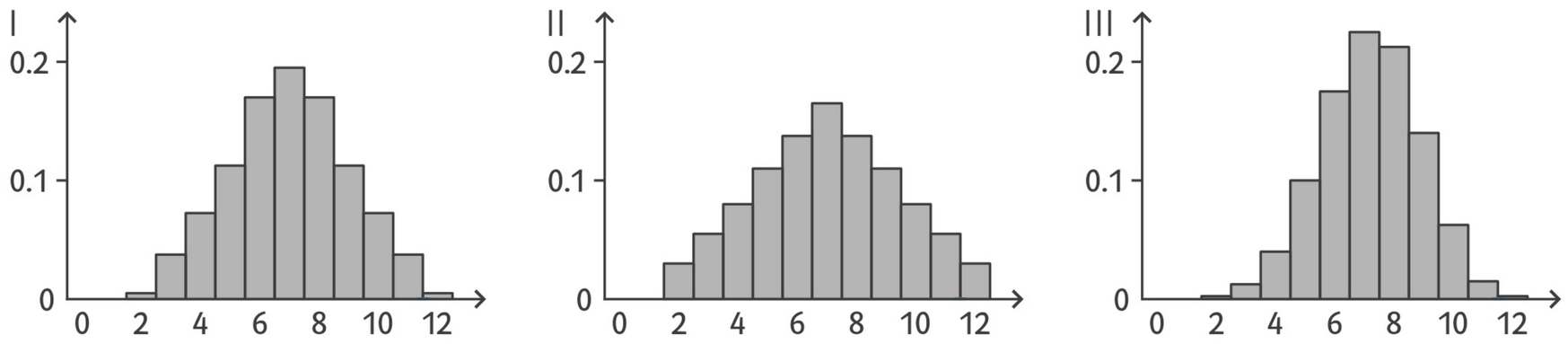
20 **Abiturprüfung 2022 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1**

Gegeben sind die im Folgenden beschriebenen Zufallsgrößen X und Y:

- Ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind, wird zweimal geworfen. X gibt die dabei erzielte Augensumme an.
- Aus einem Behälter mit 60 schwarzen und 40 weißen Kugeln wird zwölfmal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Y gibt die Anzahl der entnommenen schwarzen Kugeln an.

a) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $P(X = 4)$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(X = 10)$ übereinstimmt.

b) Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X und Y werden jeweils durch eines der folgenden Diagramme I, II und III dargestellt. Ordnen Sie X und Y jeweils dem passenden Diagramm zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.



21 **Abiturprüfung 2017 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 2**

Das elektronische Stabilitätsprogramm (ESP) eines Autos kann Schleuderbewegungen und damit Unfälle verhindern.

In einem Parkhaus befinden sich insgesamt 100 Parkplätze.

a) Im Parkhaus sind 20 Parkplätze frei; vier Autofahrer suchen jeweils einen Parkplatz. Formulieren Sie in diesem Sachzusammenhang zu den folgenden Termen jeweils eine Aufgabenstellung, deren Lösung sich durch den Term berechnen lässt.

α) $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$ β) $\binom{20}{4}$

Das Parkhaus ist nun mit 100 Autos besetzt, von denen 40 mit ESP ausgerüstet sind.

b) Sieben von diesen 100 Autos sind Kleinwagen und nicht mit ESP ausgerüstet, 90 sind keine Kleinwagen. Betrachtet werden folgende Ereignisse.

E: „Ein im Parkhaus zufällig ausgewähltes Auto ist mit ESP ausgerüstet."

K: „Bei einem im Parkhaus zufällig ausgewählten Auto handelt es sich um einen Kleinwagen."

Geben Sie die Bedeutung von $P_K(E)$ im Sachzusammenhang an und ermitteln Sie diese Wahrscheinlichkeit.

c) 30 der im Parkhaus stehenden Autos werden zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass darunter genau 40 % mit ESP ausgerüstet sind.

22 Davina hat 12 Heidelbeer-, 10 Zitronen- und 8 Himbeermuffins gebacken. Sie wählt für ihre Nachbarin sechs Muffins zufällig aus. Ordnen Sie gemeinsam jedem Ereignis die richtige Wahrscheinlichkeit zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

A: „Die Nachbarin erhält 4 Heidelbeer-, 1 Himbeer- und 1 Zitronenmuffin."

B: „Die Nachbarin erhält von jeder Sorte 2 Muffins."

C: „Die Nachbarin erhält keine Himbeermuffins."

(1) $\dfrac{\binom{12}{3} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{1}}{\binom{30}{6}}$

(2) $\dfrac{\binom{12}{2} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2}}{\binom{30}{6}}$

(3) $\dfrac{\binom{22}{6}}{\binom{30}{6}}$

(4) $\dfrac{\binom{12}{4} \cdot 10 \cdot 8}{\binom{30}{6}}$

23 **Abiturprüfung 2022 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1**

Um die Wirksamkeit eines Pflanzenschutzmittels gegen Pilzbefall nachzuweisen, wurden zahlreiche Versuche durchgeführt, bei denen landwirtschaftliche Nutzpflanzen zunächst mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt und anschließend mit Pilzsporen besprüht wurden. Im Mittel sind dabei 5 % der Pflanzen von Pilzen befallen worden.

Bei einem weiteren solchen Versuch mit n Pflanzen beschreibt die Zufallsgröße X_n die Anzahl der Pflanzen, die von Pilzen befallen werden. Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass X_n binomialverteilt ist mit den Parametern n und $p = 0{,}05$.

a) Es werden 15 Pflanzen mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt und anschließend mit Pilzsporen besprüht. Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

E_1: „Keine der Pflanzen wird von Pilzen befallen."

E_2: „Höchstens zwei Pflanzen werden von Pilzen befallen."

E_3: „12 oder 13 Pflanzen bleiben ohne Pilzbefall."

b) Bestimmen Sie den kleinsten Wert von n, für den die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Pflanze von Pilzen befallen wird, mindestens 99 % beträgt.

c) Ermitteln Sie unter der Voraussetzung, dass bei einem Versuch mit 400 Pflanzen der Wert der Zufallsgröße X_{400} um höchstens eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht, die kleinst- und die größtmögliche relative Häufigkeit der Pflanzen, die von Pilzen befallen werden.

d) Allgemein gilt für eine Zufallsgröße X mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ folgende Ungleichung für $k > 0$:

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Erläutern Sie die Aussage dieser Ungleichung für $k = 2$.

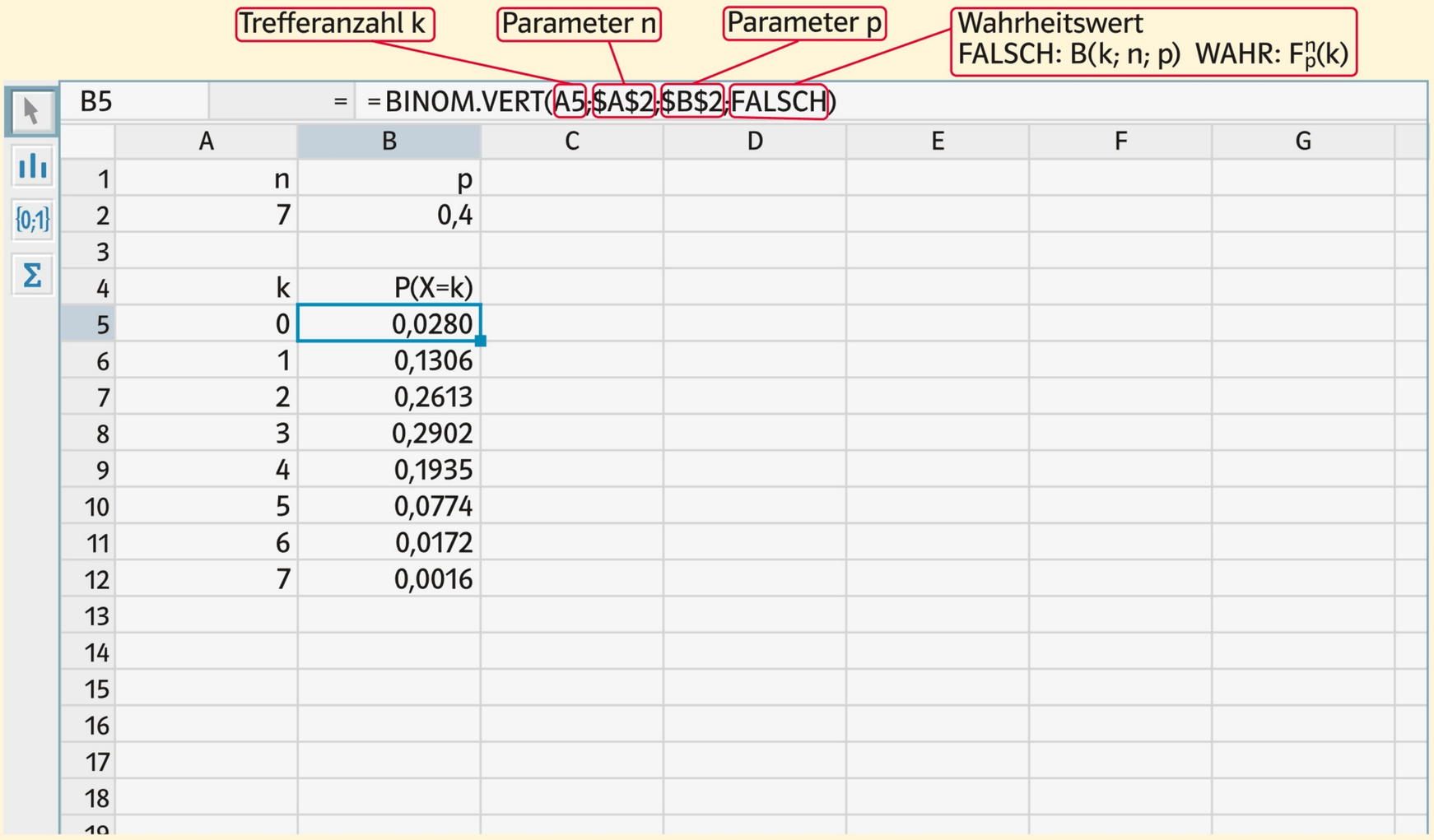
Binomialverteilung und Mathematiksoftware

Es gibt DGS, die neben einem Tabellenkalkulationsprogramm und einem Funktionenplotter auch einen Wahrscheinlichkeitsrechner enthalten. Mit einer solchen Software kann man Werte einer Binomialverteilung auf unterschiedliche Arten berechnen und diese darstellen.

Tabellenkalkulationsprogramm

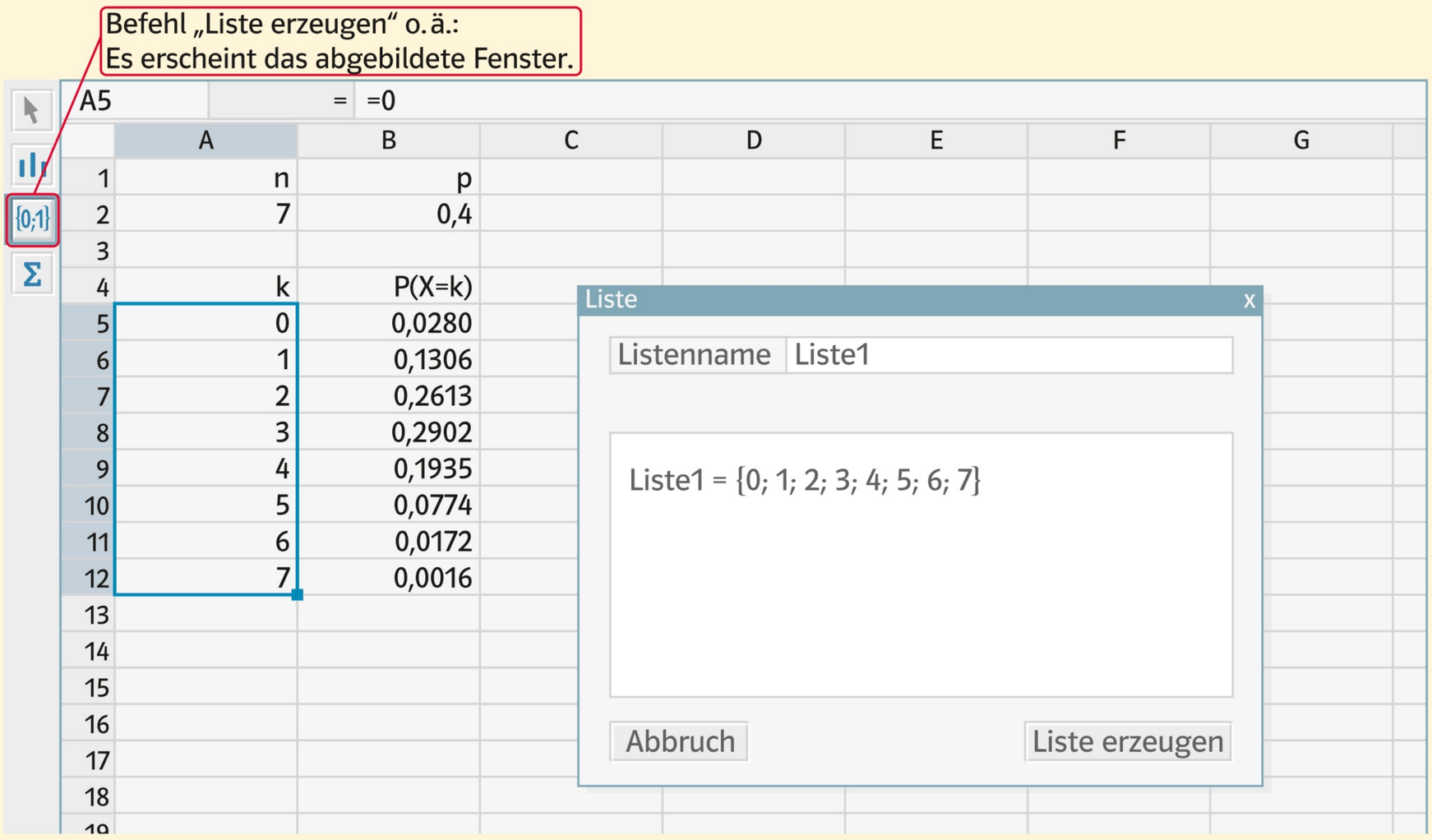
1. Schritt: Erzeugen der Trefferanzahlen und der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten

Es wird das Tabellenmenü aufgerufen. Die Werte für n, p und k werden eingetragen bzw. erzeugt. Die zu den Trefferanzahlen gehörenden Werte der Binomialverteilung werden erzeugt.



2. Schritt: Erzeugen von Listen mit Trefferanzahlen und Wahrscheinlichkeiten

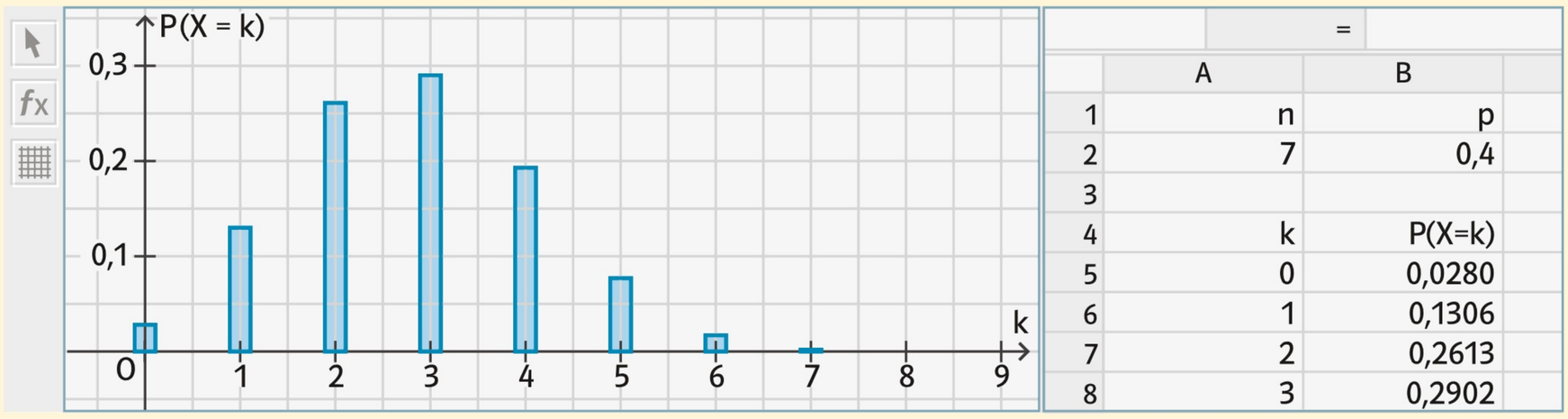
Die Werte, die zu einer Liste zusammengefasst werden sollen, werden markiert und anschließend mithilfe eines Befehls wie „Liste erzeugen“ zu einer Liste zusammengefasst.



Analog zur Liste der Trefferanzahlen wird eine Liste der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten erzeugt.

3. Schritt: Erzeugen eines Säulendiagramms

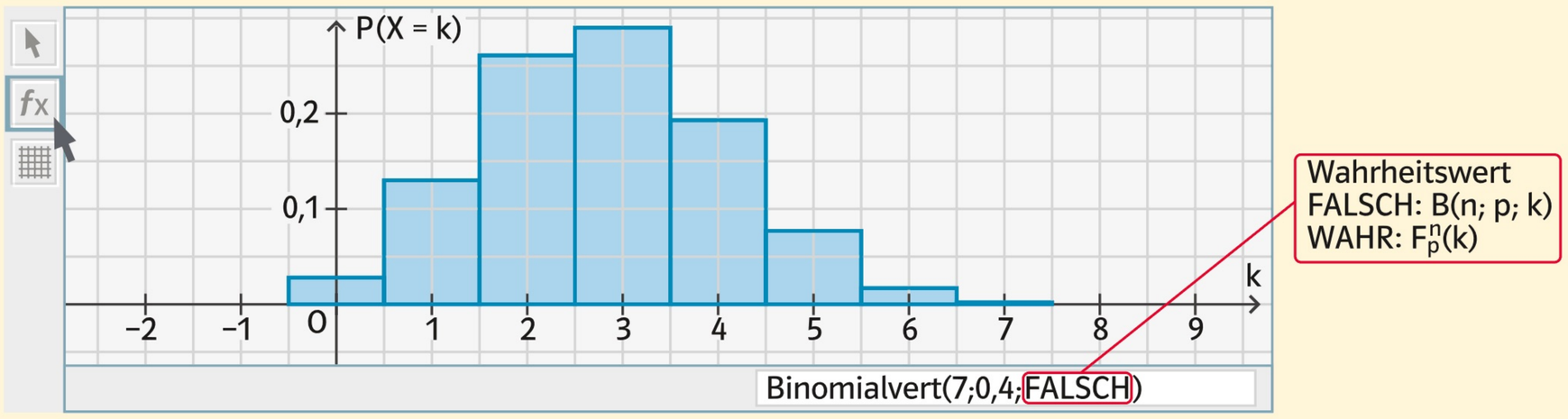
Man wählt „Säulendiagramm“ o. ä. aus und gibt die Listen an, die dargestellt werden sollen.



	A	B
1	n	p
2	7	0,4
3		
4	k	P(X=k)
5	0	0,0280
6	1	0,1306
7	2	0,2613
8	3	0,2902

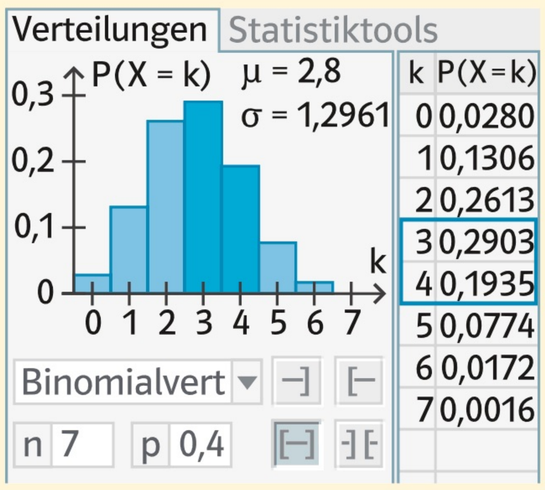
Funktionenplotter

Mit dem Funktionenplotter lassen sich Histogramme oder kumulative Verteilungsfunktionen ohne Verwendung von Tabellen und Listen erzeugen. Dies erfolgt z. B. mit einem Befehl wie `Binomialvert(<Versuchsanzahl>,<Trefferwahrscheinlichkeit>, <Wahrheitswert_Verteilungsfunktion>)`, in den konkrete Werte eingetragen werden.



Wahrscheinlichkeitsrechner

Mit dem Wahrscheinlichkeitsrechner lassen sich alle Werte einer Binomialverteilung sowie das zugehörige Histogramm bzw. Säulendiagramm unmittelbar erzeugen.



Es wird der „Wahrscheinlichkeitsrechner“ aufgerufen und „Binomialvert“ o. ä. ausgewählt. Anschließend werden die Werte für die Parameter n und p eingeben. Neben der Tabelle werden der Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ ausgegeben. Wenn man Intervallgrenzen vorgibt, kann man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Trefferanzahl in ein bestimmtes Intervall fällt, bestimmen.
Statt eines Histogramms kann man auch ein Säulendiagramm erzeugen.

1 **a)** Erzeugen Sie mit einem Tabellenkalkulationsprogramm Säulendiagramme von Zufallsgrößen, die verteilt sind nach
(1) $B(20; 0{,}3)$, (2) $B(20; 0{,}5)$, (3) $B(20; 0{,}7)$.
b) Ermitteln Sie die Zufallsgröße aus Teilaufgabe a) mit der größten Varianz.

2 Gegeben sind Zufallsgrößen, die verteilt sind nach
(1) $B(20; 0{,}3)$, (2) $B(50; 0{,}3)$, (3) $B(100; 0{,}3)$.
a) Erzeugen Sie von jeder Zufallsgröße ein Histogramm.
b) Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsgröße einen Wert aus dem Intervall $[3; 17]$ annimmt.

Rückblick

Zufallsgröße

Eine Funktion X, die jedem Ergebnis $\omega \in \Omega$ eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl $X(\omega)$ zuordnet, heißt **Zufallsgröße** oder **Zufallsvariable** auf Ω.

Kurz: $X: \omega \mapsto X(\omega)$ mit $\omega \in \Omega$ und $X(\omega) \in \mathbb{R}$.

Das Glücksrad wird zweimal gedreht.

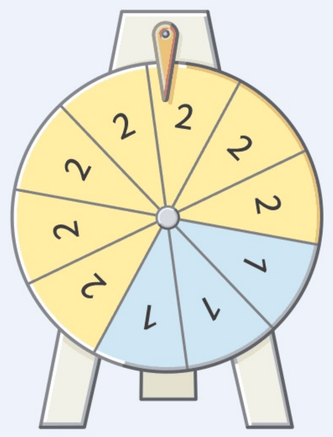
$\Omega = \{(1; 1);\ (1; 2);\ (2; 1);\ (2; 2)\}$

X: „Summe der Zahlen."

$X((1; 1)) = 2$,

$X((1; 2)) = X((2; 1)) = 3$,

$X((2; 2)) = 4$



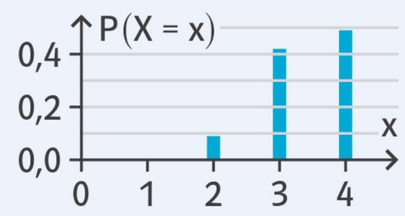
Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße

Die Funktion W, die jedem Wert x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ einer Zufallsgröße X die Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ zuordnet, heißt **Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße X** oder **Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X** oder knapp Verteilung von X. Kurz: $W: x_i \mapsto P(X = x_i)$.

$P(X = 2) = 0{,}3^2 = 0{,}09$

$P(X = 3) = 2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}42$

$P(X = 4) = 0{,}7^2 = 0{,}49$



Kumulative Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße

Die Funktion F, die bei gegebener Zufallsgröße X jeder reellen Zahl x die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq x)$ zuordnet, heißt **kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X**.

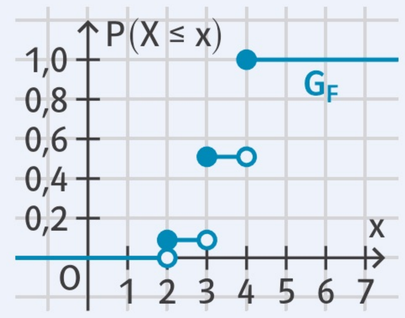
Kurz: $F: x \mapsto P(X \leq x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $P(X \leq x) \in [0; 1]$.

$P(X < 2) = 0$

$P(X \leq 2) = 0{,}09$

$P(X \leq 3) = 0{,}51$

$P(X \leq 4) = 1$



Kenngrößen einer Zufallsgröße

Sei X eine Zufallsgröße, deren mögliche Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind.

Erwartungswert μ von X: $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$.

Der Erwartungswert ist der mittlere Wert der Zufallsgröße pro Versuch auf lange Sicht.

$\mu = 2 \cdot 0{,}09 + 3 \cdot 0{,}42 + 4 \cdot 0{,}49 = 3{,}4$

Varianz σ^2 von X: $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$.

Standardabweichung σ von X: $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

$\sigma^2 = (2 - 3{,}4)^2 \cdot 0{,}09 + (3 - 3{,}4)^2 \cdot 0{,}42 + (4 - 3{,}4)^2 \cdot 0{,}49 = 0{,}42$

$\sigma = \sqrt{0{,}42} \approx 0{,}65$

Binomialkoeffizient

Für $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$ heißt $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$ **Binomialkoeffizient**.

$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot (5 - 2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$

Bernoulli-Experiment und Bernoulli-Kette

Ein Zufallsexperiment mit genau zwei Ergebnissen heißt **Bernoulli-Experiment**. Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer wird mit p, die für eine Niete mit q bezeichnet, wobei $q = 1 - p$ ist. Ein Zufallsexperiment, das aus $n \geq 1$ unabhängigen Durchführungen desselben Bernoulli-Experiments besteht, heißt **Bernoulli-Kette** der Länge n mit dem Parameter p. Gibt die Zufallsgröße X die Anzahl der Treffer in einer Bernoulli-Kette an, so beträgt die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer

$P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n - k}$ mit $k \in \{0; 1; \ldots; n\}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Bernoulli-Experiment:

Einmaliges Drehen des obigen Glücksrades.

Treffer: 1; $p = 0{,}3$. Niete: 2; $q = 0{,}7$.

Das fünfmalige Drehen des Glücksrades ist eine Bernoulli-Kette der Länge 5 mit $p = 0{,}3$.

X: „Anzahl der Treffer bei fünf Drehungen."

Trefferwahrscheinlichkeit: $p = 0{,}3$.

Beispiel: $P_{0{,}3}^5(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^3 = 0{,}3087$.

Binomialverteilung

Eine Zufallsgröße X heißt **binomialverteilt** nach $B(n; p)$, wenn gilt:

- X kann die Werte 0, 1, 2, …, n mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ annehmen,
- $P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n - k}$ mit $0 \leq p \leq 1$.

Die Trefferanzahl bei fünf Drehungen ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 5$ und $p = 0{,}3$.

Kenngrößen der Binomialverteilung

Erwartungswert: $\mu = E(X) = np$.

Varianz: $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = npq$ mit $q = 1 - p$.

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{npq}$.

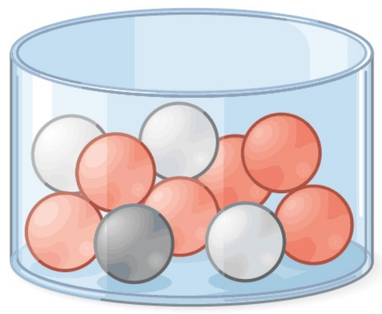
$\mu = 5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5$

$\sigma^2 = 5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 1{,}05$

$\sigma = \sqrt{1{,}05} \approx 1{,}02$

→ Lösungen | Seite 281

1 Ein Spieler zieht aus der Urne zwei Kugeln ohne Zurücklegen. Er erhält für zwei weiße Kugeln 1 €, für zwei rote Kugeln 0,25 € und für eine weiße und eine rote Kugel 0,20 €. Ist die schwarze Kugel dabei, so muss er 1 € bezahlen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsgröße „Gewinn des Spielers".



2 Ella behauptet: „Beim 6-fachen Wurf einer Münze tritt das Ergebnis ZZZZZZ mit kleinerer Wahrscheinlichkeit ein als das Ergebnis ZWWZWZ." Beurteilen Sie Ellas Behauptung (W: Wappen; Z: Zahl).

3 Eine Gruppe bestehend aus zwei Erwachsenen und sechs Jugendlichen unternimmt eine Radtour. Die Wahrscheinlichkeit für einen technischen Defekt pro Rad beträgt 5 %. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es

(1) bei genau zwei Rädern zu einem Defekt kommt,

(2) bei mindestens zwei Rädern zu einem Defekt kommt,

(3) nur bei den Rädern der Erwachsenen zu einem Defekt kommt.

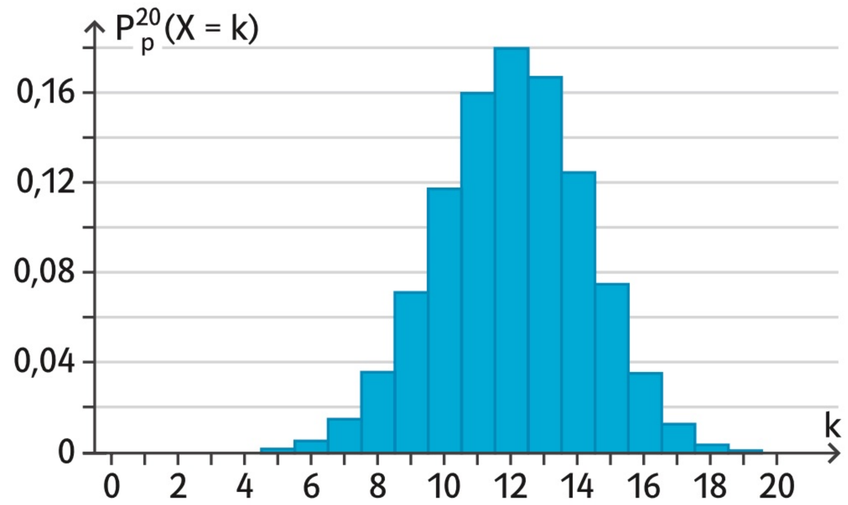
4 Das Histogramm gehört zu einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit $n = 20$ und ganzzahligem Erwartungswert.

a) Bestimmen Sie den Wert des Parameters p.

b) Entscheiden Sie, ob die Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Entscheidung anhand des Histogramms.

(1) $P_p^{20}(9 \le X \le 11) < P_p^{20}(13 \le X \le 15)$

(2) $P_p^{20}(X \neq 11) > 0{,}9$



5 In einer Spielothek werden faire Würfel und gezinkte Würfel verwendet. Bei den gezinkten Würfeln tritt die Eins mit der Wahrscheinlichkeit 20 % und die Sechs mit der Wahrscheinlichkeit 15 % auf. Die anderen Augenzahlen erscheinen jeweils mit gleich großer Wahrscheinlichkeit.

a) Ein Besucher würfelt 10-mal mit einem gezinkten Würfel. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(1) nur der erste Wurf und der letzte Wurf eine Eins zeigen,

(2) genau zweimal eine Eins geworfen wird,

(3) mindestens zweimal eine Eins geworfen wird.

b) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\sum_{i=5}^{8} B(30; 0{,}15; i)$ berechnet werden kann.

c) Insgesamt hat der Besucher 200-mal mit einem gezinkten Würfel geworfen. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der dabei geworfenen Einsen an. Begründen Sie, dass $P_{0,2}^{200}(|X - \mu| \le \sigma) \le 70\,\%$ gilt, wobei $\mu = E(X)$ und $\sigma = \sqrt{Var(X)}$ ist.

d) Bestimmen Sie, wie oft man mit einem der gezinkten Würfel mindestens würfeln muss, um mit mindestens 99 % Wahrscheinlichkeit mindestens eine Eins zu erhalten.

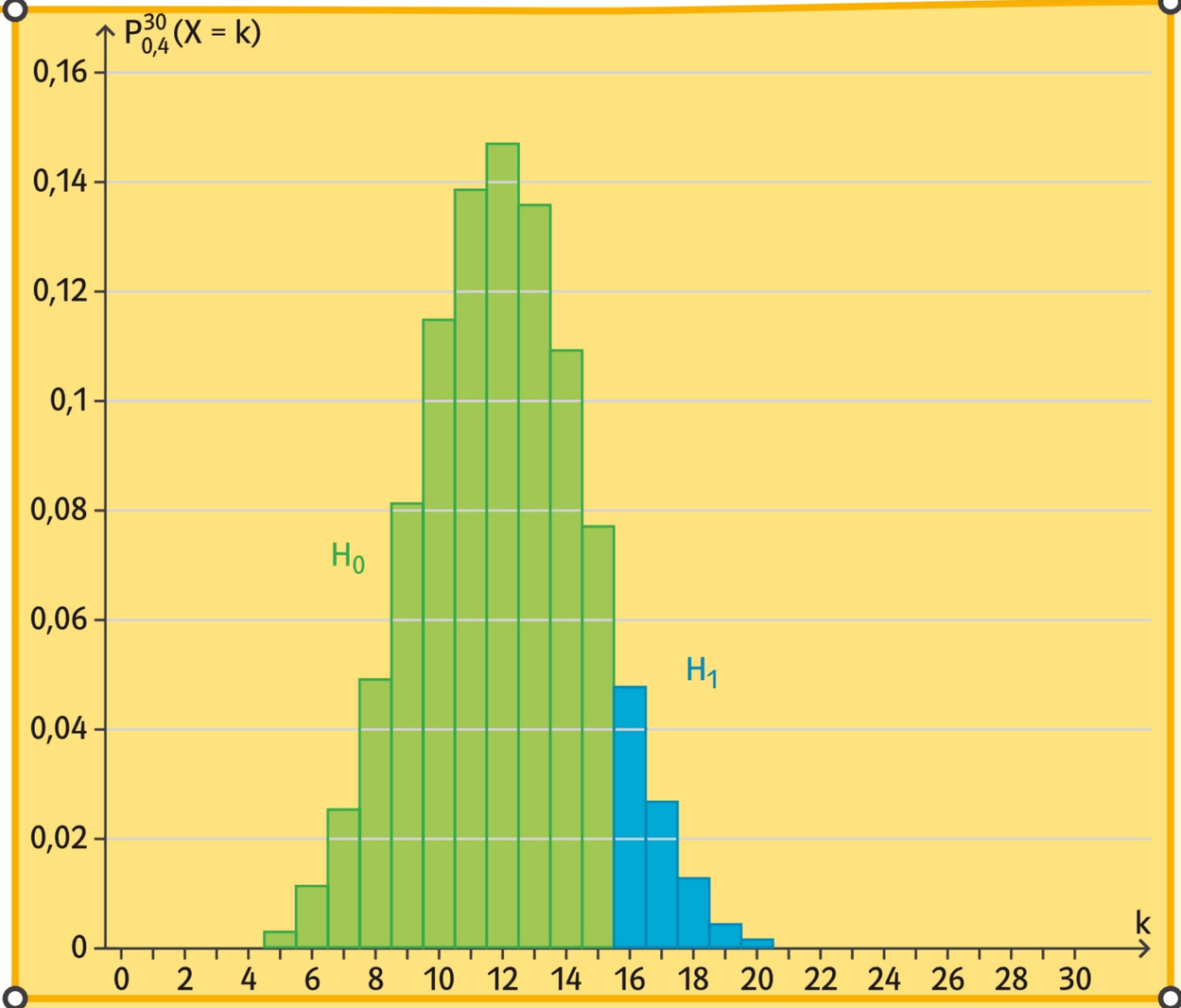
e) Die Polizei führt eine Razzia durch und möchte testen, ob die Würfel manipuliert sind. Es soll überprüft werden, ob die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs kleiner als $\frac{1}{6}$ ist. Ein Polizist würfelt dazu mit einem Würfel 200-mal. Er bezeichnet ihn als manipuliert, wenn die Anzahl der Sechsen kleiner als 30 ist. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er

(1) fälschlicherweise einen fairen Würfel als manipuliert bezeichnet,

(2) einen gezinkten Würfel nicht beanstandet.

f) In der Spielothek steht auch eine Urne, die fünf schwarze und fünf weiße Kugeln enthält. Man zieht drei Kugeln und erhält einen Gewinn, wenn mindestens zwei schwarze Kugeln dabei sind. Beurteilen Sie, ob es günstiger ist, mit oder ohne Zurücklegen zu ziehen.

IV Beurteilende Statistik



„Mathematik ist die einzige perfekte Methode, sich selber an der Nase herumzuführen."

Albert Einstein (1879 – 1955), deutsch-Schweizer-US-amerikanischer theoretischer Physiker

Das können Sie schon

- Sachzusammenhänge mit Bernoulli-Ketten modellieren
- Die Binomialverteilung bzw. deren kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilung bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten verwenden
- Eine Binomialverteilung durch Säulendiagramme und Histogramme veranschaulichen
- Den Erwartungswert und die Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsgröße berechnen

Test

Check-in zu Kapitel IV Seite 265

Das können Sie bald

- Das grundsätzliche Vorgehen bei einem einseitigen Signifikanztest beschreiben
- Für einseitige Signifikanztests die Wahrscheinlichkeiten für die Fehler erster und zweiter Art berechnen
- Den Ablehnungsbereich eines einseitigen Signifikanztests bestimmen
- Die Ergebnisse einseitiger Signifikanztests interpretieren und Fehlinterpretationen widerlegen

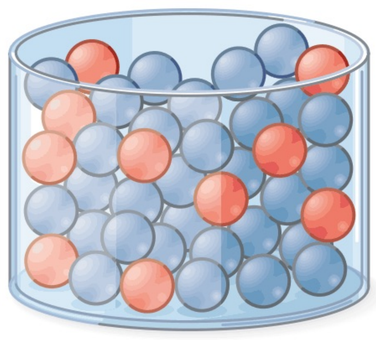
1 Einseitiger Hypothesentest

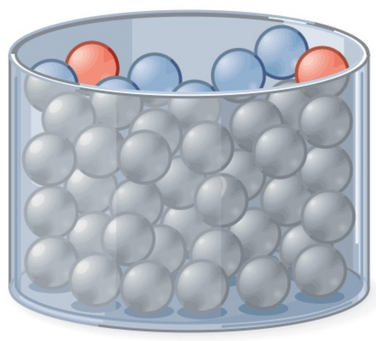
In einem Supermarkt gibt es Sticker mit den Spielern der Fußball-Bundesliga zum Sammeln. In der Werbung wird gesagt, dass jeder fünfte Sticker ein Glitzermotiv habe.
Isabelle zählt bei ihren 100 Stickern nach: nur 12 haben ein Glitzermotiv.
Kann sie daraus schließen, dass die Aussage in der Werbung falsch ist?

Während es im vorherigen Kapitel um Wahrscheinlichkeitsrechnung ging, befasst sich dieses Kapitel mit Statistik, genauer mit **beurteilender Statistik**. Der wesentliche Unterschied zwischen diesen beiden Teilgebieten der Stochastik wird im Folgenden am Beispiel eines Urnenexperiments erläutert.

In einer für die Wahrscheinlichkeitsrechnung typischen Problemstellung ist eine Urne gegeben, deren Inhalt bekannt ist, z. B. der Anteil p roter Kugeln. Nun wird aus der Urne eine bestimmte Anzahl n von Kugeln gezogen und gefragt, mit welcher Wahrscheinlichkeit unter den n gezogenen Kugeln r rot sind.

Im Unterschied dazu ist bei Problemstellungen in der beurteilenden Statistik der Urneninhalt unbekannt. Kann man diesen Urneninhalt, der in der Statistik auch als **Grundgesamtheit** bezeichnet wird, nicht exakt bestimmen, weil er beispielsweise zu umfangreich ist, so zieht man eine **Stichprobe** und macht aufgrund des Ergebnisses eine Aussage über den Inhalt der Urne, z. B. über den unbekannten Anteil p der roten Kugeln.





hypóthesis (gr.):
Annahme, Vermutung

Testen von Hypothesen über unbekannte Wahrscheinlichkeiten
Zunächst wird eine **Hypothese** über eine unbekannte Wahrscheinlichkeit aufgestellt (z. B. $p > 0{,}6$). Um die Gültigkeit oder Ungültigkeit der aufgestellten Hypothese beurteilen zu können, macht man einen **Test**, d. h., man führt ein Zufallsexperiment durch und überprüft anschließend, ob das Ergebnis des Zufallsexperiments mit der Hypothese verträglich ist oder nicht. Anhand der folgenden Situation wird dies exemplarisch erläutert.

Johanna und Moritz essen gern einen Brotaufstrich der Marke A. Da diese jedoch teurer als andere ist, will Moritz auf eine andere Marke umsteigen. Johanna will das auf keinen Fall, denn sie behauptet, Marke A schmecke ihr am besten. Moritz hat den Verdacht, dass sich Johanna nur von dem Markennamen leiten lässt. Sie vereinbaren zu testen, ob Moritz seinen Verdacht fallen lassen sollte.

In der Werbung wird oft behauptet, dieses oder jenes Markenprodukt sei unverwechselbar.
Das kann man testen.

An den nächsten 10 Tagen bekommt Johanna jeweils eine Probe eines Brotaufstrichs, von der sie nicht weiß, ob es sich um Marke A handelt oder nicht. Sie soll angeben, ob die getestete Marke ihre Lieblingsmarke A ist oder nicht.

Moritz stellt die Hypothese auf, Johanna rät, d. h., ihre Trefferwahrscheinlichkeit beträgt 50 %.

Johanna ist davon überzeugt, dass ihre Trefferquote größer als 50 % ist.

Es liegt eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 10$ mit der unbekannten Trefferwahrscheinlichkeit p vor, wobei eine richtig erkannte Probe als Treffer bezeichnet wird. Die Zufallsgröße „Anzahl der Treffer bei diesen 10 Versuchen“ heißt **Testgröße** Z.

Die sogenannte **Nullhypothese** H_0 lautet hier $p = p_0 = 0{,}5$. Gilt H_0, so ist Z binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}5$.

Die sogenannte **Gegenhypothese** H_1 lautet hier $p > p_0 = 0{,}5$.

Bei bloßem Raten ist im Mittel $Z = 5$ zu erwarten.

Johanna und Moritz vereinbaren, nur dann die Hypothese „Johanna rät, d.h., sie trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % die richtige Entscheidung“ zu verwerfen und somit Johanna zuzugestehen, dass sie Marke A herausschmecken kann, wenn sie 9 oder 10 Proben richtig erkennt.

Erkennt Johanna höchstens 8 Proben richtig, so veranlasst dieses Stichprobenergebnis die beiden dazu, Moritz' Vermutung „Johanna rät nur“ nicht abzulehnen.

Es wird folgende **Entscheidungsregel** vereinbart:
Wenn $Z \geq 9$ ist, dann wird die Nullhypothese H_0 abgelehnt. Kurz: $K = \{9; 10\}$ ist der **kritische Bereich** oder **Ablehnungsbereich** der Nullhypothese.

Liegt der Wert von Z nicht im Ablehnungsbereich, wird die Nullhypothese nicht abgelehnt. In diesem Fall liegt der Wert von Z im **nichtkritischen Bereich** $\overline{K} = \{0; 1; \ldots; 7; 8\}$.

Einen auf diese Weise durchgeführten Test nennt man **Hypothesentest**. Ein Hypothesentest liefert jedoch nie einen zweifelsfreien Beweis für die Gültigkeit oder Ungültigkeit der Null- bzw. der Gegenhypothese, da das Ergebnis der Stichprobe vom Zufall abhängt. Daran ändert auch nichts, wie die Entscheidungsregel gewählt wird.

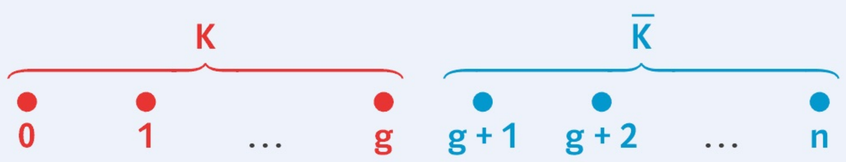
Testen von Hypothesen
Zu einem Sachverhalt werden zwei sich ausschließende Hypothesen betrachtet:
die **Nullhypothese** H_0 und die **Gegenhypothese** H_1.
Die Anzahl der Treffer einer **Stichprobe** mit festgelegter Länge bildet die **Testgröße**.
Der Wertebereich der Testgröße wird in den **kritischen Bereich** K (**Ablehnungsbereich**) und den **nichtkritischen Bereich** $\overline{K}$ zerlegt.
Liegt der durch die Stichprobe gewonnene Wert der Testgröße in K, dann wird H_0 verworfen, ansonsten wird H_0 nicht verworfen (**Entscheidungsregel**).

Bemerkung:
Es ist möglich, dass die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie in Wirklichkeit wahr ist. Im betrachteten Beispiel beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Johanna 9 oder 10 Proben richtig erkennt, obwohl sie rät: $P^{10}_{0,5}(Z = 9) + P^{10}_{0,5}(Z = 10) = 0{,}010\,74\ldots \approx 1\,\%$.

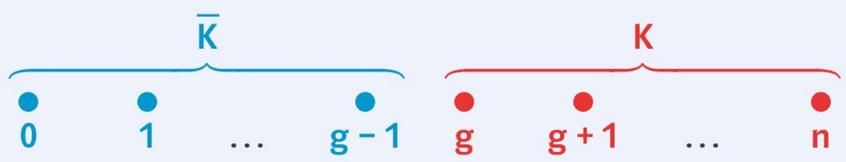
Im Beispiel von Johanna und Moritz liegt der kritische Bereich K rechts, weil sehr viele Treffer, also sehr viele richtige Entscheidungen von Johanna, gegen die Nullhypothese sprechen. Man spricht in einem solchen Fall von einem **rechtsseitigen Hypothesentest**.
Dagegen ist es in anderen Situationen auch möglich, dass der kritische Bereich links liegt. Möchte man beispielsweise testen, ob ein Würfel gezinkt ist und deswegen zu wenige Sechsen liefert, wird man die Nullhypothese $H_0: p_0 = \frac{1}{6}$ nur dann verwerfen, wenn in einer Stichprobe sehr wenige Sechsen fallen. In einem solchen Fall spricht man von einem **linksseitigen Hypothesentest**.

Definition: Einen Hypothesentest mit einem kritischen Bereich K, der aus einem einzigen Intervall besteht, bezeichnet man als **einseitigen Hypothesentest**.

Linksseitiger Hypothesentest:
$H_0: p = p_0$ (oder $p \geq p_0$)
$H_1: p < p_0$



Rechtsseitiger Hypothesentest:
$H_0: p = p_0$ (oder $p \leq p_0$)
$H_1: p > p_0$



Beispiel

In einem Betrieb, der LED-Leuchten herstellt, ist bekannt, dass etwa ein Fünftel der gefertigten Leuchten eine Lebensdauer von weniger als 40 000 Stunden aufweist. Der Ingenieur des Betriebs behauptet, dass er durch Verbesserungen innerhalb des Produktionsprozesses diesen Anteil verringert hat. Die Betriebsleitung stellt eine Prämie in Aussicht und sieht die Qualitätssteigerung als erwiesen an, wenn in einer Stichprobe von 50 LED-Leuchten höchstens fünf eine Lebensdauer von weniger als 40 000 Stunden haben. Als Nullhypothese wird festgelegt, dass sich der Standard nicht verändert hat, d.h., dass weiterhin etwa ein Fünftel der Leuchten eine Lebensdauer von weniger als 40 000 Stunden aufweist.

Durch bestimmte Messverfahren lässt sich die Lebensdauer einer Leuchte bestimmen, ohne dass 40 000 Stunden (ca. 4,5 Jahre) abgewartet werden müssen.

a) Erläutern Sie, was für diesen Test die Testgröße, die Nullhypothese, die Gegenhypothese, der Ablehnungs- und der nichtkritische Bereich sind.

b) Geben Sie begründet an, ob es sich um einen linksseitigen oder um einen rechtsseitigen Hypothesentest handelt.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nullhypothese abgelehnt wird, obwohl sie wahr ist.

Lösung

a) Die Testgröße Z ist die Anzahl der Treffer, wobei Treffer bedeutet, dass die Lebensdauer der getesteten LED-Leuchte weniger als 40 000 Stunden beträgt.
Man vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit p dafür, eine LED-Leuchte mit einer Lebensdauer von weniger als 40 000 Stunden zu erhalten, weiterhin bei 20 % liegt. Somit gilt: Wenn p der Anteil der Leuchten mit einer geringeren Lebensdauer ist, gilt für die Nullhypothese $H_0: p = 0{,}2$. Die Vermutung, der Standard habe sich verbessert, ist dann die Gegenhypothese, also $H_1: p < 0{,}2$.
Der Ablehnungsbereich ist $K = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Wenn die Testgröße in diesem Bereich liegt, wird die Nullhypothese „der Standard hat sich nicht verbessert“ verworfen.
Der nichtkritische Bereich ist $\overline{K} = \{6; 7; \ldots; 50\}$. Wenn die Testgröße in diesem Bereich liegt, wird die Nullhypothese, dass sich der Standard nicht verbessert hat, nicht abgelehnt.

Für den nichtkritischen Bereich hat sich auch der Begriff Annahmebereich eingebürgert. Wir verwenden diesen Begriff aber nicht. Dies wird auf Seite 129 begründet.

b) Es handelt sich um einen linksseitigen Hypothesentest, da wenige Treffer zu einer Ablehnung der Nullhypothese führen, d.h., der kritische Bereich liegt im Wertebereich der Testgröße links.

c) Ist H_0 wahr, so ist die Testgröße Z binomialverteilt nach $B(50; 0{,}2)$. Dann gilt $P_{0,2}^{50}(Z \leq 5) = 0{,}048\,02\ldots \approx 4{,}8\,\%$.

Aufgaben

1 Die angegebene Nullhypothese wird getestet. Notieren Sie die Null- und die Gegenhypothese mathematisch (vgl. Randbemerkung). Geben Sie zudem an, ob es sich um einen linksseitigen oder einen rechtsseitigen Test handelt.

Mathematisch notieren heißt hier, eine Hypothese in Form einer Gleichung bzw. Ungleichung anzugeben.

a) „Mindestens 40 % der Lose gewinnen.“
b) „Höchstens 25 % der Lose gewinnen.“
c) „Nicht mehr als 35 % der Lose gewinnen.“
d) „Maximal 20 % der Lose gewinnen.“

2 Erklären Sie sich gegenseitig anhand von selbst gewählten Beispielen den Unterschied zwischen Wahrscheinlichkeitsrechnung und beurteilender Statistik.

3 Für die folgende Nullhypothese wird ein Test mit einer Strichprobe vom Umfang n durchgeführt und anhand des gegebenen Ablehnungsbereichs ausgewertet.
Geben Sie an, ob es sich um einen linksseitigen oder rechtsseitigen Test handelt, notieren Sie die Null- und die Gegenhypothese mathematisch und formulieren Sie die Entscheidungsregel in Worten.

a) „Mindestens 80 % der Personen sind dafür“; $n = 700$; $K = \{0; 1; \ldots; 544\}$.
b) „Höchstens 6 % der produzierten Teile sind fehlerhaft“; $n = 150$; $K = \{14; 15; \ldots; 150\}$.
c) „Nicht mehr als 30 % der Lose sind Nieten“; $n = 43$; $K = \{18; 19; \ldots; 43\}$.
d) „Nicht weniger als zwei Drittel der Käufer sind zufrieden“; $n = 350$; $K = \{0; 1; \ldots; 219\}$.

4 Eine Firma stellt Kugelschreiber für Werbezwecke her. Die Firmenchefin behauptet, dass mindestens 96 % der verkauften Kugelschreiber einwandfrei seien (Nullhypothese). Diese Behauptung soll anhand einer Stichprobe von 250 Kugelschreibern überprüft werden. Sollten weniger als 5 % der Kugelschreiber fehlerhaft sein, glaubt man der Firmenchefin.

a) Geben Sie die Testgröße an und notieren Sie die Null- und die Gegenhypothese mathematisch.

b) Geben Sie den Ablehnungsbereich und den nichtkritischen Bereich an.

c) Handelt es sich bei dem gegebenen Test um einen linksseitigen oder um einen rechtsseitigen Test? Begründen Sie Ihre Aussage.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man der Firmenchefin nicht glaubt, obwohl ihre Behauptung wahr ist.

Test 1

→ Lösungen | Seite 282

5 Normalerweise keimt eine bestimmte Sorte Saatgut zu 75 %. Ein Saatguthersteller behauptet, dass eine neue Züchtung dieses Saatguts deutlich besser keime. Ein Landwirt möchte diese Aussage überprüfen und testet das neue Saatgut mit einer Stichprobe von 100 Samenkörnern. Wenn mindestens 80 % der ausgesäten Körner keimen, glaubt er der Aussage des Herstellers.

a) Geben Sie für diesen Test die Testgröße, die Nullhypothese, die Gegenhypothese, den Ablehnungsbereich und den nichtkritischen Bereich an.

b) Geben Sie an, ob es sich um einen linksseitigen oder um einen rechtsseitigen Test handelt, und begründen Sie Ihre Angabe.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nullhypothese abgelehnt wird, obwohl sie wahr ist.

6 Denken Sie sich zu zweit oder zu dritt eine Anwendungssituation für einen Hypothesentest mit Nullhypothese $H_0: p = p_0$ aus. Geben Sie dazu die Testgröße an und formulieren Sie die Nullsowie die Gegenhypothese in eigenen Worten. Geben Sie zudem an, ob es sich bei Ihrem Test um einen linksseitigen oder rechtsseitigen Test handelt, legen Sie einen Stichprobenumfang fest und stellen Sie eine mögliche Entscheidungsregel auf.

7 Ein Apfelsaft-Hersteller möchte seine Marke „Abisaft“ in einer großen Werbeaktion bekannter machen. Verbraucherinnen und Verbrauchern wird überregional auf vielen verschiedenen Veranstaltungen die Möglichkeit geboten, an einer Blindverkostung teilzunehmen. Dabei werden neben der Marke Abisaft zwei weitere Apfelsaft-Marken von anderen Herstellern angeboten. Die Testperson muss dann entscheiden, welche der drei Marken ihr am besten geschmeckt hat. Der Hersteller von Abisaft behauptet, dass seine Marke besser schmecke als die der Konkurrenz. Diese Behauptung soll überprüft werden. Als Stichprobe werden dazu die Ergebnisse eines Tests in einem Kletterwald für Kinder ausgewertet, an dem 53 Testpersonen teilgenommen haben. Als Nullhypothese wird angenommen, dass alle Apfelsaft-Marken gleich gut schmecken. Man vereinbart, dass die Nullhypothese abgelehnt wird, wenn mehr als die Hälfte der Testpersonen Abisaft als Marke wählt, die am besten schmeckt.

a) Geben Sie die Testgröße an und erläutern Sie im Sachzusammenhang, welche Voraussetzung damit verbunden ist, dass die Testgröße als binomialverteilt angenommen wird. Diskutieren Sie miteinander, ob diese Annahme im Sachzusammenhang gerechtfertigt ist.

b) Formulieren Sie die Nullhypothese, die Gegenhypothese, den Ablehnungsbereich und den nichtkritischen Bereich mathematisch und geben Sie begründet an, ob es sich um einen linksseitigen oder um einen rechtsseitigen Test handelt.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nullhypothese abgelehnt wird, obwohl Abisaft tatsächlich keiner Mehrheit am besten schmeckt.

d) Beurteilen Sie, ob die gewählte Stichprobe repräsentativ ist.
Erläutern und diskutieren Sie, inwiefern das Testergebnis durch die Auswahl der Stichprobe beeinflusst werden kann.

8 Früher kannten 40 % der Bevölkerung das Waschmittel „Weißwunder“. Von 100 zufällig ausgewählten Personen gaben jetzt 37 an, dass sie Weißwunder kennen. Ist sein Bekanntheitsgrad gesunken? Entscheiden Sie, ob die Aussage stichhaltig ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) „Der Bekanntheitsgrad von Weißwunder ist sicher nicht gesunken, ich kenne es ja auch.“

b) „Der Bekanntheitsgrad von Weißwunder ist wohl gesunken, da nur 37 % der Befragten es kennen. Wäre er gleich geblieben, müssten es meiner Meinung nach 40 % sein.“

c) „Angenommen, der Bekanntheitsgrad von Weißwunder ist tatsächlich 40 %. Dann ist die Testgröße Z: „Anzahl unter den 100 Befragten, die Weißwunder kennen“ nach $B(100;\,0{,}4)$ verteilt. Also ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nur 37 von 100 Befragten Weißwunder kennen, $P_{0{,}4}^{100}(Z = 37) = B(100;\,0{,}4;\,37) = 0{,}068\,19\ldots \approx 6{,}8\,\%$. Diese geringe Wahrscheinlichkeit deutet klar darauf hin, dass Weißwunder heute nicht mehr so bekannt ist wie früher.“

d) „Das Stichprobenergebnis spricht nicht unbedingt für eine Verringerung des Bekanntheitsgrades von Weißwunder. Eine gewisse Schwankung der Stichprobenergebnisse um den Erwartungswert $\mu = 100 \cdot 0{,}4 = 40$ ist doch normal.“

Test 2

→ Lösungen | Seite 282

9 Ein Kaffeekenner behauptet, eine bestimmte Kaffeesorte unter allen anderen Kaffeesorten herausschmecken zu können. Er bietet an, seine Behauptung in einer Kaffeeprobe zu überprüfen, bei der er „seine“ Kaffeesorte in 13 direkten Vergleichen mit jeweils einer anderen Kaffeesorte in mindestens zehn Fällen herausfinden will. Der Kaffeekenner sagt, damit läge die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ihm die Fähigkeit zugesprochen wird, wenn er nur raten würde, unter 5 %.

a) Geben Sie die Testgröße, die Nullhypothese, die Gegenhypothese, den Ablehnungsbereich und den nichtkritischen Bereich an. Begründen Sie, dass Sie bei der Stichprobe voraussetzen müssen, dass es sich um eine Bernoulli-Kette handelt.

b) Erläutern Sie im Sachzusammenhang, ob es sich bei der beschriebenen Kaffeeprobe um einen linksseitigen oder um einen rechtsseitigen Test handelt.

c) Überprüfen Sie, ob der Kaffeekenner recht damit hat, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, ihm die Fähigkeit irrtümlich zuzuschreiben, unter 5 % liegt.

d) Ist die getroffene Annahme, dass die Testgröße binomialverteilt ist, gerechtfertigt? Geben Sie mindestens zwei Gründe an, die dagegensprechen, und erläutern Sie diese.

e) Der Kaffeekenner erkennt tatsächlich in allen 13 Vergleichen die richtige Kaffeesorte. Er sagt, damit sei seine Fähigkeit, die Kaffeesorte herausschmecken zu können, zweifelsfrei bewiesen. Beurteilen Sie seine Aussage.

10 Das Roulette eines Spielcasinos wurde angeblich so manipuliert, dass die Kugel überdurchschnittlich oft auf Rot fällt. Dieser Verdacht soll durch einen rechtsseitigen Hypothesentest überprüft werden. Dazu wird eine Stichprobe von 100 Spielrunden durchgeführt.

Beim Roulette sind 18 der 37 Felder rot.

a) Geben Sie die Testgröße, die Null- sowie die Gegenhypothese an und zeigen Sie mithilfe einer Tabellenkalkulation, dass mit $K = \{58;\,59;\,\ldots;\,100\}$ der größtmögliche Ablehnungsbereich vorliegt, für den die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese irrtümlich abzulehnen, unter 5 % liegt.

b) Führen Sie mithilfe der Tabellenkalkulation sowohl zum nicht manipulierten als auch zu einem manipulierten Fall $(p = 0{,}55)$ zehn Simulationen über jeweils 100 Spielrunden durch. Geben Sie zunächst an, wie oft Sie jeweils erwarten würden, dass die Nullhypothese abgelehnt wird, und notieren Sie anschließend, wie oft sie dann in der Simulation verworfen werden muss.

Für die Simulation können die Funktionen ZUFALLSZAHL oder ZUFALLSBEREICH verwendet werden.

Grundwissen Test

→ Lösungen | Seite 282

→ Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

G 11 Gegeben ist die gebrochen-rationale Funktion f mit maximaler Definitionsmenge D. Bestimmen Sie D, geben Sie, falls vorhanden, die Polstelle(n) von f an. Berechnen Sie die Nullstelle(n) von f.

a) $f: x \mapsto \frac{3x + 1}{3x - 6}$ **b)** $f: t \mapsto \frac{2}{t + 4} - 2$ **c)** $f: x \mapsto \frac{x^2 - 2x + 1}{0{,}5x + 1}$ **d)** $f: t \mapsto \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$

e) $f: x \mapsto 2x + 4 + \frac{4}{x - 1}$ **f)** $f: x \mapsto \frac{5x^2}{(x - 2)(x + 4)}$ **g)** $f: t \mapsto \frac{t^2}{t^2 - 4} + 1$ **h)** $f: x \mapsto \frac{4x^2 - 1}{3x^2 + x}$

2 Fehler erster und zweiter Art

Ein Pilzsammler findet einen Pilz, der giftig sein könnte.
Welche beiden Fehler kann der Pilzsammler bei seiner Einschätzung, ob der Pilz giftig ist oder nicht, begehen?
Gewichten Sie beide Fehler.

Champignon oder Knollenblätterpilz?

Beim Testen von Hypothesen wird aufgrund des Ergebnisses einer Stichprobe die Nullhypothese verworfen oder nicht verworfen. Da das Ziehen der Stichprobe ein Zufallsexperiment ist, können die Werte der Testgröße „Anzahl der Treffer in der Stichprobe“ auch ein falsches Bild vermitteln und Fehlentscheidungen zur Folge haben. Zum einen könnte die Nullhypothese verworfen werden, obwohl sie in Wirklichkeit wahr ist, zum anderen könnte sie nicht verworfen werden, obwohl sie in Wirklichkeit falsch ist. Dies wird anhand des folgenden Beispiels erläutert.

Eine Tierärztin behandelt Katzen, die an einer bestimmten Krankheit leiden, immer mit dem gleichen Medikament. Dadurch werden erfahrungsgemäß 70 % der behandelten Katzen wieder gesund. Ein Pharmareferent bietet ihr ein anderes Präparat an und behauptet, dass bei diesem die Heilungschancen höher lägen. Die Tierärztin testet das Präparat zunächst an zehn Katzen. Sie ist skeptisch und entscheidet sich aus Kostengründen, nur dann auf das neue Präparat umzusteigen, wenn mindestens neun der zehn behandelten Katzen durch das neue Medikament geheilt werden.

Betrachtet man die Wirkung des neuen Medikaments bei den zehn Katzen als Zufallsexperiment, so liegt eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 10$ mit der unbekannten Trefferwahrscheinlichkeit p vor, wobei eine erfolgreiche Behandlung als Treffer bezeichnet wird.
Die Testgröße Z ist die Anzahl der Treffer bei diesen zehn Versuchen.
Nullhypothese $H_0: p = 0{,}7$; Gegenhypothese $H_1: p > 0{,}7$.
Entscheidungsregel: Ablehnungsbereich (kritischer Bereich) der Nullhypothese: $K = \{9; 10\}$.
Nichtkritischer Bereich: $\overline{K} = \{0; 1; 2; \ldots; 8\}$.

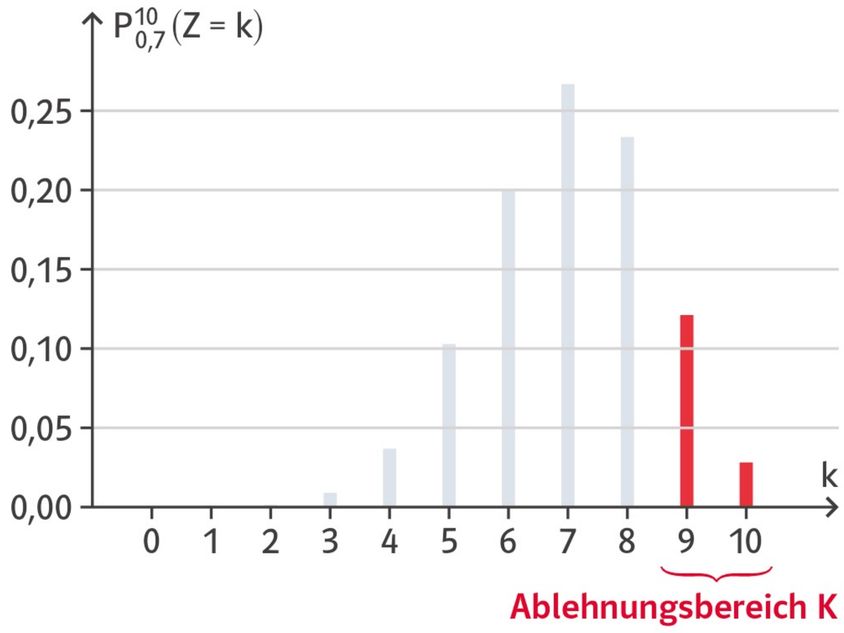
Fehler erster Art

Da es sich um ein Zufallsexperiment handelt, kann es sein, dass das neue Medikament nicht häufiger heilt als das bisherige, aber fälschlicherweise als besser eingestuft wird. Dies ist dann der Fall, wenn mindestens neun der behandelten Katzen geheilt wurden, obwohl die Wahrscheinlichkeit für eine Heilung weiter bei 0,7 liegt. Die Nullhypothese H_0 trifft also tatsächlich zu, wird aber abgelehnt, da $Z \in K$ ist. In diesem Fall spricht man vom **Fehler erster Art**.

Die Wahrscheinlichkeit α' für den Fehler erster Art ergibt sich auf folgende Weise:
Es wird angenommen, dass $p = 0{,}7$ ist. Also ist Z nach $B(10; 0{,}7)$ verteilt. Damit gilt:

$$\alpha' = P^{10}_{0{,}7}(Z \in K)$$
$$= P^{10}_{0{,}7}(Z = 9) + P^{10}_{0{,}7}(Z = 10)$$
$$= 0{,}12106\ldots + 0{,}02824\ldots \approx 15\,\%.$$

Die Nullhypothese „Das neue Mittel heilt auch nur in 70 % aller Fälle“ wird demnach mit einer Wahrscheinlichkeit von 15 % irrtümlich verworfen (in der Abbildung rot dargestellt).

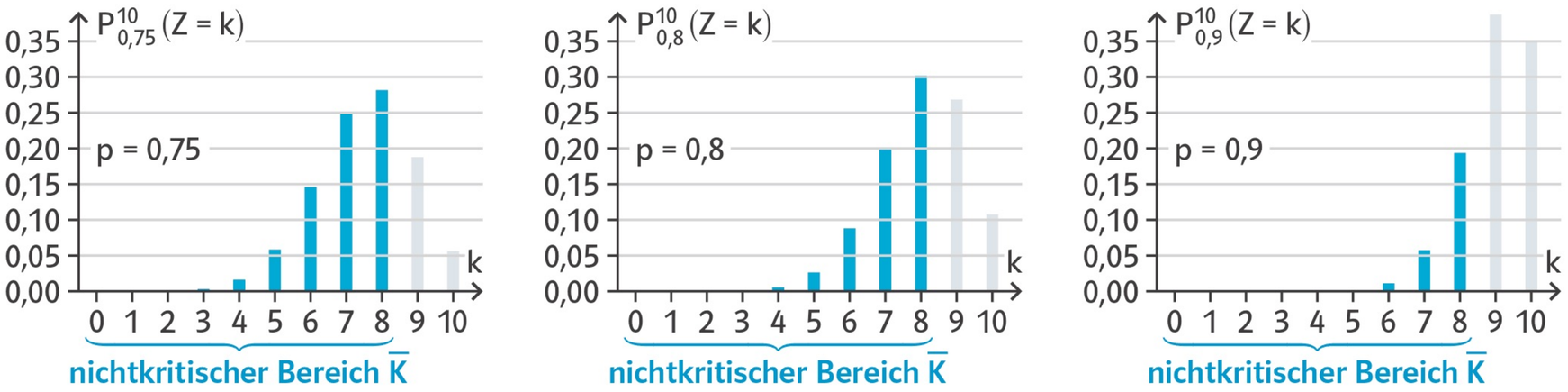


Die Wahrscheinlichkeit α' für den Fehler erster Art nennt man auch das **Risiko erster Art**.

Fehler zweiter Art

Es könnte aber auch sein, dass zufällig nur wenige der behandelten Katzen geheilt werden, obwohl das neue Medikament besser ist als das altbewährte Mittel. Das neue Medikament wird nicht eingesetzt, obwohl es besser ist. Die Gegenhypothese H_1 trifft also tatsächlich zu, aber die Nullhypothese kann nicht abgelehnt werden, da $Z \in \overline{K}$ ist. In diesem Fall spricht man vom **Fehler zweiter Art**.

Die Wahrscheinlichkeit β' für den Fehler zweiter Art kann nicht ohne weitere Annahmen bestimmt werden, denn dazu muss für die Testgröße Z eine Wahrscheinlichkeitsverteilung und somit ein konkreter Wert für p zugrunde gelegt werden. Jedoch kann p beim Vorliegen von H_1 jeden Wert größer als 0,7 annehmen. Da der tatsächliche Wert von p unbekannt ist und sich in der Regel nicht bestimmen lässt, nimmt man einen Wert für p an. Damit gilt:
$\beta' = P_p^{10}(Z \in \overline{K}) = P_p^{10}(Z \leq 8)$.
In den folgenden Säulendiagrammen wird für diesen Test jeweils die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art für verschiedene Werte von $p > 0{,}7$ veranschaulicht. Falls die Testgröße im Bereich $\overline{K} = \{0; 1; \ldots; 8\}$ liegt, tritt jeweils der Fehler zweiter Art auf (blau dargestellt).



Die Tabelle auf dem Rand zeigt für die oben gewählten Werte von p die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten β' für den Fehler zweiter Art. Wenn beispielsweise das neue Medikament in Wirklichkeit zu 80 % hilft, so wird die Nullhypothese mit einer Wahrscheinlichkeit von über 62 % nicht verworfen, obwohl sie falsch ist, wenn es in Wirklichkeit nur zu 75 % hilft, dann sogar mit einer Wahrscheinlichkeit von knapp 76 %. Je näher der Wert von p an $p_0 = 0{,}7$ liegt, desto größer wird die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art.
Aus diesem Grund darf man nicht schließen, dass die Nullhypothese tatsächlich gilt, nur weil sie nicht abgelehnt wird, denn die Wahrscheinlichkeit, sich hier zu irren, kann sehr groß sein.

Die Wahrscheinlichkeit β' für den Fehler zweiter Art nennt man auch das **Risiko zweiter Art**.

n = 10	
p	β'
0,75	0,756
0,8	0,624
0,9	0,264

Fehler beim Testen von Hypothesen:

		Wirklichkeit	
		H_0 ist wahr.	H_0 ist falsch.
Entscheidung	H_0 wird abgelehnt.	Fehler erster Art	Richtige Entscheidung
	H_0 wird nicht abgelehnt.	Richtige Entscheidung	Fehler zweiter Art

Die **Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art** wird mit α' bezeichnet.

Die **Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art** wird mit β' bezeichnet. Man kann β' nur berechnen, wenn für die Testgröße eine bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung und damit ein bestimmter Wert für p angenommen wird.

Bemerkung:

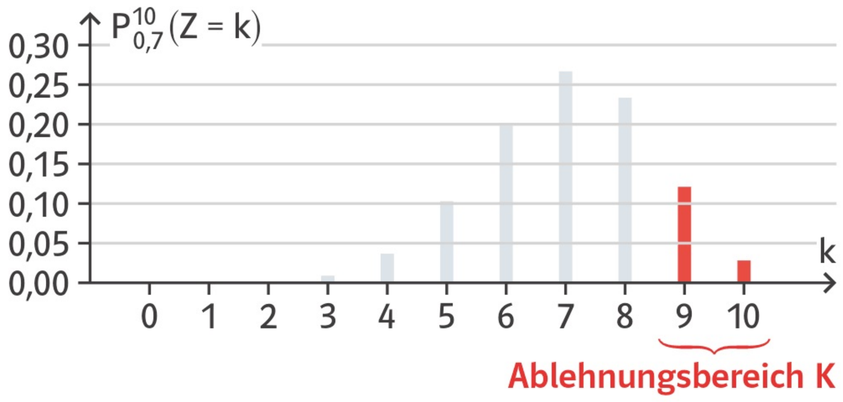
Verwendet man bei einem linksseitigen Hypothesentest die Nullhypothese $H_0: p \geq p_0$ bzw. bei einem rechtsseitigen $H_0: p \leq p_0$ anstelle von $H_0: p = p_0$, so genügt es, bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art den „Extremfall" $p = p_0$ zu betrachten. Würde man im linksseitigen Hypothesentest einen größeren Wert für p als p_0 bzw. im rechtsseitigen einen kleineren wählen, ergäbe sich in beiden Fällen eine kleinere Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art als im Fall $p = p_0$.

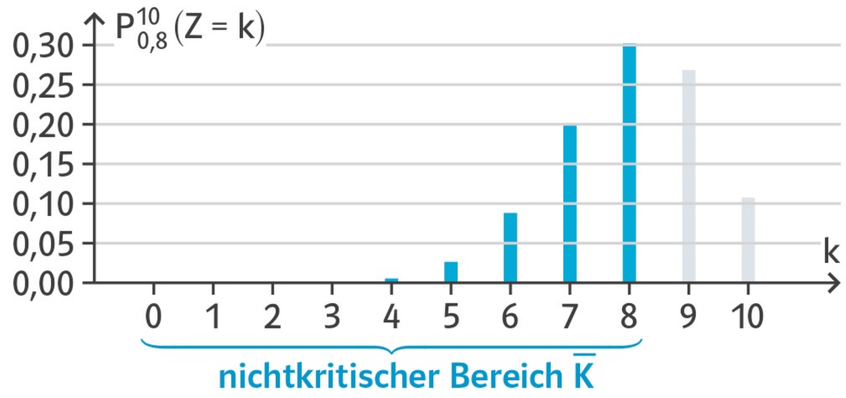
Einfluss des Ablehnungsbereichs auf α′ und β′

Die folgenden Säulendiagramme zeigen die Wahrscheinlichkeiten für die Fehler erster Art (rot) und zweiter Art (blau) in Abhängigkeit vom jeweils gewählten Ablehnungsbereich. In den unteren beiden Diagrammen ist der Ablehnungsbereich gegenüber den oberen beiden vergrößert, d.h. der nichtkritische Bereich verkleinert.

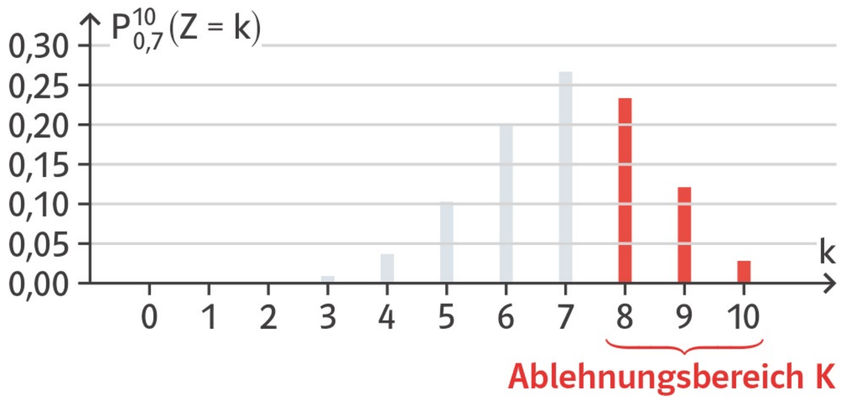
H_0 ist wahr ($p = 0{,}7$): | H_1 ist wahr (z.B. $p = 0{,}8$):

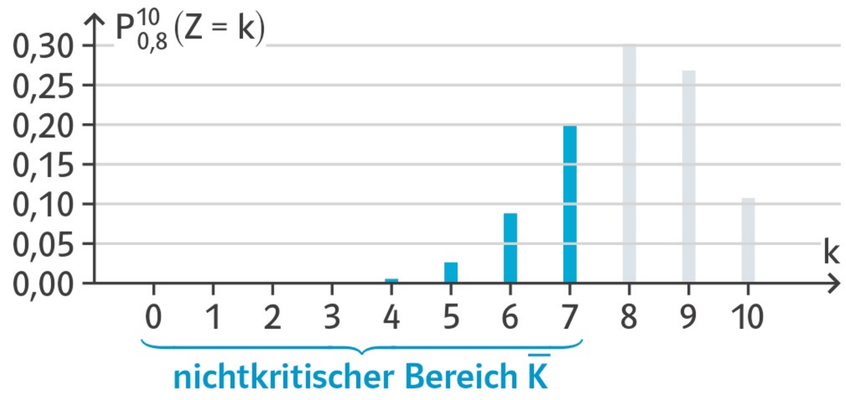
Gewählter Ablehnungsbereich $K = \{9; 10\}$ bzw. nichtkritischer Bereich $\overline{K} = \{0; 1; \ldots; 8\}$:





Gewählter Ablehnungsbereich $K = \{8; 9; 10\}$ bzw. nichtkritischer Bereich $\overline{K} = \{0; 1; \ldots; 7\}$:





Vergrößert man den Ablehnungsbereich, wird zwar die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art kleiner, die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art wird dagegen größer und umgekehrt.

Einfluss des Stichprobenumfangs auf α′ und β′

Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeiten α′ bzw. β′ für die Fehler erster Art und zweiter Art in Abhängigkeit von der Größe des Stichprobenumfangs n.
Man erkennt, dass durch Vergrößerung des Stichprobenumfangs sowohl die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art als auch die für den Fehler zweiter Art kleiner werden.

n	Nichtkritischer Bereich $\overline{K}$	α′ ($p = 0{,}7$)	β′ ($p = 0{,}8$)
10	$\overline{K} = \{0; 1; \ldots; 8\}$	0,149	0,624
20	$\overline{K} = \{0; 1; \ldots; 16\}$	0,107	0,589
30	$\overline{K} = \{0; 1; \ldots; 24\}$	0,077	0,572
40	$\overline{K} = \{0; 1; \ldots; 32\}$	0,055	0,563
50	$\overline{K} = \{0; 1; \ldots; 40\}$	0,040	0,556

Bei festem Stichprobenumfang n bewirkt eine Verkleinerung von β′ durch Vergrößerung des Ablehnungsbereichs K zwangsläufig eine Vergrößerung von α′ und umgekehrt.
Eine Verringerung beider Fehlerwahrscheinlichkeiten ist nur durch Erhöhung des Stichprobenumfangs möglich.

Grundsätzlich ist es sinnvoll, beide Fehler im Auge zu behalten; aber die Fehler erster und zweiter Art werden nicht gleichrangig behandelt. Meist wird die Nullhypothese so gewählt, dass der Fehler erster Art, d.h. die Nullhypothese fälschlicherweise abzulehnen, entschieden schwerwiegender ist. Man versucht daher, den Fehler erster Art zu kontrollieren bzw. deutlich einzuschränken, indem der Ablehnungsbereich entsprechend gewählt wird.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, einen Fehler zweiter Art zu begehen, kann dadurch allerdings sehr groß werden (vgl. Beispiel oben). Daher ist es falsch, das Nichtablehnen der Nullhypothese als Bestätigung der Nullhypothese zu deuten. Das Nichtablehnen der Nullhypothese bedeutet nur, dass keine statistisch relevanten Aussagen über die Nullhypothese gemacht werden können. Deshalb kann für den nichtkritischen Bereich die Bezeichnung Annahmebereich irreführend sein.

Beispielsweise wäre es entschieden schwerwiegender, einen giftigen Pilz als essbar einzustufen als einen essbaren Pilz als giftig.

Beispiel 1

Ein Hersteller von Golfbällen behauptet, dass der Anteil produzierter Bälle, die nicht den Gütekriterien für Form und Gewicht genügen, weniger als 15 % betrage. Ein Großabnehmer bezweifelt dies. Er entnimmt einer Lieferung eine Stichprobe vom Umfang $n = 100$ und entscheidet sich, die Golfbälle nicht anzunehmen, wenn elf oder mehr Bälle in der Stichprobe nicht den Gütekriterien entsprechen. Der Großabnehmer wählt als Nullhypothese $H_0: p \geq 15\,\%$, da er auf keinen Fall einen erhöhten Anteil von Bällen minderer Qualität kaufen will.

a) Geben Sie die Testgröße Z an, bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art und beschreiben Sie den Fehler erster Art im Sachzusammenhang.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art, wenn in Wirklichkeit 10 % der Golfbälle von minderer Qualität sind, und beschreiben Sie den Fehler zweiter Art bei diesem Test.

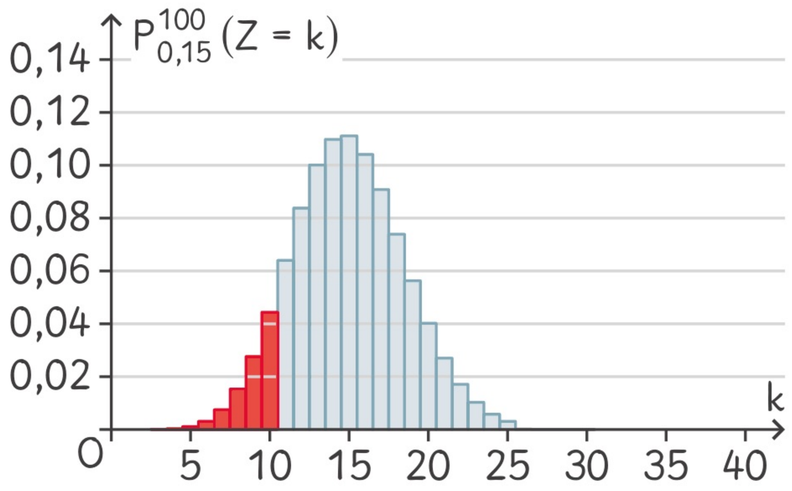
c) Erstellen Sie mithilfe einer geeigneten Software je ein Histogramm zu den beiden angegebenen, der Testgröße zugrunde liegenden Binomialverteilungen $B(100; 0{,}15)$ bzw. $B(100; 0{,}1)$ und veranschaulichen Sie darin die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art bzw. zweiter Art.

Lösung

a) Die Testgröße Z ist „Anzahl der Bälle in der Stichprobe von minderer Qualität".
Der Fehler erster Art bedeutet: Die Nullhypothese H_0 trifft tatsächlich zu, d. h., mindestens 15 % der Bälle entsprechen nicht den Gütekriterien, sie wird aber abgelehnt, da $Z < 11$ ist.
Da Z nach $B(100; 0{,}15)$ verteilt ist, gilt für die Wahrscheinlichkeit des Fehlers erster Art
$\alpha' = P^{100}_{0{,}15}(Z < 11) = P^{100}_{0{,}15}(Z \leq 10) = 0{,}099\,44\ldots \approx 10\,\%$.
Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lieferung gekauft wird, obwohl sie tatsächlich mindestens 15 % Bälle mit minderer Qualität enthält, ca. 10 %.

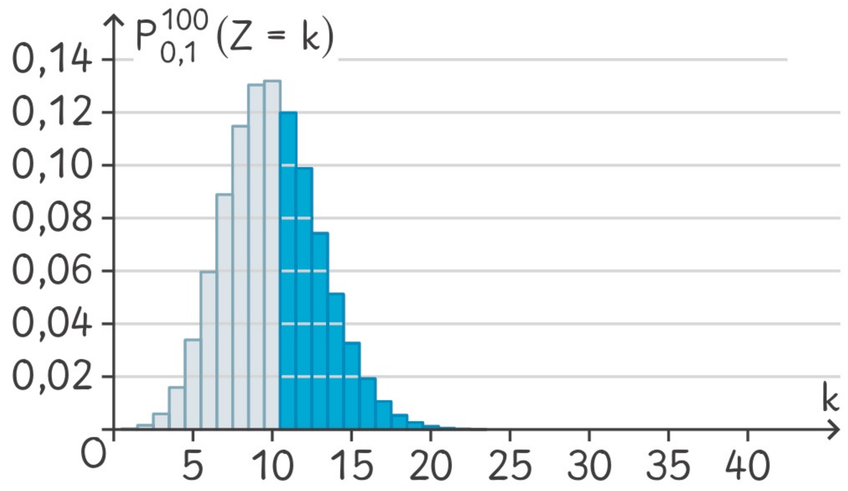
b) Der Fehler zweiter Art bedeutet: Die Gegenhypothese H_1 trifft tatsächlich zu, d. h., weniger als 15 % der Bälle sind nicht einwandfrei, aber die Nullhypothese wird nicht abgelehnt, da $Z \geq 11$ ist.
Da Z nach $B(100; 0{,}1)$ verteilt ist, gilt für die Wahrscheinlichkeit des Fehlers zweiter Art
$\beta' = P^{100}_{0{,}1}(Z \geq 11) = 1 - P^{100}_{0{,}1}(Z \leq 10) = 1 - 0{,}583\,15\ldots \approx 42\,\%$.
Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lieferung nicht angenommen wird, obwohl sie tatsächlich 10 % Bälle mit minderer Qualität enthält, etwa 42 %.

c) $B(100; 0{,}15)$-Verteilung



Der rot markierte Teil entspricht α'.

$B(100; 0{,}1)$-Verteilung



Der blau markierte Teil entspricht β'.

Beispiel 2

Für einen Hypothesentest mit Stichprobenumfang 10 lautet die Nullhypothese $H_0: p \leq \frac{1}{7}$ und somit die Gegenhypothese $H_1: p > \frac{1}{7}$.

a) Bestimmen Sie mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art, wenn als Ablehnungsbereich $K = \{3; 4; \ldots; 10\}$ festgelegt wird.

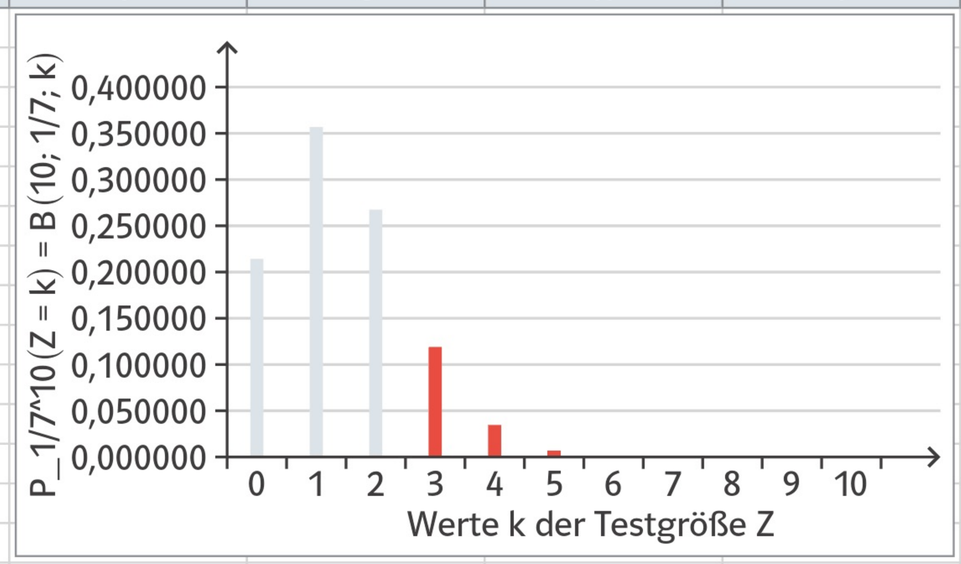
b) Legen Sie mithilfe des Tabellenkalkulationsprogramms einen möglichst großen Ablehnungsbereich fest, wenn die Wahrscheinlichkeit des Fehlers erster Art unter 5 % liegen soll.

Lösung

a) Mithilfe der Tabelle auf der nächsten Seite:
$\alpha' = P^{10}_{\frac{1}{7}}(Z \in K) = P^{10}_{\frac{1}{7}}(Z \geq 3) = 1 - P^{10}_{\frac{1}{7}}(Z \leq 2) = 1 - 0{,}838\,39\ldots \approx 16\,\%$.

C6 | = | =BINOM.VERT(A6;10;1/7;WAHR)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n = 10	p = 1/7							
2									
3	k	P(Z = k) = B(10; 1/7; k)	P(Z ≤ k)						
4	0	0,214058	0,214058						
5	1	0,356764	0,570822						
6	2	0,267573	0,838395						
7	3	0,118921	0,957316						
8	4	0,034685	0,992002						
9	5	0,006937	0,998939						
10	6	0,000963	0,999902						
11	7	0,000092	0,999994						
12	8	0,000006	1,000000						
13	9	0,000000	1,000000						
14	10	0,000000	1,000000						



b) Für die Wahrscheinlichkeit des Fehlers erster Art soll gelten:

$\alpha' = P_{\frac{1}{7}}^{10}(Z \geq g) = 1 - P_{\frac{1}{7}}^{10}(Z \leq g - 1) < 0{,}05 \iff P_{\frac{1}{7}}^{10}(Z \leq g - 1) > 0{,}95.$

Aus der Tabelle ergibt sich $g - 1 = 3$. Also ist $g = 4$ und damit $K = \{4; \ldots; 10\}$.

Aufgaben

1 Es wird ein linksseitiger Hypothesentest mit der Nullhypothese $H_0: p \geq 0{,}6$ durchgeführt. Der Stichprobenumfang ist 50, der Ablehnungsbereich ist $K = \{0; 1; \ldots; 23\}$.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit α' für den Fehler erster Art. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit β' für den Fehler zweiter Art, falls die Wahrscheinlichkeit p beträgt. Veranschaulichen Sie α' und β' jeweils in einem geeigneten Histogramm mithilfe einer geeigneten Software.

a) $p = 0{,}55$ **b)** $p = 0{,}5$ **c)** $p = 0{,}4$ **d)** $p = 0{,}3$

2 Es wird ein rechtsseitiger Hypothesentest mit der Nullhypothese $H_0: p \leq 0{,}6$ durchgeführt. Der Stichprobenumfang ist 80, der Ablehnungsbereich ist $K = \{56; 57; \ldots; 80\}$.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit α' für den Fehler erster Art. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit β' für den Fehler zweiter Art, falls die Wahrscheinlichkeit p beträgt. Veranschaulichen Sie α' und β' jeweils in einem geeigneten Histogramm mithilfe einer geeigneten Software.

a) $p = 0{,}65$ **b)** $p = 0{,}7$ **c)** $p = 0{,}75$ **d)** $p = 0{,}8$

3 Die Nullhypothese $H_0: p = 0{,}3$ soll zugunsten $H_1: p > 0{,}3$ abgelehnt werden, wenn in einer Stichprobe vom Umfang $n = 50$ mindestens g Treffer gezählt werden.

a) Geben Sie an, ob es sich um einen links- oder um einen rechtsseitigen Test handelt.

b) Ergänzen Sie: „Je größer der Wert von g ist, desto … α' und desto … β'."

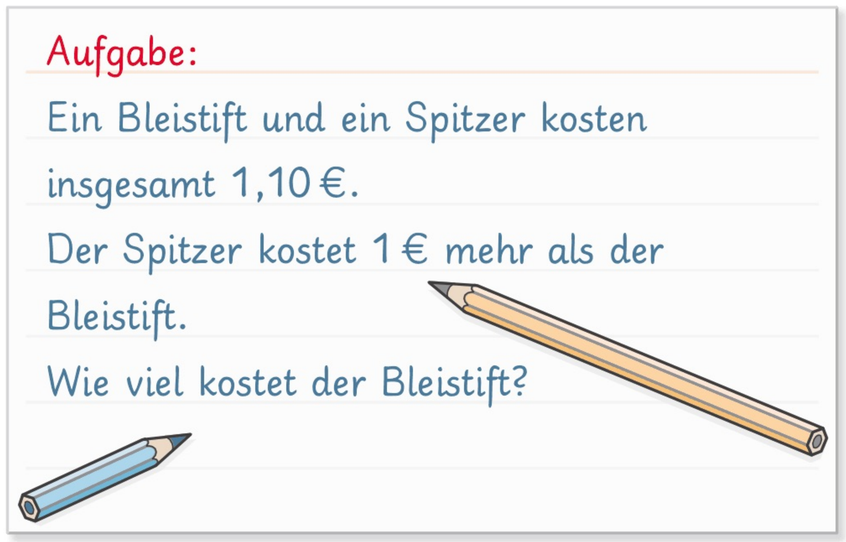
c) Bestimmen Sie für $g = 19; 20; 21; 22$ und 23 die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art und – unter der Annahme $p = 0{,}5$ – die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art. Überprüfen Sie, ob sich Ihre Aussage von Teilaufgabe b) bestätigt hat.

4 Erläutern Sie sich gegenseitig die Begriffe Fehler erster Art und Fehler zweiter Art mithilfe skizzierter Histogramme sowohl bei einem linksseitigen als auch bei einem rechtsseitigen Test.

5 Erstellen Sie mithilfe einer geeigneten Software für einen Test mit der Nullhypothese $H_0: p = p_0$ und der Gegenhypothese $H_1: p < p_0$ bzw. $H_1: p > p_0$ bei einem Stichprobenumfang n das zu $B(n; p_0)$ gehörende Histogramm.
Legen Sie sowohl für einen linksseitigen als auch für einen rechtsseitigen Test einen Ablehnungsbereich fest und bestimmen Sie dazu mithilfe der Software jeweils die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art. Veranschaulichen Sie diese in Ihrem Histogramm.

a) $p_0 = 0{,}5;\ n = 10$ **b)** $p_0 = 0{,}3;\ n = 10$ **c)** $p_0 = 0{,}25;\ n = 10$ **d)** $p_0 = 0{,}4;\ n = 15$
e) $p_0 = 0{,}4;\ n = 20$ **f)** $p_0 = 0{,}8;\ n = 20$ **g)** $p_0 = 0{,}1;\ n = 20$ **h)** $p_0 = 0{,}1;\ n = 50$

6 Mathematiklehrer Adam behauptet, nur eine von fünf Personen könne die abgebildete Aufgabe lösen (Nullhypothese). Sein Kollege Riese hält dies für zu pessimistisch. Die beiden lassen diese Aufgabe von verschiedenen Personen bearbeiten. Adam erklärt sich bereit, von seiner Meinung abzurücken, wenn mindestens 15 von 50 Befragten die Aufgabe lösen können.



Eine ganz ähnliche Aufgabe ist Teil des „kürzesten IQ-Tests der Welt", den Prof. Shane Frederick 2005 veröffentlichte.

a) Lösen Sie die Aufgabe.

b) Geben Sie die Testgröße an und notieren Sie die Null- und die Gegenhypothese mathematisch. Geben Sie darüber hinaus den Ablehnungsbereich und den nichtkritischen Bereich an.

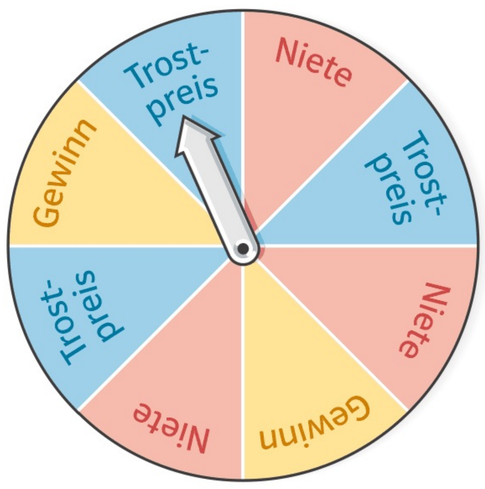
c) Beschreiben Sie den Fehler erster Art im Sachzusammenhang und berechnen Sie seine Wahrscheinlichkeit.

d) Beschreiben Sie den Fehler zweiter Art im Sachzusammenhang und berechnen Sie seine Wahrscheinlichkeit, wenn tatsächlich 30 % diese Aufgabe lösen können.

Test 1

Lösungen | Seite 282

7 Ein Glücksbudenbesitzer behauptet, bei seinem Glücksrad betrage die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn 25 %. Magnus meint, sie sei geringer. Die Nullhypothese $H_0: p = 0{,}25$ wird mit einer Stichprobe im Umfang von 150 getestet; sie wird verworfen, wenn weniger als 30 Gewinne auftreten.



a) Geben Sie den Ablehnungsbereich und den nichtkritischen Bereich an und notieren Sie die Gegenhypothese mathematisch. Geben Sie zudem an, ob es sich um einen links- oder um einen rechtsseitigen Test handelt.

b) Beschreiben Sie den Fehler erster Art im Sachzusammenhang und berechnen Sie seine Wahrscheinlichkeit.

c) Beschreiben Sie den Fehler zweiter Art im Sachzusammenhang. Berechnen Sie seine Wahrscheinlichkeit, wenn die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn $p = 0{,}18$ beträgt.

8 Der Anteil der weißen Kugeln in einer Urne ist entweder 20 % oder größer. Die Nullhypothese $H_0: p = 0{,}2$ soll bei einem Stichprobenumfang n rechtsseitig getestet werden.

a) Bei $n = 20$ Ziehungen mit Zurücklegen wird als Ablehnungsbereich $K = \{7; \ldots; 20\}$ festgelegt. Beschreiben Sie den Fehler erster Art im Sachzusammenhang und berechnen Sie seine Wahrscheinlichkeit sowie für den Fall $p = 40\,\%$ die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art. Erstellen Sie mithilfe einer geeigneten Software hierzu zwei passende Histogramme.

b) Der Stichprobenumfang wird nun auf $n = 50$ erhöht. Der Ablehnungsbereich für die Nullhypothese sei $K = \{g;\ g + 1;\ \ldots; 50\}$. Berechnen Sie mithilfe einer geeigneten Software für $g = 14; 15; 16$ und 17 die Wahrscheinlichkeiten für den Fehler erster Art und für den Fall $p = 40\,\%$ die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art. Erstellen Sie wiederum mithilfe der Software jeweils zwei passende Histogramme.

9 Beurteilen und diskutieren Sie die Aussage.

a) Wenn man bei einem Hypothesentest als Ablehnungsbereich die leere Menge wählt, ist die Wahrscheinlichkeit für beide Fehler gleich null.

b) Wenn man bei einem Hypothesentest als nichtkritischen Bereich die leere Menge wählt, ist die Wahrscheinlichkeit für beide Fehler unendlich.

10 Der Elternbeirat einer Schule behauptet, dass mehr als 40 % der Schulbusse Verspätung hätten. Der zuständige Verkehrsbetrieb protokolliert daraufhin für 180 Fahrten, ob der jeweilige Schulbus Verspätung hat oder nicht. Der Verkehrsbetrieb geht davon aus, dass nicht mehr als 40 % der Schulbusse Verspätung haben (Nullhypothese), ist aber bereit, dem Elternbeirat zu glauben, falls der Wert der Testgröße „Anzahl der Verspätungen“ um mehr als eine Standardabweichung (zwei Standardabweichungen) über dem Erwartungswert (für den Fall $p = 0{,}4$) liegt.

a) Bestimmen Sie die Entscheidungsregel und beschreiben Sie den Fehler erster Art im Sachzusammenhang.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art sowie für den Fehler zweiter Art, wenn man annimmt, dass die Hälfte der Schulbusse Verspätung hat.

11 Wahr oder falsch? Begründen und diskutieren Sie Ihre Einschätzung.

a) Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Nullhypothese falsch ist.

b) Verkleinert man den Ablehnungsbereich, verkleinert sich die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art und gleichzeitig vergrößert sich die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art.

c) Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Gegenhypothese wahr ist.

12 Entscheiden Sie beim nachfolgenden Test zum Thema „Testen“ jeweils, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Die Nullhypothese „Sie raten nur“ soll zugunsten der Gegenhypothese „Sie kennen sich aus beim Testen“ genau dann abgelehnt werden, wenn Sie höchstens einmal falsch bewerten.

(1) Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art beträgt bei dem vorliegenden Test ca. 3,5 %.

(2) „Aufstellen der Nullhypothese“ heißt, man nimmt an, dass die Trefferwahrscheinlichkeit der zugrunde liegenden Bernoulli-Kette den Wert 0 habe.

(3) Ein Fehler zweiter Art liegt vor, wenn eine nichtzutreffende Nullhypothese nicht abgelehnt wird.

(4) Ein Fehler erster Art liegt vor, wenn eine zutreffende Nullhypothese nicht abgelehnt wird.

(5) Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers erster Art eines Tests ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man sich falsch entscheidet.

(6) Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art ist nur unter zusätzlichen Annahmen berechenbar.

(7) Bei festem Stichprobenumfang lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für die Fehler erster Art und zweiter Art gemeinsam verkleinern.

(8) Beim Testen mit einer Binomialverteilung versucht man, ausgehend von einer vorgegebenen Trefferwahrscheinlichkeit p Aussagen über eine Stichprobe zu machen.

Lösungskontrolle: Stellen Sie die Zahl 164 im Zweiersystem dar und übersetzen Sie 1 mit „wahr“ und 0 mit „falsch“. So erhalten Sie von links nach rechts gelesen die Abfolge der zutreffenden Bewertungen.

13 Der Ausschussanteil bei der Produktion von Werkstücken beträgt bislang 8 %. Nach einer Veränderung des Produktionsprozesses vermutet der Betriebsleiter, dass der Ausschussanteil reduziert wurde. Diese Vermutung soll durch einen Test überprüft werden, wobei als Nullhypothese „Der Ausschussanteil beträgt mindestens 8 %“ gewählt wird.

a) Einer Charge wird zunächst eine Stichprobe von 200 Werkstücken entnommen. Die Nullhypothese wird verworfen, wenn der Ausschussanteil in der Stichprobe höchstens 4 % beträgt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art sowie für den Fehler zweiter Art, wenn der Ausschussanteil in Wirklichkeit nur 5 % beträgt.

b) Erläutern Sie, inwiefern die Entnahme der Werkstücke für die Stichprobe aus nur einer Charge das Testergebnis beeinflussen könnte.

c) In einem zweiten Test werden für die Stichprobe insgesamt 500 Werkstücke aus mehreren Chargen entnommen. Ermitteln Sie mithilfe des Taschenrechners oder einer geeigneten Software einen möglichst großen Ablehnungsbereich, ohne dass die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art gegenüber der in Teilaufgabe a) steigt. Bestimmen Sie dann die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art, wenn der Ausschussanteil in Wirklichkeit wieder nur 5 % beträgt.

Test 2

Lösungen | Seite 283

14 Eine Bildungsforscherin entwirft für eine internationale Vergleichsstudie eine Mathematikaufgabe für 15-jährige Schülerinnen und Schüler. Ihrer Einschätzung nach können höchstens 20 % der Schülerinnen und Schüler diese Aufgabe lösen. Um ihre Einschätzung zu testen, bittet sie einen befreundeten Mathematiklehrer, die Aufgabe den 25 (15-jährigen) Schülerinnen und Schülern seiner 9. Klasse zu stellen. Sollten mehr als sechs Schülerinnen und Schüler die Aufgabe richtig lösen, geht sie davon aus, dass die Aufgabe doch leichter ist als gedacht.

a) Geben Sie die Testgröße an und formulieren Sie die Null- und die Gegenhypothese sowie den Ablehnungsbereich und den nichtkritischen Bereich mathematisch.

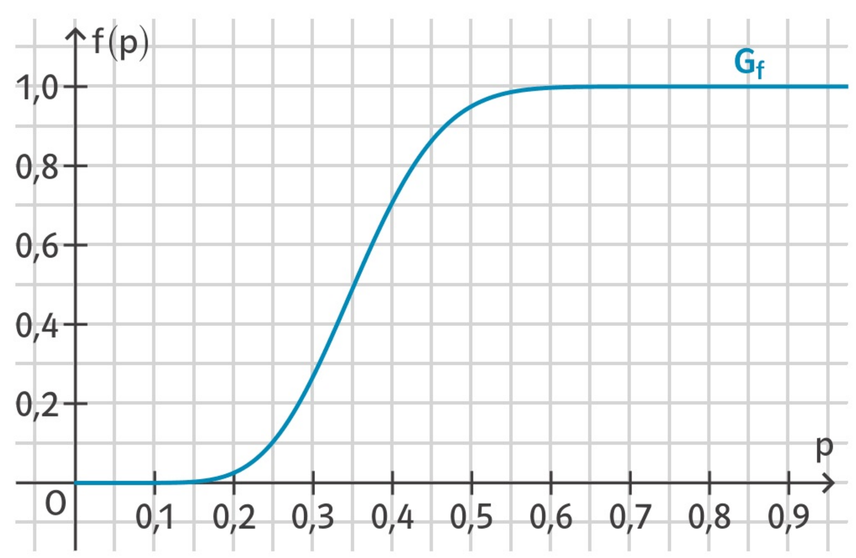
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art sowie für den Fehler zweiter Art unter der Annahme, dass tatsächlich 30 % der Schülerinnen und Schüler die Aufgabe lösen können.

c) Vergrößern bzw. verkleinern Sie den Ablehnungsbereich um ein Element und bestimmen Sie jeweils erneut die Wahrscheinlichkeiten für die Fehler erster Art und zweiter Art unter derselben Annahme wie in Teilaufgabe b). Formulieren Sie allgemein, wie sich eine Vergrößerung bzw. Verkleinerung des Ablehnungsbereichs auf α' und β' auswirkt.

d) Beurteilen Sie, ob die Auswahl der Schülerinnen und Schüler für die Stichprobe den Durchschnitt aller Schülerinnen und Schüler einer internationalen Vergleichsstudie widerspiegelt. Erläutern Sie, inwiefern das Testergebnis durch diese Auswahl beeinflusst werden könnte.

e) Die Bildungsforscherin legt die Aufgabe 200 anderen Schülerinnen und Schülern vor. Ermitteln Sie mithilfe des Taschenrechners einen möglichst großen Ablehnungsbereich, bei dem die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art unter 5 % liegt, und bestimmen Sie für diesen Bereich die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art wieder unter derselben Annahme wie in Teilaufgabe b).

15 Es wird ein rechtsseitiger Hypothesentest mit H_0: „Die Trefferwahrscheinlichkeit beträgt höchstens 20 %“, Stichprobenumfang $n = 30$ und Ablehnungsbereich $K = \{11; 12; \ldots; 30\}$ durchgeführt. Die Funktion f ordnet jedem Wert von p mit $0 \leq p \leq 1$ die Wahrscheinlichkeit dafür zu, dass man die Nullhypothese verwirft, falls die tatsächliche Trefferwahrscheinlichkeit p beträgt. Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f.



a) Begründen Sie, dass für eine $B(30; p)$-verteilte Testgröße Z gilt: $f(p) = P_p^{30}(Z \geq 11)$.

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit α' des Fehlers erster Art mithilfe von f an.

c) Erläutern Sie, wie man mithilfe von f die Wahrscheinlichkeit β' des Fehlers zweiter Art bestimmen kann. Beschreiben Sie das Verhalten von β' in Abhängigkeit von p.

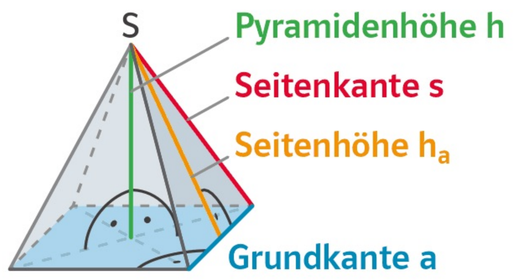
d) Beschreiben Sie, wie sich der Graph einer solchen Funktion für wachsende Werte von n verändert.

e) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion eines linksseitigen Hypothesentests.

Grundwissen Test

Lösungen | Seite 283

G 16 Gegeben ist eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche, deren Grundkante a genauso lang ist wie ihre Höhe h.



a) Bestimmen Sie die Längen einer Seitenkante und einer Seitenhöhe in Abhängigkeit von a.

b) Berechnen Sie die Größen der Neigungswinkel einer Seitenkante und einer Seitenfläche gegen die Grundfläche auf eine Dezimale genau.

c) Bestimmen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt der Pyramide in Abhängigkeit von a.

3 Konstruktion eines einseitigen Signifikanztests

Ein Pharmaunternehmen hat die Zusammensetzung eines Medikaments verändert und behauptet, dass die Häufigkeit für eine unerwünschte Nebenwirkung nun geringer sei. Beim bisherigen Präparat tritt die Nebenwirkung bei 10 % der Anwendungen auf.
Bevor das Medikament auf den Markt kommt, soll ein einseitiger Hypothesentest durchgeführt werden. Erläutern Sie die Konsequenzen eines links- bzw. eines rechtsseitigen Tests und beurteilen Sie, welcher Test durchgeführt werden sollte.

Wie groß bei einem Hypothesentest die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art ist, hängt davon ab, wie die Entscheidungsregel und somit der Ablehnungsbereich (kritische Bereich) für die Nullhypothese gewählt wurden.

Die Nullhypothese lässt sich nicht mathematisch herleiten; sie wird aus dem Sachzusammenhang in der Regel so formuliert, dass der zugehörige Fehler erster Art derjenige ist, der gravierendere Folgen nach sich zieht und den man deswegen kontrollieren möchte.
Dazu legt man für die Wahrscheinlichkeit des Fehlers erster Art eine Obergrenze fest; diese Obergrenze heißt **Signifikanzniveau α**, d.h., es gilt: $\alpha' \leq \alpha$. In der Praxis wählt man für α häufig die Werte 5 %, 2 % oder 1 %.
Wird die Nullhypothese H_0 mit $\alpha' \leq \alpha$ verworfen, so sagt man, das Ergebnis sei signifikant auf dem Niveau von α. Ein **signifikantes Testergebnis** auf einem Signifikanzniveau von 5 % bedeutet also: Wenn die Nullhypothese tatsächlich gilt, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert der Testgröße im Ablehnungsbereich liegt, höchstens 5 %.

Aus dem Signifikanzniveau α ergibt sich dann der Ablehnungsbereich K und somit die Entscheidungsregel des Tests. Ein so konstruierter Hypothesentest wird auch als **Signifikanztest** bezeichnet.

Definition: Einen Hypothesentest mit einem zuvor festgelegten **Signifikanzniveau α** und einem Ablehnungsbereich K, der aus einem einzigen Intervall besteht, bezeichnet man als **einseitigen Signifikanztest**.

Wie man bei der Erstellung eines einseitigen Signifikanztests vorgeht, d.h. zu vorgegebenem Signifikanzniveau den Ablehnungsbereich konstruiert, wird anhand der folgenden Situation beschrieben.

Eine Versuchsperson soll darauf getestet werden, ob sie außersinnliche Wahrnehmung (ASW) besitzt. Bei einem auf J.B. Rhine und K.E. Zener zurückgehenden Experiment werden der Versuchsperson zunächst fünf Karten, die sogenannten Zenerkarten, offen gezeigt. Anschließend werden die Karten gemischt und verdeckt auf einen Stapel gelegt. Die Person muss nun angeben, welche Karte die oberste auf dem Stapel ist. Dieses Experiment wird 10-mal wiederholt. Da man Personen ungern irrtümlich außersinnliche Wahrnehmung bescheinigen möchte, wird das Signifikanzniveau auf 2 % festgelegt.

Die fünf Zenerkarten

Konstruktion eines zur gegebenen Situation passenden Signifikanztests

1. Festlegen der Testgröße Z und des Stichprobenumfangs n.

   Z: „Anzahl der richtig identifizierten Karten."
   n = 10

2. Die Nullhypothese wird mathematisch formuliert. Wie die Nullhypothese gewählt wird, ist keine Frage der Mathematik, sondern der konkreten Anwendungssituation. Man wird sie so wählen, dass ihre irrtümliche Ablehnung folgenschwerer ist.

   Nullhypothese H_0: „Person hat keine ASW."
   Gegenhypothese H_1: „Person hat ASW."
   Wenn die Person keine ASW besitzt, so wird sie raten, d.h., die Trefferwahrscheinlichkeit beträgt $p = 0{,}2$.
   Kurz: $H_0: p = 0{,}2$; $H_1: p > 0{,}2$.
   Rechtsseitiger Signifikanztest

3. Festlegen des Signifikanzniveaus α: Welcher Wert für α festgelegt wird, hängt davon ab, welche Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art man zuzulassen bereit ist.

   Festlegung: Signifikanzniveau $\alpha = 2\,\%$, da man einer ratenden Person ungern ASW bescheinigen möchte, also hier eher restriktiv sein sollte.

4. Bestimmen der Entscheidungsregel, d.h. Konstruktion des Ablehnungsbereichs K (kritischer Bereich).

   Da es sich um einen rechtsseitigen Test handelt, beginnt der Ablehnungsbereich in diesem Fall bei einer bestimmten Trefferanzahl g und endet bei 10, also $K = \{g;\ g+1;\ \ldots;\ 10\}$.

   Die Grenzzahl g des Ablehnungsbereichs wird durch das Signifikanzniveau festgelegt. Sie ist die kleinste natürliche Zahl, für die gilt:

$$\alpha' \le \alpha \Leftrightarrow P^{10}_{0{,}2}(Z \ge g) \le \alpha$$
$$\Leftrightarrow 1 - P^{10}_{0{,}2}(Z \le g-1) \le 0{,}02$$
$$\Leftrightarrow P^{10}_{0{,}2}(Z \le g-1) \ge 0{,}98.$$

   Mithilfe des Taschenrechners erhält man
   $g - 1 = 5$, also $g = 6$ und $K = \{6; 7; 8; 9; 10\}$.

Die irrtümliche Ablehnung von „hat keine ASW" ist folgenschwerer als die irrtümliche Ablehnung von „hat ASW", da ansonsten jemandem, der nur rät, ASW zugesprochen wird und diese Person damit in der Öffentlichkeit Unheil anrichten kann. Im umgekehrten Fall wird einer Person mit ASW diese abgesprochen, was für die Allgemeinheit sicher nicht nachteilig ist.

Es ist hilfreich, sich zunächst zu überlegen, welcher Rand des Wertebereichs der Testgröße Z sicher im Ablehnungsbereich liegen wird.

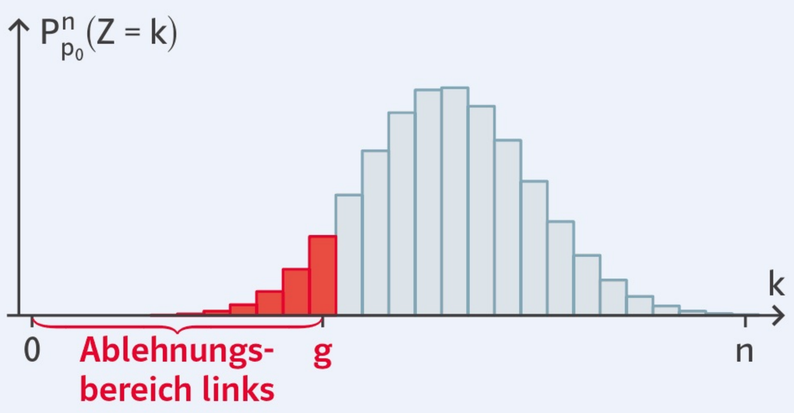
Liste 1	Liste 2
3	0.879126
4	0.967207
5	0.993631
6	0.999136

Konstruktion eines einseitigen Signifikanztests

1. Festlegen der Testgröße Z und des Stichprobenumfangs n.
2. Mathematische Formulierung der Nullhypothese H_0 und der Gegenhypothese H_1.
3. Festlegen des Signifikanzniveaus α gemäß der in der Anwendungssituation maximal tolerierten Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art.
4. Bestimmen der Entscheidungsregel, d.h. Konstruktion des Ablehnungsbereichs K.

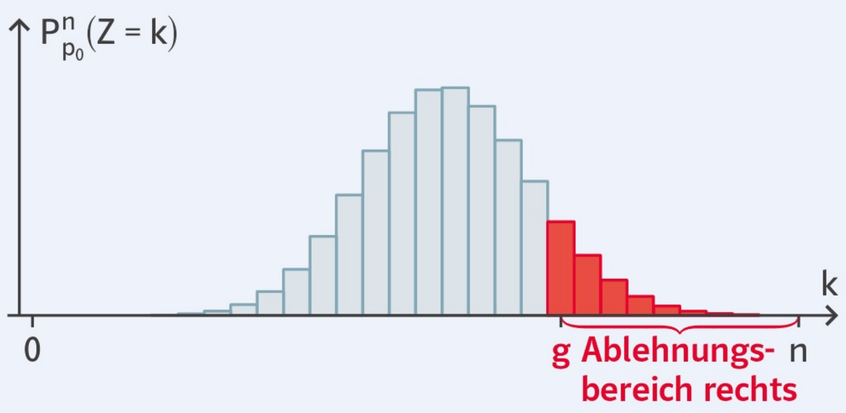
Linksseitiger Test:

Ablehnungsbereich $K = \{0; 1; \ldots; g\}$,
wobei g die größte natürliche Zahl ist mit $\alpha' = P^n_{p_0}(Z \le g) \le \alpha$.



Rechtsseitiger Test:

Ablehnungsbereich $K = \{g;\ g+1;\ \ldots;\ n\}$,
wobei g die kleinste natürliche Zahl ist mit $\alpha' = P^n_{p_0}(Z \ge g) \le \alpha$.



Beachten Sie:
Beim linksseitigen Signifikanztest erhält man die Grenzzahl g mithilfe des Taschenrechners unmittelbar aus dem größtmöglichen („letzten“) Wert $P_{p_0}^n(Z \leq k)$, der kleiner als α ist. Der dazugehörige Wert von k ist gleichzeitig der gesuchte Wert für g.
Beim rechtsseitigen Signifikanztest muss man beim Ermitteln von g auf Folgendes achten:
$\alpha' \leq \alpha \iff P_{p_0}^n(Z \geq g) \leq \alpha \iff 1 - P_{p_0}^n(Z \leq g-1) \leq \alpha \iff P_{p_0}^n(Z \leq g-1) \geq 1-\alpha$. Man sucht also zunächst den kleinstmöglichen („ersten“) Wert $P_{p_0}^n(Z \leq k)$, der größer als $1-\alpha$ ist. Zum dazugehörigen Wert von k muss noch 1 addiert werden, um den gesuchten Wert für g zu erhalten.
Ob es sich um einen linksseitigen oder rechtsseitigen Signifikanztest handelt, folgt unmittelbar aus der Wahl von Null- und Gegenhypothese.

Es gilt
$P_p^n(Z < g) = P_p^n(Z \leq g-1)$
und
$P_p^n(Z \geq g) + P_p^n(Z \leq g-1) = 1$.

Bemerkung:
Bei der Formulierung der Nullhypothese lässt sich aus der Anwendungssituation heraus nicht immer eindeutig bestimmen, welche falsch getroffene Entscheidung folgenschwerer ist. Diese Einschätzung hängt mitunter vom Standpunkt desjenigen ab, der den Test durchführt.
Behauptet beispielsweise ein Verkäufer, dass seine Ware zwar teurer, dafür aber weniger schadhaft ist als die der Konkurrenz, deren Schadensrate p_0 bekannt ist, wird er vorzugsweise rechtsseitig testen (d.h. $H_0: p \leq p_0$). Für den Verkäufer ist es folgenschwerer, wenn seine tatsächlich bessere Ware nicht als solche eingestuft würde.
Ein Kunde hingegen wird eher vom Gegenteil ausgehen und linksseitig testen (d.h. $H_0: p \geq p_0$), denn für ihn wäre es folgenschwerer, die teurere Ware zu kaufen, obwohl sie nicht besser ist als die billigeren Konkurrenzprodukte.

Beispiel 1

Felix behauptet, dass er seine Lieblingsschokolade am Geschmack erkennen kann. Es wird ein rechtsseitiger Test von $H_0: p = 0{,}5$ auf einem Signifikanzniveau von 5 % durchgeführt.

a) Felix verkostet an 30 Tagen blind je ein Stück seiner Lieblingsschokolade zusammen mit einem Stück einer anderen Schokolade. Ermitteln Sie die zugehörige Entscheidungsregel. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art und die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art, wenn Felix tatsächlich mit 70 % Wahrscheinlichkeit seine Lieblingsschokolade herausschmeckt.
b) Bestimmen Sie, wie sich die in Teilaufgabe a) berechneten Werte ändern, wenn der Stichprobenumfang verdoppelt wird.
c) Berechnen Sie für die Teilaufgaben a) und b), welchen Anteil Felix jeweils mindestens richtig erkennen muss, damit man ihm glaubt. Vergleichen Sie beide Werte und interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösung

a) Testgröße Z: „Anzahl der richtig erkannten Schokoladenstücke.“ Parameter: $p = 0{,}5$ und $n = 30$.
$P_{0{,}5}^{30}(Z \geq g) = 1 - P_{0{,}5}^{30}(Z \leq g-1) \leq 0{,}05 \iff P_{0{,}5}^{30}(Z \leq g-1) \geq 0{,}95$
Mithilfe des Taschenrechners erhält man $g - 1 = 19$, also $g = 20$ und somit:
Ablehnungsbereich: $K = \{20; 21; \ldots; 30\}$.
$\alpha' = P_{0{,}5}^{30}(Z \geq 20) = 1 - P_{0{,}5}^{30}(Z \leq 19) \approx 4{,}9\,\%$; $\beta' = P_{0{,}7}^{30}(Z \leq 19) \approx 27\,\%$

b) Testgröße Z und Parameter p unverändert, $n = 60$.
$P_{0{,}5}^{60}(Z \geq g) = 1 - P_{0{,}5}^{60}(Z \leq g-1) \leq 0{,}05 \iff P_{0{,}5}^{60}(Z \leq g-1) \geq 0{,}95$
Mithilfe des Taschenrechners erhält man $g - 1 = 36$, also $g = 37$ und somit:
Ablehnungsbereich: $K = \{37; 38; \ldots; 60\}$.
$\alpha' = P_{0{,}5}^{60}(Z \geq 37) = 1 - P_{0{,}5}^{60}(Z \leq 36) \approx 4{,}6\,\%$; $\beta' = P_{0{,}7}^{60}(Z \leq 36) \approx 6{,}3\,\%$

c) Anteil für $n = 30$: $\frac{20}{30} \approx 67\,\%$; Anteil für $n = 60$: $\frac{37}{60} \approx 62\,\%$. Mit zunehmendem Stichprobenumfang sinkt also der Anteil, den Felix mindestens richtig erkennen muss. Dies liegt daran, dass eine konstante relative Abweichung vom Erwartungswert der Testgröße mit zunehmendem n immer unwahrscheinlicher wird.

Beispiel 2

Es soll ein großer Freizeitpark errichtet werden, wofür aber staatliche Fördergelder benötigt werden. In einer früheren Umfrage befürworteten 70 % der Bevölkerung in der betroffenen Region den Bau des Freizeitparks. Das zuständige Ministerium möchte allerdings überprüfen, ob sich das Meinungsbild mittlerweile geändert hat, bevor eine Entscheidung über die Förderung des Projekts getroffen wird. Es wird dazu ein einseitiger Signifikanztest mit der Nullhypothese $H_0: p = 0{,}7$ mit Stichprobenumfang $n = 100$ und Signifikanzniveau 5 % durchgeführt. Falls die Nullhypothese nicht abgelehnt werden kann, hält sich das Ministerium die Entscheidung über die Förderung offen.

a) Ein Mitarbeiter des Ministeriums spricht sich für einen linksseitigen Signifikanztest aus. Notieren Sie die zugehörige Gegenhypothese mathematisch, ermitteln Sie den Ablehnungsbereich und formulieren Sie die Entscheidungsregel in Worten. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art und beschreiben Sie dessen Bedeutung im Sachzusammenhang.

b) Ein anderer Mitarbeiter spricht sich für einen rechtsseitigen Signifikanztest aus. Notieren Sie auch für diesen Fall die zugehörige Gegenhypothese, ermitteln Sie den Ablehnungsbereich und formulieren Sie die Entscheidungsregel in Worten. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art und beschreiben Sie wieder dessen Bedeutung im Sachzusammenhang.

c) Eine Bürgerinitiative, die gegründet wurde, um den Bau des Freizeitparks zu verhindern, behauptet, der Anteil der Befürworter sei gesunken. Der regionale Tourismusverband, der für den Bau des Parks ist, behauptet dagegen, dass der Anteil der Befürworter gestiegen sei. Beurteilen Sie, welches der beiden Testdesigns welcher Gruppierung entgegenkommt.

Lösung

Als binomialverteilte Testgröße wird Z: „Anzahl der Parkbefürworter“ mit $n = 100$ und $p = 0{,}7$ verwendet.

a) Die Gegenhypothese lautet $H_1: p < 0{,}7$.

$\alpha' \leq 0{,}05 \iff P_{0{,}7}^{100}(Z \leq g) \leq 0{,}05$

Mithilfe des Taschenrechners erhält man $g = 61$. Somit gilt $K = \{0; 1; \ldots; 61\}$. Die Nullhypothese wird also abgelehnt, wenn von den 100 Befragten nur 61 oder weniger den Bau befürworten.

$\alpha' = P_{0{,}7}^{100}(Z \leq 61) \approx 3{,}4\,\%$

Den Fehler erster Art zu begehen, bedeutet hier, dass der Park nicht gefördert wird, weil fälschlicherweise angenommen wird, dass die Anzahl der Befürworter gesunken ist.

b) Die Gegenhypothese lautet $H_1: p > 0{,}7$.

$\alpha' \leq 0{,}05 \iff P_{0{,}7}^{100}(Z \geq g) = 1 - P_{0{,}7}^{100}(Z \leq g - 1) \leq 0{,}05 \iff P_{0{,}7}^{100}(Z \leq g - 1) \geq 0{,}95$

Mithilfe des Taschenrechners erhält man $g - 1 = 77$, also $g = 78$. Somit gilt $K = \{78; 79; \ldots; 100\}$. Die Nullhypothese wird also abgelehnt, wenn von den 100 Befragten mindestens 78 den Bau befürworten.

$\alpha' = P_{0{,}7}^{100}(Z \geq 78) = 1 - P_{0{,}7}^{100}(Z \leq 77) \approx 4{,}8\,\%$

Den Fehler erster Art zu begehen, bedeutet hier, dass der Park möglicherweise gefördert wird, weil fälschlicherweise angenommen wird, dass die Anzahl der Befürworter gestiegen ist.

c) Möchte die Bürgerinitiative ein signifikantes Ergebnis erzielen, bei dem die Nullhypothese mit der Folge abgelehnt wird, dass der Park nicht gefördert wird, dann muss dafür ein linksseitiger Test durchgeführt werden. Entsprechend muss ein rechtsseitiger Test durchgeführt werden, wenn der Tourismusverband ein signifikantes Ergebnis erzielen will, bei dem die Nullhypothese mit der Folge abgelehnt wird, dass der Park möglicherweise gefördert wird.

Falls die Bürgerinitiative allerdings damit zufrieden ist, dass die Entscheidung des Ministeriums offenbleibt, kommt ihr ein rechtsseitiger Test entgegen. Sollte nämlich die Anzahl der Befürworter gesunken sein, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nullhypothese abgelehnt wird, bei einem rechtsseitigen Test sehr gering. Ist umgekehrt der Tourismusverband damit zufrieden, dass die Entscheidung des Ministeriums offenbleibt, kommt ihm ein linksseitiger Test entgegen. Sollte nämlich die Anzahl der Befürworter gestiegen sein, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nullhypothese abgelehnt wird, bei einem linksseitigen Test sehr gering.

Aufgaben

1 Es wird ein Test mit der Nullhypothese H_0 und der Gegenhypothese H_1 durchgeführt. Das Signifikanzniveau beträgt 5 %, der Stichprobenumfang ist 100. Bestimmen Sie mithilfe der Tabelle die Entscheidungsregel.

→ Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

a) $H_0: p \geq 0{,}8;\ H_1: p < 0{,}8$

k	$P_{0,8}^{100}(Z \leq k)$
70	0,011
71	0,020
72	0,034
73	0,056

b) $H_0: p \geq 0{,}4;\ H_1: p < 0{,}4$

k	$P_{0,4}^{100}(Z \leq k)$
30	0,025
31	0,040
32	0,062
33	0,091

c) $H_0: p \leq 0{,}25;\ H_1: p > 0{,}25$

k	$P_{0,25}^{100}(Z \leq k)$
30	0,896
31	0,931
32	0,955

d) $H_0: p \leq 0{,}7;\ H_1: p > 0{,}7$

k	$P_{0,7}^{100}(Z \leq k)$
76	0,924
77	0,952
78	0,971

2 Bei einem linksseitigen bzw. rechtsseitigen Test der Nullhypothese $H_0: p = p_0$ auf dem Signifikanzniveau α ist n der Stichprobenumfang und k das Stichprobenergebnis. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel und geben Sie an, ob H_0 abgelehnt wird.

a) Rechtsseitiger Test: $p_0 = \frac{2}{3};\ \alpha = 5\,\%;\ n = 100;\ k = 90$

b) Rechtsseitiger Test: $p_0 = \frac{2}{3};\ \alpha = 5\,\%;\ n = 150;\ k = 90$

c) Linksseitiger Test: $p_0 = 0{,}5;\ \alpha = 1\,\%;\ n = 125;\ k = 50$

d) Rechtsseitiger Test: $p_0 = 0{,}5;\ \alpha = 1\,\%;\ n = 250;\ k = 145$

e) Linksseitiger Test: $p_0 = 0{,}5;\ \alpha = 5\,\%;\ n = 500;\ k = 265$

3 Ein Medikament wirkt bei 75 % der Patienten, die damit behandelt werden. Nach einer Veränderung der Zusammensetzung behauptet die Herstellfirma, es wirke nun bei noch mehr Patienten. Die Nullhypothese $H_0: p \leq 0{,}75$ wird rechtsseitig auf einem Signifikanzniveau von 1 % mit einem Stichprobenumfang von 180 Patienten getestet. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.

4 Ein Unternehmen bezieht Sensoren von einer Zulieferfirma. Es ist vereinbart, dass weniger als 5 % davon fehlerhaft sind. Zur Qualitätskontrolle führt das Unternehmen einen Signifikanztest durch, wobei als Testgröße die Anzahl der fehlerhaften Sensoren in der Stichprobe gewählt wird. Es soll möglichst verhindert werden, dass eine Lieferung mit zu großem Anteil fehlerhafter Sensoren angenommen wird. Der Stichprobenumfang beträgt 200 und das Signifikanzniveau 5 %.

a) Beurteilen und diskutieren Sie, ob ein links- oder ein rechtsseitiger Signifikanztest durchgeführt werden sollte. Geben Sie die Null- und die Gegenhypothese an.

b) Bestimmen Sie die Entscheidungsregel des Tests und formulieren Sie sie in Worten.

5 Bei einer Nutzpflanze kommt es im biologischen Landbau aufgrund von Pilzbefall bei mindestens 40 % der Pflanzen zu einem Ernteausfall. Bei einer Neuzüchtung soll dieser Anteil geringer sein. Um diese Behauptung zu überprüfen, wird ein Test mit 500 Pflanzen durchgeführt, wobei die Anzahl der befallenen Pflanzen in der Stichprobe die Testgröße ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Neuzüchtung angebaut wird, obwohl der Pilzbefall nicht geringer ist, soll höchstens 5 % betragen. Beurteilen Sie, ob ein links- oder ein rechtsseitiger Signifikanztest durchgeführt werden sollte. Geben Sie die Null- und die Gegenhypothese an und ermitteln Sie die Entscheidungsregel des Tests.

Test 1

Lösungen | Seite 283

6 Alexandra hat das abgebildete Glücksrad gebaut. Yannick behauptet, die Gewinnwahrscheinlichkeit sei kleiner als 25 %. Um seine Behauptung zu überprüfen, dreht Yannick das Glücksrad 60-mal und zählt die Treffer, d. h., die Testgröße ist die Anzahl der Treffer. Damit führt Yannick einen linksseitigen Test auf dem Signifikanzniveau 5 % durch. Die Nullhypothese ist $H_0: p \geq 0{,}25$ und die Gegenhypothese $H_1: p < 0{,}25$. Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich und formulieren Sie die Entscheidungsregel in Worten.

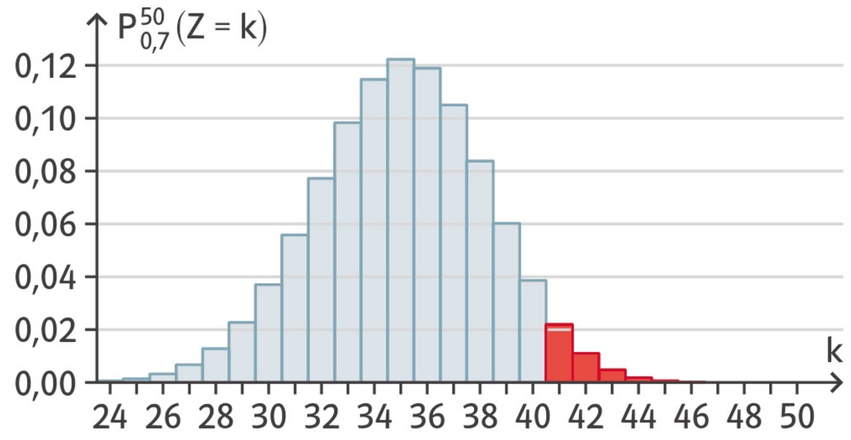
7 Es wird ein rechtsseitiger Signifikanztest auf dem Signifikanzniveau 5 % mit dem Stichprobenumfang 200 für die Nullhypothese $H_0: p = 0{,}3$ durchgeführt.

a) Lena hat berechnet, dass $P_{0{,}3}^{200}(Z = 70)$ unter 5 % liegt. Daraus schließt sie, dass ein Stichprobenergebnis von 70 Treffern zur Ablehnung der Nullhypothese führt. Erklären Sie, dass Lenas Schlussfolgerung nicht korrekt ist. Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich und folgern Sie daraus, wie man sich bei einem Stichprobenergebnis von 70 Treffern entscheiden würde.

b) Beschreiben Sie eine Anwendungssituation, in der ein solcher Test durchgeführt werden könnte.

c) Beschreiben Sie den Fehler erster Art im Sachzusammenhang, geben Sie seine Wahrscheinlichkeit an und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art für den Fall $p = 0{,}4$.

8 Das Histogramm gehört zu einer Binomialverteilung mit den Parametern $n = 50$ und $p = 0{,}7$. Der rot markierte Bereich stellt den Ablehnungsbereich eines einseitigen Signifikanztests dar. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art und formulieren Sie einen Sachverhalt, zu dem dieser Test passt.



9 Ein Medikament A heilt eine Krankheit bei 85 % der Patientinnen und Patienten. Ein konkurrierender Arzneimittelhersteller behauptet, dass sein Medikament B noch besser wirke, und führt eine Testreihe an 108 Patientinnen und Patienten durch.
Ermitteln Sie unter Verwendung einer geeigneten Software, bei wie vielen Patientinnen und Patienten das Medikament B die Krankheit mindestens heilen müsste, damit man auf einem Signifikanzniveau von 5 % bzw. 1 % bzw. 0,1 % bei Medikament B von einer besseren Wirkung als bei Medikament A ausgehen kann.

10 Ein Unternehmen bezieht Bauteile für seine Produktion von einer Zulieferfirma. Zwischen den beiden ist vereinbart, dass maximal 3 % der gelieferten Bauteile defekt sein dürfen. Beide überprüfen dies durch einseitige Signifikanztests, wobei sie aus jeder Lieferung eine Stichprobe untersuchen.
Beurteilen und diskutieren Sie ausgehend von den unterschiedlichen Interessen, ob beide den gleichen Test durchführen sollen oder ob der eine links- und der andere rechtsseitig testen soll.

11 Testen Sie in Ihrem Kurs die Hypothese „Ein-Euro-Münzen zeigen beim Münzwurf mit 50 % Wahrscheinlichkeit Kopf als Ergebnis“ gegen die Hypothese „Ein-Euro-Münzen zeigen beim Münzwurf bevorzugt das Ergebnis Kopf“ auf dem Signifikanzniveau 5 %. Lassen Sie dazu jede Kursteilnehmerin bzw. jeden Kursteilnehmer 10-mal eine Ein-Euro-Münze werfen und fassen Sie die Ergebnisse aller Kursteilnehmerinnen und Kursteilnehmer als eine Stichprobe zusammen.

Wo bleibt der faire Zufall?

Skandalös: Euromünze zeigt häufiger Kopf als Zahl

Die *Süddeutsche Zeitung* hat es mit einem spektakulären Selbsttest ans Tageslicht gezerrt: Die deutschen Ein-Euro-Münzen versagen angeblich beim bewährten „Kopf-oder-Zahl-Spiel“. Von 250 Würfen brachten 141 das Ergebnis „Kopf“ und nur 109-mal schillerte die Zahl. Das kann doch nicht wahr sein, dachten wir, und wiederholten das Experiment – mit der gleichen erschreckenden Tendenz: 135-mal kam der Adler und 115-mal die Zahl. Nicht auszudenken, wie leicht sich mit diesem Wissen alle möglichen Spiele manipulieren ließen. Dumm wären Mannschaftskapitäne beim Fußball, wenn sie nicht stets beim Eurowurf vor dem Anpfiff auf den grimmig schauenden Geier setzten. Die Chance, sich den Anstoß oder die beliebtere Spielrichtung für die erste oder zweite Halbzeit zu sichern, steigt mit der überdurchschnittlichen Kopf-Rate. Oder die Tennisspielerin wählt zuerst die Schattenseite des Platzes, weil bis zum Wechsel auf die andere Platzhälfte die ärgste Hitze vorüber ist. Vielleicht startet auch jemand eine „Initiative für fairen Zufall“ und bringt zum Glückswurf wieder eine Deutsche Mark ins Spiel. Die sollte sich schließlich strikt an die Wahrscheinlichkeitstheorie halten. Oder haben die Journalisten jahrzehntelang noch einen anderen Skandal verschlafen?

Lutz Kosbach

12 In einem Zeitungsartikel wird berichtet, dass 46 % der motorisierten Zweiradfahrer ergänzend zum Helm Schutzbekleidung tragen. Ein Motorradclub behauptet, dass der Anteil der Motorradfahrer mit Schutzbekleidung in Wirklichkeit höher sei. Die Polizei meint dagegen, dass der Anteil in Wirklichkeit kleiner sei.
Es wird ein Test der Nullhypothese $H_0: p = 0{,}46$ (Stichprobenumfang 200; Signifikanzniveau 5 %) durchgeführt.

a) Geben Sie an, von welcher Gegenhypothese H_1 der Motorradclub bzw. die Polizei ausgeht, und bestimmen Sie jeweils den dazugehörigen Ablehnungsbereich.

b) Die Stichprobe ergibt, dass 107 Fahrer Schutzbekleidung tragen. Ermitteln Sie, wie die Entscheidung des Motorradclubs bzw. der Polizei ausfällt.

13 **Abiturprüfung 2018 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, daraus Teilaufgaben 1 b) und c)**
Ein Unternehmen stellt Kunststoffteile her. Erfahrungsgemäß sind 4 % der hergestellten Teile fehlerhaft. Die Anzahl fehlerhafter Teile unter zufällig ausgewählten kann als binomialverteilt angenommen werden.
Die Kunststoffteile werden aus Kunststoffgranulat hergestellt. Nach einem Wechsel des Granulats vermutet der Produktionsleiter, dass sich der Anteil der fehlerhaften Teile reduziert hat. Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, ob die Vermutung gerechtfertigt ist, soll die Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Teile beträgt mindestens 4 %." auf der Grundlage einer Stichprobe von 200 Teilen auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden.

a) Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

b) Das neue Granulat ist teurer als das vorherige. Geben Sie an, welche Überlegung zur Wahl der Nullhypothese geführt haben könnte, und begründen Sie Ihre Angabe.

14 Die Nullhypothese $H_0: p_0 = 0{,}6$ soll bei einem Stichprobenumfang $n = 50$ auf dem Signifikanzniveau 5 % linksseitig getestet werden.

a) Bestimmen Sie die Entscheidungsregel für diesen Signifikanztest.

b) 💻 Erstellen Sie mithilfe einer geeigneten Software ein Histogramm, das die Wahrscheinlichkeit des Fehlers erster Art darstellt, und ein weiteres, das die Wahrscheinlichkeit des Fehlers zweiter Art darstellt, falls $p = 0{,}5$ $(0{,}4;\ 0{,}25)$ ist.

c) Beschreiben Sie die Unterschiede, die sich in Ihren Histogrammen aus Teilaufgabe b) für das Signifikanzniveau 1 % bei gleichem Stichprobenumfang $n = 50$ ergeben würden.

d) 💻 Fertigen Sie zum Vergleich je ein Histogramm für das Signifikanzniveau 5 % bei dem Stichprobenumfang $n = 100$ an und beschreiben Sie die Unterschiede.

15 **Abiturprüfung 2013 (Bayern), Stochastik, Aufgabengruppe II, Aufgabe 2**
In einer Großstadt steht die Wahl des Oberbürgermeisters bevor. […] Vor Beginn des Wahlkampfs wird eine repräsentative Umfrage unter den Wahlberechtigten durchgeführt. […]
Der Umfrage zufolge hätte der Kandidat der Partei A etwa 50 % aller Stimmen erhalten, wenn die Wahl zum Zeitpunkt der Befragung stattgefunden hätte. Ein Erfolg im ersten Wahlgang, für den mehr als 50 % aller Stimmen erforderlich sind, ist demnach fraglich. Deshalb rät die von der Partei A eingesetzte Wahlkampfberaterin in der Endphase des Wahlkampfs zu einer zusätzlichen Kampagne. Der Schatzmeister der Partei A möchte die hohen Kosten, die mit einer zusätzlichen Kampagne verbunden wären, jedoch möglichst vermeiden.

a) Um zu einer Entscheidung über die Durchführung einer zusätzlichen Kampagne zu gelangen, soll die Nullhypothese „Der Kandidat der Partei A würde gegenwärtig höchstens 50 % aller Stimmen erhalten." mithilfe einer Stichprobe von 200 Wahlberechtigten auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

b) Begründen Sie, dass die Wahl der Nullhypothese für den beschriebenen Test in Einklang mit dem Anliegen der Wahlkampfberaterin steht, einen Erfolg bereits im ersten Wahlgang zu erreichen.

16 Der Bürgermeister einer Stadt plant, den Bau eines Fußballstadions zu bezuschussen, wenn mindestens 65 % der Bürgerinnen und Bürger zustimmen. Die Stadtverwaltung behauptet, dass dies der Fall ist. Eine Bürgerinitiative glaubt dagegen, dass der tatsächliche Prozentsatz der Befürworter weniger als 65 % beträgt. Zur Überprüfung der Behauptungen wird ein Signifikanztest der Nullhypothese $H_0: p = 0{,}65$ auf dem Signifikanzniveau 5 % mit dem Stichprobenumfang $n = 600$ durchgeführt.

a) Erläutern Sie, wie die Stadtverwaltung testet, und ermitteln Sie, bei welchen Ergebnissen sie sich bestätigt sieht.

b) Erläutern Sie, wie die Bürgerinitiative testet, und ermitteln Sie, bei welchen Ergebnissen sie sich bestätigt sieht.

c) Bestimmen Sie, bei welchen Stichprobenergebnissen weder die Stadtverwaltung noch die Bürgerinitiative jeweils ihre Nullhypothese verwerfen kann.

Test 2

→ Lösungen | Seite 283

17 **Abiturprüfung 2015 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 2**

Eine der Filialen der Handelskette befindet sich in einem Einkaufszentrum, das zu Werbezwecken die Erstellung einer Smartphone-App in Auftrag geben will. Diese App soll die Kunden beim Betreten des Einkaufszentrums über aktuelle Angebote und Rabattaktionen der beteiligten Geschäfte informieren. Da dies mit Kosten verbunden ist, will der Finanzchef der Handelskette einer Beteiligung an der App nur zustimmen, wenn mindestens 15 % der Kunden der Filiale bereit sind, diese App zu nutzen. Der Marketingchef warnt jedoch davor, auf eine Beteiligung an der App zu verzichten, da dies zu einem Imageverlust führen könnte.
Um zu einer Entscheidung zu gelangen, will die Geschäftsführung der Handelskette eine der beiden folgenden Nullhypothesen auf der Basis einer Befragung von 200 Kunden auf einem Signifikanzniveau von 10 % testen:

I „Weniger als 15 % der Kunden sind bereit, die App zu nutzen."
II „Mindestens 15 % der Kunden sind bereit, die App zu nutzen."

a) Nach Abwägung der möglichen Folgen, die der Finanzchef und der Marketingchef aufgezeigt haben, wählt die Geschäftsführung für den Test die Nullhypothese II. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

b) Entscheiden Sie, ob bei der Abwägung, die zur Wahl der Nullhypothese II führte, die Befürchtung eines Imageverlusts oder die Kostenfrage als schwerwiegender erachtet wurde. Erläutern Sie Ihre Entscheidung.

Hinweis:
Die Handelskette, von der in Aufgabe 17 die Rede ist, ist Gegenstand einer anderen Aufgabe.

18 Für ein neues Medikament soll getestet werden, ob die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer unerwünschten Nebenwirkung maximal 8 % beträgt. Testgröße ist die Anzahl der Fälle in der Stichprobe, bei denen eine solche Nebenwirkung auftritt. Beurteilen Sie die Aussage.

a) Zum Wohle der Patientinnen und Patienten sollte man linksseitig testen.

b) Wenn man beim Testen ganz sicher gehen möchte, sollte man als Signifikanzniveau 0 % wählen.

c) Als Nullhypothese H_0 muss entweder $p \leq 0{,}08$ oder $p \geq 0{,}08$ verwendet werden.

d) Man sollte als Signifikanzniveau 8 % wählen. Dann beträgt nämlich die Wahrscheinlichkeit für eine unerwünschte Nebenwirkung maximal 8 %.

Grundwissen Test

→ Lösungen | Seite 283

G 19 Gegeben ist die gebrochen-rationale Funktion f mit maximaler Definitionsmenge D. Geben Sie D und die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f an.

→ Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

a) $f: x \mapsto -\frac{3}{x+5}$ **b)** $f: x \mapsto \frac{1}{x^2} + 2$ **c)** $f: x \mapsto \frac{2x+3}{4x-1}$ **d)** $f: z \mapsto \frac{z^2-4}{z^2+9}$

e) $f: x \mapsto -3x + 2 + \frac{2}{2x-5}$ **f)** $f: x \mapsto \frac{3x^2}{(x+3)(x-1)}$ **g)** $f: t \mapsto \frac{3t^2}{t^2-2} - 1$ **h)** $f: x \mapsto \frac{3x+1}{(2x-2)^2}$

Wiederholen

1 Die Nullhypothese H_0 wird gegen die Gegenhypothese H_1 mit dem Stichprobenumfang n auf dem Signifikanzniveau α getestet. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.

a) $H_0: p \geq 0{,}3;\ H_1: p < 0{,}3;\ n = 200;\ \alpha = 5\%$

b) $H_0: p \leq 0{,}8;\ H_1: p > 0{,}8;\ n = 500;\ \alpha = 8\%$

c) $H_0: p = \frac{2}{3};\ H_1: p > \frac{2}{3};\ n = 100;\ \alpha = 10\%$

d) $H_0: p = \frac{1}{5};\ H_1: p < \frac{1}{5};\ n = 80;\ \alpha = 1\%$

2 Es wird ein rechtsseitiger Test mit der Nullhypothese $H_0: p \leq 0{,}25$ durchgeführt. Das Signifikanzniveau beträgt 5 % und der Stichprobenumfang ist 100.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit α' für den Fehler erster Art. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit β' für den Fehler zweiter Art, falls die tatsächliche Wahrscheinlichkeit den angegebenen Wert hat. Veranschaulichen Sie α' und β' jeweils in einem Histogramm mithilfe einer geeigneten Software.

a) $p = 0{,}3$ **b)** $p = 0{,}35$ **c)** $p = 0{,}4$ **d)** $p = 0{,}5$

3 Bestimmen Sie bei einem rechtsseitigen Test bzw. linksseitigen Test auf dem Signifikanzniveau α mit dem Stichprobenumfang n den kritischen Bereich und die Wahrscheinlichkeit des Fehlers erster Art der Nullhypothese $H_0: p = 0{,}5$.

a) Linksseitiger Test: $n = 100;\ \alpha = 5\%$

b) Rechtsseitiger Test: $n = 100;\ \alpha = 5\%$

c) Linksseitiger Test: $n = 200;\ \alpha = 5\%$

d) Rechtsseitiger Test: $n = 200;\ \alpha = 1\%$

4 Die Nullhypothese $H_0: p = 0{,}5$ soll bei einem Stichprobenumfang $n = 25$ auf dem Signifikanzniveau 5 % rechtsseitig getestet werden.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art, falls die tatsächliche Wahrscheinlichkeit den Wert $p = 0{,}6$ $(0{,}75;\ 0{,}9)$ hat.

c) Bestimmen Sie, welche Wahrscheinlichkeiten man in den Teilaufgaben a) und b) für das Signifikanzniveau 1 % bei dem Stichprobenumfang $n = 25$ erhält.

d) Bestimmen Sie, welche Wahrscheinlichkeiten man in den Teilaufgaben a) und b) für das Signifikanzniveau 5 % bei dem Stichprobenumfang $n = 100$ erhält.

Vertiefen

5 Bei Kayas Lieblingsbonbons sind fünf Sorten in einer Tüte. Obwohl auf der Packung steht, dass die Anteile der fünf Sorten gleich sind, ist Kaya überzeugt, dass generell mehr Ananasbonbons in den Tüten sind.
Dies will sie mit einem Signifikanztest überprüfen, bei dem die Aussage auf der Packung als Nullhypothese dient und ihre Vermutung als Gegenhypothese. Das Signifikanzniveau ist 5 % und als Stichprobe nimmt Kaya 130 Bonbons.

a) Geben Sie die Testgröße an und notieren Sie die Nullhypothese und die Gegenhypothese mathematisch.

b) Handelt es sich bei dem gegebenen Test um einen linksseitigen oder um einen rechtsseitigen Test? Begründen Sie Ihre Aussage.

c) Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel, beschreiben Sie den Fehler erster Art im Sachzusammenhang und bestimmen Sie seine Wahrscheinlichkeit.

d) In Kayas Stichprobe sind 35 Ananasbonbons. Beschreiben Sie, wie sie sich daraufhin entscheiden wird.

6 Wahr oder falsch? Begründen Sie.

a) Verwerfen der Nullhypothese bedeutet, dass die Nullhypothese falsch ist.

b) Wenn bei einem einseitigen Signifikanztest das Stichprobenergebnis in den nichtkritischen Bereich fällt, ist die Nullhypothese wahr.

c) Lehnt man die Nullhypothese ab, ist bewiesen, dass die Gegenhypothese wahr ist.

d) Wenn bei einem einseitigen Signifikanztest das Stichprobenergebnis in den Ablehnungsbereich fällt, kann die Nullhypothese nicht gelten.

e) Wenn man zweimal nacheinander den gleichen Signifikanztest durchführt, kann es sein, dass man unterschiedlich entscheidet.

7 Lord Timetea behauptet, am Geschmack feststellen zu können, ob in eine Tasse der Tee auf den Zucker gegossen oder umgekehrt der Zucker in den Tee gerührt worden ist. Bei 20 Versuchen entscheidet er 13-mal richtig.

a) Geben Sie die Null- und die Gegenhypothese an, bestimmen Sie den kritischen Bereich bei einem Signifikanzniveau von 5% und geben Sie an, wie in diesem Fall entschieden wird.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art, wenn der Lord die Reihenfolge tatsächlich in 60% (70%; 80%; 90%) der Versuche richtig erkennt.

8 Davina behauptet, dass sie rote Fruchtsaftminibären am Geschmack erkennen könne. Samantha führt mit ihr einen Test durch. Davina bekommt mit verbundenen Augen nacheinander 15 Minibären und muss sagen, ob diese rot sind oder nicht.

a) Geben Sie die Null- und Gegenhypothese an, die der Zielsetzung des Tests entsprechen. Formulieren Sie die Entscheidungsregel des Tests, wenn das Signifikanzniveau 5% gewählt wird.

b) Beschreiben Sie die Fehler erster und zweiter Art im Sachzusammenhang.

9 Elena und Sophia streiten sich beim Würfelspiel. Elena würfelt mit ihrem Würfel häufig die Sechs und Sophia vermutet deshalb, dass Elenas Würfel gezinkt sei und die Sechs mit höherer Wahrscheinlichkeit als die anderen Zahlen erscheint; Elena bestreitet das. Zur Überprüfung wollen sie einen Signifikanztest durchführen.

a) Diskutieren Sie, inwiefern sich Null- und Gegenhypothese des Signifikanztests unterscheiden würden, je nachdem, ob man von Elenas oder von Sophias Standpunkt ausgeht.

b) Geben Sie gemeinsam eine Testgröße an und legen Sie ein Signifikanzniveau fest. Vereinbaren Sie, wer Elenas und wer Sophias Standpunkt einnimmt, und geben Sie dann jeweils die Null- und die Gegenhypothese sowie die Entscheidungsregel an.

c) Bestimmen Sie jeweils für Ihren Test, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass Elena zu Unrecht beschuldigt wird, einen gezinkten Würfel zu verwenden.

10 Eine Firma hat eine Werbeagentur beauftragt, durch eine Kampagne den Bekanntheitsgrad ihres Produktes von aktuell 30% auf 40% zu steigern. Bei Erfolg der Kampagne wird der Agentur eine Bonuszahlung in Aussicht gestellt.

a) Der Firmenchef beauftragt Sie, einen Test für das Signifikanzniveau 5% und den Stichprobenumfang 100 zu entwickeln. Schlagen Sie ihm eine Entscheidungsregel vor und begründen Sie diese.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art und vergleichen Sie sie mit dem Signifikanzniveau.

c) Erläutern Sie ohne Rechnung, was sich ändern würde, wenn man beim Signifikanzniveau 5% bleibt, aber den Stichprobenumfang von 100 auf 400 vervierfachen würde.

d) Der von der Werbeagentur beauftragte Statistiker schlägt vor, als Nullhypothese $H_0: p = 0{,}4$ zu wählen und H_0 zugunsten von $H_1: p = 0{,}3$ erst dann zu verwerfen, wenn von den 100 Befragten 33 oder weniger das Produkt nicht kennen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art dieses Tests. Begründen Sie, dass die Werbeagentur dieses Verfahren wählt.

11 Nach Umstellung im Produktionsgang eines Werkstücks vermutet der Hersteller, den Ausschussanteil auf höchstens 3 % reduziert zu haben, was an 500 Werkstücken überprüft werden soll.

a) Erläutern Sie, worauf beim Ziehen der Stichprobe geachtet werden muss.

b) Formulieren Sie aus Sicht eines Kunden eine sinnvolle Nullhypothese und die Gegenhypothese und geben Sie an, ob es sich um einen links- oder rechtsseitigen Test handelt.

c) Geben Sie den Ablehnungsbereich für das Signifikanzniveau 5 % an. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art und für den Fehler zweiter Art, wenn in Wirklichkeit der Ausschussanteil 2 % (1 %) beträgt.

12 Bei einem Würfel wird vermutet, dass die Sechs nicht mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ fällt. Man führt einen Signifikanztest mit der Nullhypothese $H_0: p = \frac{1}{6}$ auf einem Signifikanzniveau von 5 % durch. Das Stichprobenergebnis liegt im Ablehnungsbereich. Beurteilen Sie die Aussage: „Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Würfel in Ordnung ist, beträgt höchstens 5 %."

13 Ein Unternehmen kauft elektronische Schalter von einer Zulieferfirma ein, mit der vereinbart ist, dass mindestens 98 % der gelieferten Schalter fehlerfrei funktionieren müssen. Ein Mitarbeiter des Unternehmens unterzieht die neueste Lieferung wie üblich stichprobenartig einer Kontrolle. Dazu nutzt er einen Signifikanztest auf einem Signifikanzniveau von 5 %. Als Nullhypothese dient: „Mindestens 98 % der gelieferten Schalter funktionieren fehlerfrei." Der Mitarbeiter teilt seinem Abteilungsleiter mit, dass das Stichprobenergebnis im Ablehnungsbereich des Tests liege, und rät, die Lieferung zurückzuschicken. Sein Abteilungsleiter sagt: „Du musst dich irren! Wir haben bei dieser Lieferung alle Schalter überprüft. Es funktionieren sogar 99 % fehlerfrei." Der Mitarbeiter meint, dass er sich trotzdem nicht irren muss. Beurteilen Sie, ob er recht haben kann.

Vernetzen

14 Von einer Urne ist bekannt, dass sie entweder doppelt so viele blaue wie weiße Kugeln (Fall 1) oder doppelt so viele weiße Kugeln wie blaue Kugeln (Fall 2) enthält. Man zieht aus der Urne 25-mal mit Zurücklegen.

a) Berechnen Sie jeweils für beide Fälle die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als die Hälfte bzw. weniger als die Hälfte der gezogenen Kugeln weiß ist.

b) Geben Sie an, für welchen der beiden Fälle Sie sich entscheiden würden, wenn sich in der Stichprobe 15 weiße Kugeln zeigen, und begründen Sie Ihre Antwort.

c) Geben Sie eine Testgröße an und formulieren Sie eine Entscheidungsregel. Geben Sie an, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass Sie sich dabei falsch entscheiden.

d) Begründen Sie, dass es für dieses Beispiel nicht sinnvoll ist, eine Null- und eine Gegenhypothese zu formulieren.

15 Eine Computerfirma bezieht Speicherchips, von denen erfahrungsgemäß 20 % defekt sind.

a) 💻 Bestimmen Sie mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms, wie viele Speicherchips man mindestens untersuchen muss, um mit mehr als 99 % Wahrscheinlichkeit mindestens drei defekte zu finden.

b) Nach einer Veränderung im Produktionsprozess hat der Hersteller der Chips die Vermutung, dass weniger als 20 % der Chips defekt sind. Er will seine Vermutung durch eine Stichprobe vom Umfang 500 auf dem Signifikanzniveau 2 % testen. Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich.

c) Der Chip-Hersteller untersucht ein paar Monate später eine neue Stichprobe von 500 Chips. Dabei findet er 65 defekte Chips, die restlichen 435 Chips sind einwandfrei. Zeigen Sie, dass man bei diesem Ergebnis die Nullhypothese $H_0: p \leq 0{,}85$ für die Wahrscheinlichkeit, einen intakten Chip zu erhalten, zugunsten der Gegenhypothese $H_1: p > 0{,}85$ nicht verwerfen würde, wenn ein Signifikanzniveau von 2 % gewählt wird.

d) 💻 Ermitteln Sie eine möglichst große Wahrscheinlichkeit p_0 für die Nullhypothese aus Teilaufgabe c), sodass sie bei gleichem Signifikanzniveau von 2 % gerade noch verworfen werden kann. Bewerten Sie diese Vorgehensweise bei der Durchführung eines Tests.

Der Chi-Quadrat-Vierfeldertest

Zur Erinnerung: Stochastische Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B werden als **stochastisch unabhängig** bezeichnet, wenn das Eintreten von A keinen Einfluss auf das Eintreten von B hat und umgekehrt. Für zwei stochastisch unabhängige Ereignisse A und B gilt $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$.

Trägt man in eine **Vierfeldertafel** die zu den stochastisch unabhängigen Ereignissen A und B gehörigen Wahrscheinlichkeiten ein, so erhält man eine **Multiplikationstafel**, d.h., die Einträge der inneren Felder sind das Produkt aus den Randfeldern.

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A) \cdot P(B)$	$P(A) \cdot P(\overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A}) \cdot P(B)$	$P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$	$P(\overline{A})$
	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Testen auf Unabhängigkeit zweier Ereignisse

Häufig kennt man die Wahrscheinlichkeiten zweier Ereignisse nicht, dennoch möchte man eine Aussage darüber treffen, ob sie vermutlich unabhängig sind oder nicht. In solchen Fällen kann man einen Test durchführen und in die Vierfeldertafel die relativen oder absoluten Häufigkeiten eintragen, die sich bei dem Test ergeben.

Beispielsweise soll die Wirksamkeit eines neuen Medikaments untersucht werden. Dazu erhalten 87 zufällig ausgewählte Patientinnen und Patienten das neue Medikament und 108 zufällig ausgewählte Patienten ein Placebo, wobei weder die Patientinnen und Patienten noch die behandelnden Ärztinnen und Ärzte wissen, wer das Medikament und wer das Placebo einnimmt (Doppelblindstudie). Anschließend wird erfasst, wie viele Patientinnen und Patienten jeweils nach einer bestimmten Zeit genesen.

Ein Placebo ist ein Präparat, das in einer für Medikamente üblichen Darreichungsform hergestellt wird, jedoch keine wirksamen Inhaltsstoffe besitzt.

Man betrachtet die Ereignisse A: „Der Patient hat das Medikament bekommen“ und B: „Der Patient ist genesen“ und erhält nebenstehende Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten.

	B	$\overline{B}$	
A	60	27	87
$\overline{A}$	67	41	108
	127	68	195

Würde man die zugehörigen relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretieren, ergäbe sich gemäß der Definition, dass A und B stochastisch abhängig sind, denn es gilt $\frac{127}{195} \cdot \frac{87}{195} \neq \frac{60}{195}$. Andererseits ist der beobachtete Unterschied nicht groß $\left(\frac{127}{195} \cdot \frac{87}{195} \approx 0{,}291 \text{ im Vergleich zu } \frac{60}{195} \approx 0{,}308\right)$ und könnte durch Zufall entstanden sein.

Nullhypothese, Gegenhypothese und Testgröße

Um zu vermeiden, dass ein Medikament auf den Markt gelangt, das in Wirklichkeit nur so gut wirkt wie ein Placebo, wählt man als Nullhypothese H_0: „A und B sind stochastisch unabhängig.“ Damit lautet die Gegenhypothese H_1: „A und B sind stochastisch abhängig.“

Zur Bestimmung einer Testgröße berechnet man zunächst die Häufigkeiten, die man im Falle der Unabhängigkeit von A und B erwarten würde, d.h., man füllt die Vierfeldertafel so, dass sich bei gleichbleibenden Einträgen in den Randfeldern eine Multiplikationstabelle für die relativen Häufigkeiten ergibt.

Beachten Sie, dass die Hypothesen keine Aussagen über die tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ bzw. $P(B)$ enthalten.

	B	$\overline{B}$	
A	$\approx 56{,}66$	$\approx 30{,}34$	87
$\overline{A}$	$\approx 70{,}34$	$\approx 37{,}66$	108
	127	68	195

Als ein Maß für die Abweichung der beobachteten Häufigkeiten von den erwarteten berechnet man den folgenden Term: $\chi^2 = \frac{(60 - 56{,}66)^2}{56{,}66} + \frac{(67 - 70{,}34)^2}{70{,}34} + \frac{(27 - 30{,}34)^2}{30{,}34} + \frac{(41 - 37{,}66)^2}{37{,}66} \approx 1{,}02$.

Dieser Term bildet die Testgröße; sie wird mit χ^2 bezeichnet (sprich: „Chi-Quadrat“). Durch das Quadrieren der Differenzen werden negative Werte vermieden.

Chi ist der 22. Buchstabe des griechischen Alphabets. Der Kleinbuchstabe Chi wird χ geschrieben.

Je größer χ^2 ist, desto größer ist die Abweichung der beobachteten Häufigkeiten von den für den Fall der Unabhängigkeit erwarteten Häufigkeiten, d.h., die Nullhypothese wird verworfen, wenn χ^2 einen bestimmten Wert überschreitet. Dieser Wert wird in der Entscheidungsregel festgelegt.

Bestimmen der Entscheidungsregel

Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Signifikanztests, bei denen die Testgröße Z binomialverteilt und somit nur ganzzahlig ist, kann χ^2 beliebige (nichtnegative) Werte annehmen. Man kann zeigen, dass χ^2 dennoch eine (stetige) Wahrscheinlichkeitsverteilung bildet, die es erlaubt, jedem Wert von χ^2 eine (kumulative) Wahrscheinlichkeit zuzuordnen.
Beispielsweise beträgt für $\chi^2 = 3{,}84$ die entsprechende (kumulative) Wahrscheinlichkeit $p \approx 0{,}950$, d. h., überschreitet χ^2 den Wert von 3,84, kann die Nullhypothese auf einem Signifikanzniveau von 5 % verworfen werden. Überschreitet χ^2 den Wert von 6,63, kann die Nullhypothese sogar auf einem Signifikanzniveau von 1 % verworfen werden.
Die zu einem bestimmten Wert von χ^2 gehörende (kumulative) Wahrscheinlichkeit p lässt sich z. B. mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms ermitteln (vgl. Aufgabe 1e)). Die Wahrscheinlichkeit α' des Fehlers erster Art ergibt sich dann aus $p = 1 - \alpha'$. Für $\chi^2 = 1{,}02$ im Beispiel oben erhält man $\alpha' \approx 31{,}3\,\%$. Demnach wird in diesem Beispiel die Nullhypothese wohl nicht verworfen.

Mehr zu stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen lernen Sie in Jahrgangsstufe 13.

Allgemeine Formel zur Berechnung von χ^2

Schreibt man die beobachteten Häufigkeiten allgemein (linke Tabelle), lassen sich daraus die erwarteten Häufigkeiten im Falle der Unabhängigkeit von A und B ableiten (rechte Tabelle).

	B	$\overline{B}$	
A	a	b	a + b
$\overline{A}$	c	d	c + d
	a + c	b + d	n = a + b + c + d

	B	$\overline{B}$	
A	$h_a = \frac{(a+b)(a+c)}{n}$	$h_b = \frac{(a+b)(b+d)}{n}$	a + b
$\overline{A}$	$h_c = \frac{(c+d)(a+c)}{n}$	$h_d = \frac{(c+d)(b+d)}{n}$	c + d
	a + c	b + d	n

χ^2 eignet sich nur unter bestimmten Voraussetzungen als Testgröße. Als Faustregel wird oft angegeben, dass $n > 30$ und h_a, h_b, h_c sowie h_d jeweils größer 5 sein sollten.

Damit lässt sich die Formel zur Berechnung der Testgröße χ^2 allgemein schreiben:

$$\chi^2 = \frac{(a - h_a)^2}{h_a} + \frac{(b - h_b)^2}{h_b} + \frac{(c - h_c)^2}{h_c} + \frac{(d - h_d)^2}{h_d}.$$

1 Es soll getestet werden, ob eine bestimmte Sonnenblumensorte in kalkhaltigem Boden besser wächst als in normalem Boden. Dazu werden 386 Samen in kalkhaltigem Boden und 439 Samen in normalem Boden ausgebracht. Nach einer bestimmten Zeit wachsen im kalkhaltigen Boden 275 Sonnenblumen gut und im normalen Boden 284 Sonnenblumen.

a) Formulieren Sie aus dem Sachzusammenhang zwei Ereignisse A und B und geben Sie die Null- und die Gegenhypothese des Tests an.

b) Erstellen Sie eine Vierfeldertafel mit den beobachteten Häufigkeiten.

c) Erstellen Sie eine zweite Vierfeldertafel mit den gleichen Werten in den Randfeldern wie in Teilaufgabe b) und den Häufigkeiten, die man im Falle der Unabhängigkeit von A und B erwarten würde.

d) Berechnen Sie χ^2 und geben Sie an, ob die Nullhypothese auf einem Signifikanzniveau von 5 % bzw. 1 % verworfen werden kann. (Vergleichen Sie hierzu den Abschnitt „Bestimmen der Entscheidungsregel“ auf dieser Seite bzw. die Tabelle auf dem Rand.)

e) Bestimmen Sie mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms die zu χ^2 gehörende (kumulative) Wahrscheinlichkeit. Verwenden Sie dazu die Funktion CHIQU.VERT. Berechnen Sie daraus die Wahrscheinlichkeit α' für den Fehler erster Art und überprüfen Sie, ob Ihr Ergebnis im Einklang mit Ihrer Antwort zu Teilaufgabe d) steht.

f) Verwenden Sie die Funktion CHIQU.TEST, um α' unmittelbar aus den beobachteten und den erwarteten Häufigkeiten zu berechnen.

(Kumulative) Wahrscheinlichkeit p in Abhängigkeit von χ^2:

χ^2	p
2,71	0,900
3,84	0,950
6,63	0,990
10,83	0,999

Hinweis zu Aufgabe 1e): CHIQU.VERT erwartet u. a. die Eingabe der Freiheitsgrade. Der Vierfeldertest hat einen Freiheitsgrad; an dieser Stelle muss also 1 eingegeben werden.

2 Vergleichen Sie den Chi-Quadrat-Vierfeldertest mit dem (einseitigen) Signifikanztest aus diesem Kapitel. Nennen und erläutern Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede der beiden Tests.

3 Zeigen Sie, dass die oben aufgeführte Formel zur allgemeinen Berechnung von χ^2 umgeformt werden kann zu $\chi^2 = \frac{n \cdot (a \cdot d - b \cdot c)^2}{(a+b) \cdot (c+d) \cdot (a+c) \cdot (b+d)}$.

Rückblick

Testen von Hypothesen

Zu einem Sachverhalt werden zwei sich ausschließende Hypothesen betrachtet: die **Nullhypothese** H_0 und die **Gegenhypothese** H_1.
Die Anzahl der Treffer einer **Stichprobe** mit festgelegter Länge bildet die **Testgröße**. Der Wertebereich der Testgröße wird in den **kritischen Bereich** K (**Ablehnungsbereich**) und den **nichtkritischen Bereich** $\overline{K}$ zerlegt. Liegt der durch die Stichprobe gewonnene Wert der Testgröße in K, dann wird H_0 verworfen, ansonsten wird H_0 nicht verworfen (**Entscheidungsregel**).

Einen Hypothesentest mit einem kritischen Bereich K, der aus einem einzigen Intervall besteht, bezeichnet man als **einseitigen Hypothesentest**.

Fehler beim Testen von Hypothesen:

	H_0 ist wahr.	H_0 ist falsch.
H_0 wird abgelehnt.	Fehler erster Art	Richtig
H_0 wird nicht abgelehnt.	Richtig	Fehler zweiter Art

Die **Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art** wird mit α′ bezeichnet.
Die **Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art** wird mit β′ bezeichnet. Man kann β′ nur berechnen, wenn für die Testgröße eine bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung und damit ein bestimmter Wert für p angenommen wird.

Bei festem Stichprobenumfang n bewirkt eine Verkleinerung von β′ durch Vergrößerung des Ablehnungsbereichs K zwangsläufig eine Vergrößerung von α′ und umgekehrt.
Eine Verringerung beider Fehlerwahrscheinlichkeiten ist nur durch Erhöhung des Stichprobenumfangs möglich.

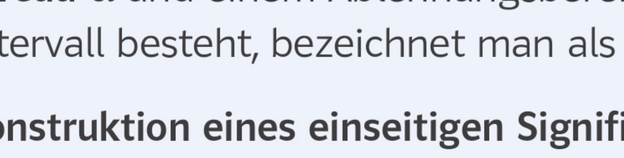
Einen Hypothesentest mit einem zuvor festgelegten **Signifikanzniveau α** und einem Ablehnungsbereich K, der aus einem einzigen Intervall besteht, bezeichnet man als **einseitigen Signifikanztest**.

Konstruktion eines einseitigen Signifikanztests:

1. Festlegen der Testgröße Z und des Stichprobenumfangs n.
2. Mathematische Formulierung der Nullhypothese H_0 und der Gegenhypothese H_1.
3. Festlegen des Signifikanzniveaus α gemäß der in der Anwendungssituation maximal tolerierten Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art.
4. Bestimmen der Entscheidungsregel, d.h. Konstruktion des Ablehnungsbereichs K.

Linksseitiger Test:

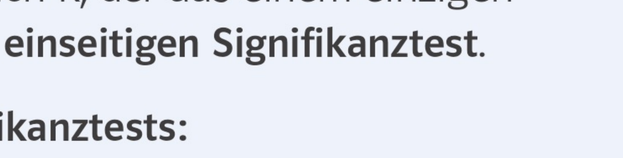
$H_0: p = p_0$ (oder $p \geq p_0$)
$H_1: p < p_0$
Ablehnungsbereich:
$K = \{0; 1; \ldots; g\}$



g ist die größte natürliche Zahl mit $\alpha' = P^n_{p_0}(Z \leq g) \leq \alpha$.

Rechtsseitiger Test:

$H_0: p = p_0$ (oder $p \leq p_0$)
$H_1: p > p_0$
Ablehnungsbereich:
$K = \{g; g + 1; \ldots; n\}$

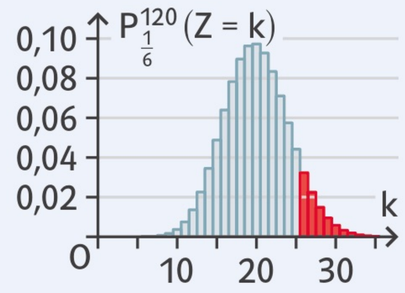


g ist die kleinste natürliche Zahl mit $\alpha' = P^n_{p_0}(Z \geq g) \leq \alpha$.

Anhand des Ergebnisses von 120 Würfen soll entschieden werden, ob ein Würfel so manipuliert wurde, dass er zu viele Sechsen liefert.
Länge der Stichprobe: $n = 120$.
Testgröße Z: „Anzahl der gewürfelten Sechsen bei diesen 120 Würfen."
Hypothesen: $H_0: p = \frac{1}{6}$; $H_1: p > \frac{1}{6}$.
Man legt fest:
Ablehnungsbereich: $K = \{26; 27; \ldots; 120\}$,
nichtkritischer Bereich: $\overline{K} = \{0; 1; \ldots; 25\}$.
Damit lautet die Entscheidungsregel:
H_0 wird verworfen, wenn mindestens 26 Sechsen gewürfelt werden.

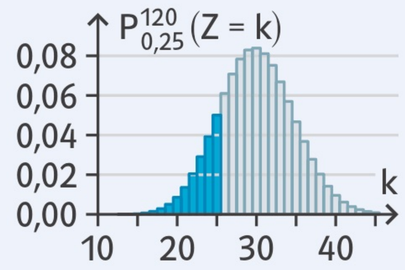
Fehler erster Art: Aufgrund des Testergebnisses wird entschieden, dass es sich um einen Würfel handelt, der zu viele Sechsen liefert, obwohl dies in Wirklichkeit nicht der Fall ist.

$$\alpha' = P^{120}_{\frac{1}{6}}(Z \geq 26)$$
$$= 1 - P^{120}_{\frac{1}{6}}(Z \leq 25)$$
$$\approx 9{,}2\,\%$$



Fehler zweiter Art: Aufgrund des Testergebnisses wird entschieden, dass es sich um einen fairen Würfel handelt, obwohl er in Wirklichkeit zu viele Sechsen liefert.
Unter der Annahme, dass $p = 0{,}25$ ist, gilt

$$\beta' = P^{120}_{0{,}25}(Z \leq 25)$$
$$\approx 17{,}2\,\%.$$



n, Z, H_0 und H_1 bleiben gleich.
Man legt als Signifikanzniveau fest: $\alpha = 5\,\%$.
Bestimmung der Entscheidungsregel:
Rechtsseitiger Signifikanztest, d.h.
Ablehnungsbereich: $K = \{g; g + 1; \ldots; 120\}$,
nichtkritischer Bereich: $\overline{K} = \{0; 1; \ldots; g - 1\}$.

$$\alpha' \leq \alpha \Leftrightarrow P^{120}_{\frac{1}{6}}(Z \geq g) \leq \alpha$$
$$\Leftrightarrow 1 - P^{120}_{\frac{1}{6}}(Z \leq g - 1) \leq 0{,}05$$
$$\Leftrightarrow P^{120}_{\frac{1}{6}}(Z \leq g - 1) \geq 0{,}95$$

Mithilfe des Taschenrechners erhält man $g - 1 = 27 \Leftrightarrow g = 28$. Also:
Ablehnungsbereich: $K = \{28; 29; \ldots; 120\}$,
nichtkritischer Bereich $\overline{K} = \{0; 1; \ldots; 27\}$.
Das heißt, H_0 kann auf einem Signifikanzniveau von 5 % verworfen werden, wenn mindestens 28 Sechsen gewürfelt werden.

→ Lösungen | Seite 284

1 Die Nullhypothese $H_0: p = 0{,}3$ wird bei einem Stichprobenumfang von $n = 200$ einseitig getestet. Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich und die Wahrscheinlichkeit α' für den Fehler erster Art,

a) wenn linksseitig getestet wird und das Signifikanzniveau 5 % beträgt,

b) wenn rechtsseitig getestet wird und das Signifikanzniveau 1 % beträgt.

2 Wahr oder falsch? Begründen Sie.

a) Das Signifikanzniveau kann nicht kleiner als die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art sein.

b) Wenn man die Nullhypothese nicht ablehnt, ist sie wahr, denn sonst könnte man nicht den nichtkritischen Bereich bestimmen.

c) Das Signifikanzniveau kann nicht größer als die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art sein.

3 Bei einer Sorte Saatgut beträgt die Keimwahrscheinlichkeit laut Herstellfirma mindestens 88 %. Ein Kunde bezweifelt dies. Er führt einen Signifikanztest durch. Dazu werden 800 Samen untersucht, als Signifikanzniveau wird 5 % gewählt. Die Behauptung der Herstellfirma dient als Nullhypothese. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.

4 Ein fairer Würfel soll von einem gezinkten, bei dem die Sechs mit größerer Wahrscheinlichkeit auftritt, durch einen Test auf dem Signifikanzniveau von 5 % unterschieden werden.
Leon entscheidet sich für die Nullhypothese, der getestete Würfel sei ideal.
Samira entscheidet sich für die Nullhypothese, die Wahrscheinlichkeit für die Sechs liege bei dem Würfel bei 30 %.

a) Zeigen Sie, dass bei einer Stichprobe vom Umfang 220 die Situation auftreten kann, dass beide ihre Nullhypothese verwerfen und sich jeweils für die Gegenhypothese entscheiden.

b) Erläutern Sie, wie sich die Situation ändert, wenn Samira bei gleichbleibendem Stichprobenumfang und Signifikanzniveau die Wahrscheinlichkeit in ihrer Nullhypothese verändert. Bestimmen Sie, für welche vermuteten Wahrscheinlichkeiten die in Teilaufgabe a) beschriebene Situation nicht mehr auftreten kann.

5 Zur Behandlung einer bestimmten Krankheit existiert eine Standardtherapie, deren Erfolgsquote bei 70 % liegt. Eine Gruppe von Medizinerinnen und Medizinern hat eine neue Therapie entwickelt, von der sie sich eine größere Erfolgswahrscheinlichkeit erhofft. Um diese Hoffnung statistisch zu untermauern, plant sie einen Signifikanztest mit einem Stichprobenumfang von 600 Patientinnen und Patienten auf einem Signifikanzniveau von 1 %. Dabei soll möglichst vermieden werden, dass irrtümlich davon ausgegangen wird, die neue Therapie besitze eine größere Erfolgswahrscheinlichkeit.

a) Formulieren Sie eine Nullhypothese, die dieser Zielsetzung entspricht, und begründen Sie Ihre Wahl.

b) Formulieren Sie die Entscheidungsregel.

c) Beschreiben Sie den Fehler zweiter Art im Sachzusammenhang.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art, wenn die tatsächliche Erfolgsquote der neuen Therapie 75 % beträgt.

e) Bestimmen Sie, wie oft der beschriebene Signifikanztest mindestens durchgeführt werden müsste, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens ein signifikantes Testergebnis erzielt wird, obwohl sich die Erfolgsquote der neuen Therapie in Wirklichkeit nicht erhöht hat.

f) Beurteilen Sie, ob die in Teilaufgabe e) beschriebene mehrfache Durchführung des Tests, um möglichst ein signifikantes Ergebnis zu erzielen, realistisch ist. Bewerten Sie eine solche Vorgehensweise aus ethischer Sicht.

V Quotientenregel und Funktionsuntersuchungen

$$\frac{N \cdot AZ - Z \cdot AN}{N^2}$$

„Die Fantasie arbeitet in einem schöpferischen Mathematiker nicht weniger als in einem erfinderischen Dichter."

Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717 – 1783), französischer Mathematiker, Physiker und Philosoph

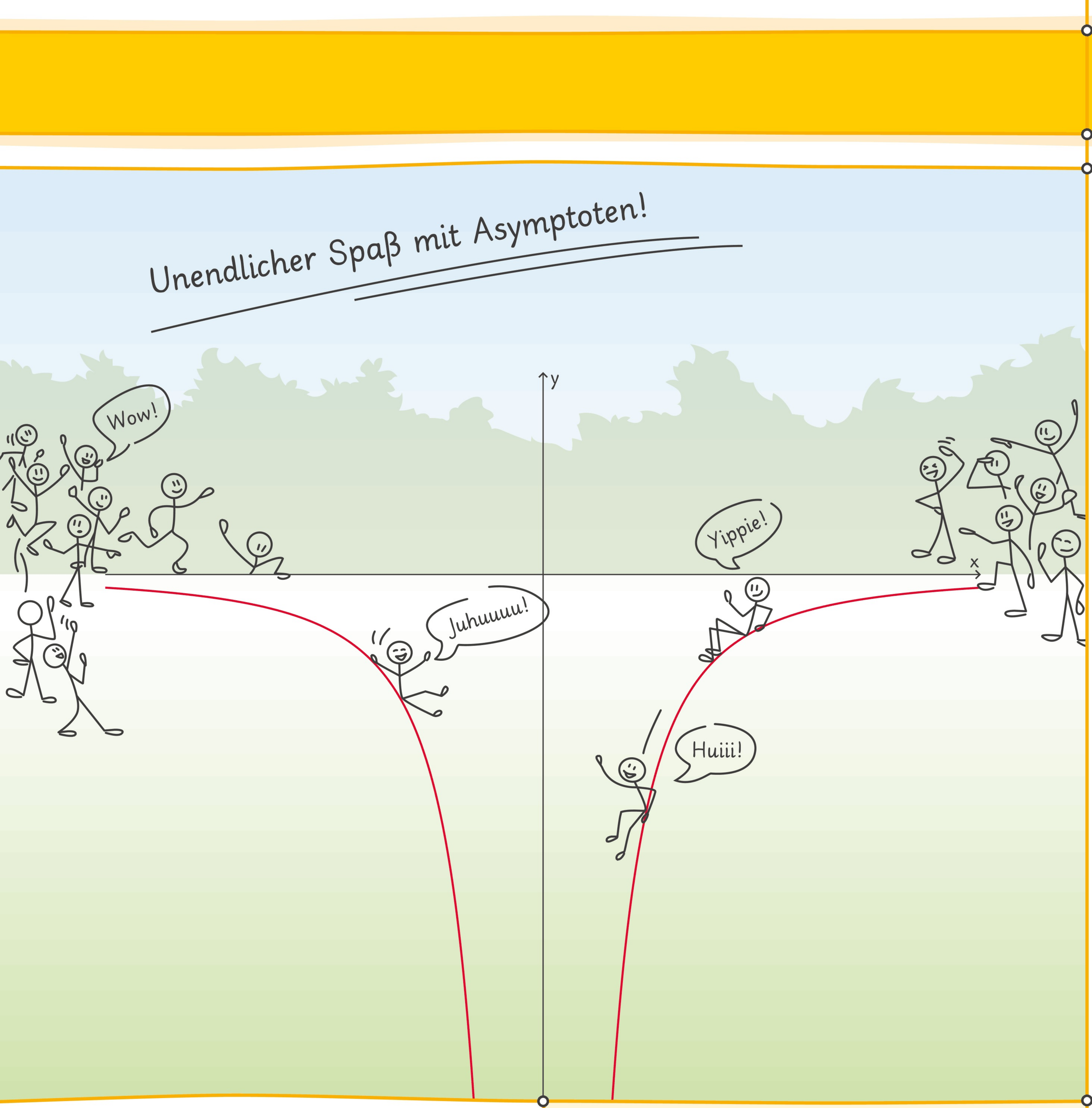
Das können Sie schon

- Das Verhalten einer einfachen gebrochen-rationalen Funktion für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ sowie in der Umgebung von Definitionslücken bestimmen
- Wesentliche Eigenschaften einer einfachen gebrochen-rationalen Funktion und ihres Graphen ermitteln
- Aus gegebenen Eigenschaften einer einfachen gebrochen-rationalen Funktion auf einen dazu passenden Funktionsterm schließen
- Geeignete Software im Umgang mit Funktionen verwenden

Test

Check-in zu Kapitel V Seite 266

Unendlicher Spaß mit Asymptoten!



Das können Sie bald

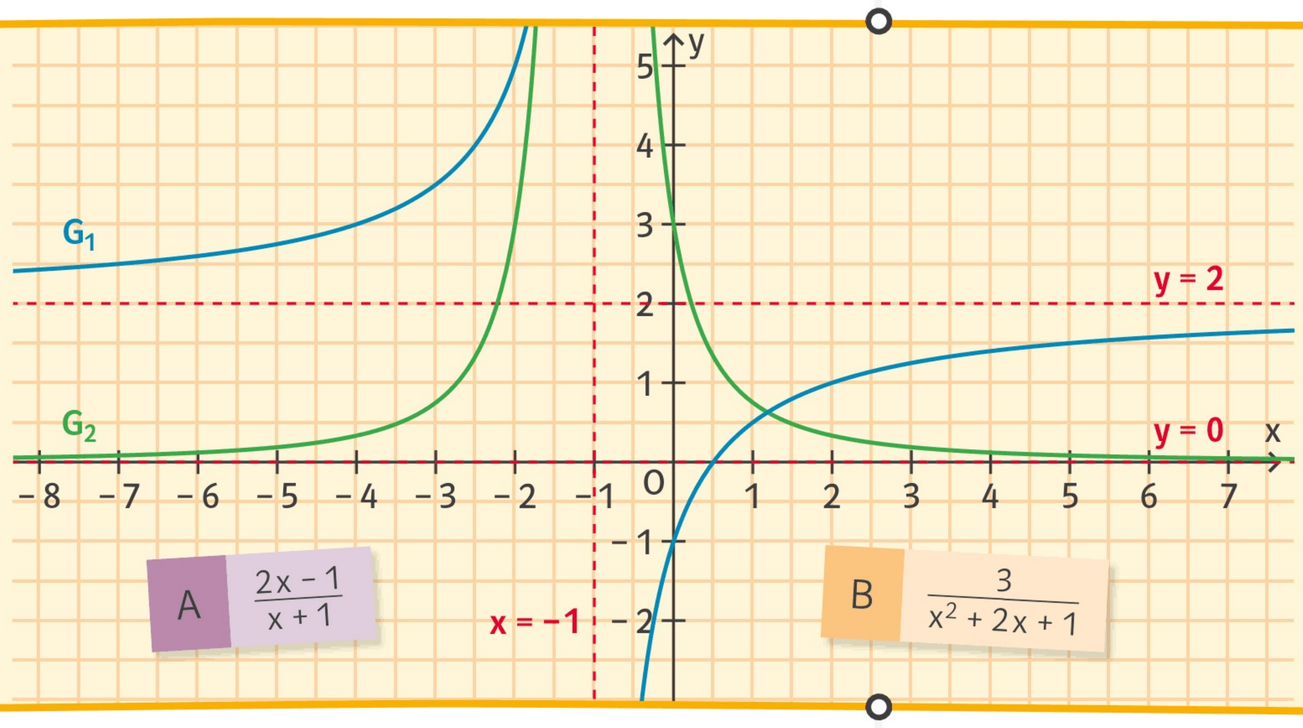
- Einfache gebrochen-rationale Funktionen mithilfe der Quotientenregel ableiten
- Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten ableiten
- Einfache gebrochen-rationale Funktionen mithilfe der Methoden der Differentialrechnung untersuchen
- Verknüpfungen von Funktionen aller bisher bekannten Funktionstypen untersuchen

1 Die Quotientenregel bei gebrochen-rationalen Funktionen

Abgebildet sind die Graphen und Terme der Funktion f und ihrer Ableitung f'.

a) Ordnen Sie f und f' jeweils den passenden Graphen und zugehörigen Funktionsterm zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.

b) Zeigen Sie, dass $f'(x)$ äquivalent zum Term $g(x) = \frac{2\cdot(x+1)-(2x-1)\cdot 1}{(x+1)^2}$ ist, und erläutern Sie, wie man $g(x)$ mithilfe des Zähler- und Nennerpolynoms von $f(x)$ und deren Ableitungen bilden könnte.



Ableitungen von Funktionen der Form $f: x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ (mit $v(x) \neq 0$), z. B. gebrochen-rationale Funktionen wie $x \mapsto \frac{2}{x^2-4}$, $x \mapsto \frac{-4x}{x+2}$ oder $x \mapsto \frac{2x^2+x}{5x}$, wurden bisher nicht behandelt. Im Folgenden wird eine Ableitungsregel für solche Funktionen hergeleitet.

- Der Term $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ wird zunächst in ein Produkt umgeformt, um dann die Produktregel anwenden zu können:
  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = u(x)\cdot\frac{1}{v(x)}$,
  $f'(x) = u'(x)\cdot\frac{1}{v(x)} + u(x)\cdot\left(\frac{1}{v(x)}\right)'$.
- Die Ableitung von $\frac{1}{v(x)}$ lässt sich mithilfe des Differentialquotienten bilden:

$$\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{v(x)}-\frac{1}{v(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{v(x_0)-v(x)}{v(x)\cdot v(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{v(x)\cdot v(x_0)}\cdot\frac{v(x_0)-v(x)}{x-x_0}\right)$$

$$= \frac{1}{[v(x_0)]^2}\cdot\lim_{x\to x_0}\left(-\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\right) = \frac{1}{[v(x_0)]^2}\cdot(-v'(x_0)) = -\frac{v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}.$$

- Der Term der Ableitung von f kann nun wie folgt vereinfacht werden:

$$f'(x) = u'(x)\cdot\frac{1}{v(x)} + u(x)\cdot\left(-\frac{v'(x)}{[v(x)]^2}\right) = \frac{u'(x)\cdot v(x)}{[v(x)]^2} - \frac{u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

Daraus ergibt sich folgende Ableitungsregel.

Satz (Quotientenregel): Sind die Funktionen u und v differenzierbar, dann ist $f: x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ für alle x mit $v(x) \neq 0$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$.

„Nenner (N) mal Ableitung Zähler (AZ) minus Zähler (Z) mal Ableitung Nenner (AN) durch Nenner hoch zwei."
Kurz: $\frac{N\cdot AZ - Z\cdot AN}{N^2}$.

Beachten Sie:
Leitet man gebrochen-rationale Funktionen ab, können Terme auftreten, die nicht vollständig gekürzt sind. Es ist jedoch häufig von Vorteil, mit vollständig gekürzten Termen zu arbeiten. So kann beispielsweise vermieden werden, dass nach dem Ableiten eventuell die Nullstellen des Zählerpolynoms nicht in der Definitionsmenge liegen, was im Folgenden anhand der Funktion $f: x \mapsto \frac{x}{(x-1)^2}$ mit $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ erläutert wird.

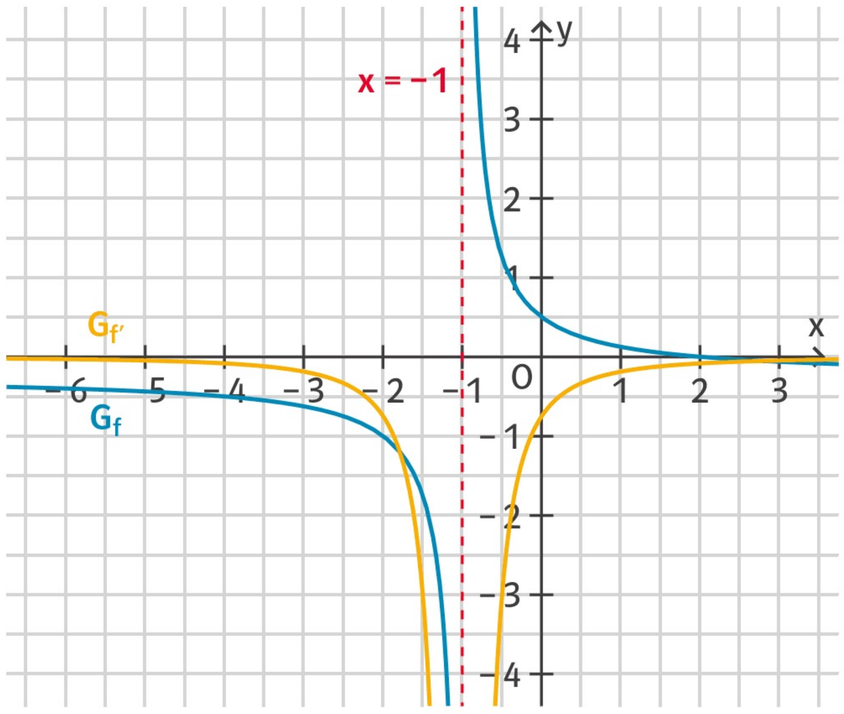
$$f'(x) = \frac{1\cdot(x-1)^2 - x\cdot 2(x-1)}{((x-1)^2)^2} = \frac{(x-1)[(x-1)-2x]}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(-x-1)}{(x-1)^4}$$

Die Ableitung von f hat ausschließlich die Nullstelle $x = -1$, obwohl $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ gilt. In der vollständig gekürzten Darstellung $f'(x) = \frac{-x-1}{(x-1)^3}$ zeigt sich noch deutlicher, dass f' nur die Nullstelle $x = -1$ hat.

Zur Erinnerung:

1. Eine Funktion heißt gebrochen-rational, wenn man sie in der Form $x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ darstellen kann, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind und $q(x)$ mindestens vom Grad 1 ist.
2. Wenn bei einer Funktion kein Definitionsbereich angegeben wird, soll stets der maximale Definitionsbereich verwendet werden.

Bemerkung:
Hat eine gebrochen-rationale Funktion f eine Polstelle, so besitzt ihre Ableitung f′ die gleiche Polstelle, da nach der Quotientenregel der Nenner quadriert wird und somit jede Polstelle erhalten bleibt. Allerdings unterscheiden sich die beiden Polstellen von f und f′ in ihrer Art. So hat beispielsweise die Funktion $f: x \mapsto \frac{2-x}{4(x+1)}$ an der Stelle $x = -1$ eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel und ihre Ableitungsfunktion $f': x \mapsto \frac{-3}{4(x+1)^2}$ an der Stelle $x = -1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.



vgl. auch Aufgabe 17

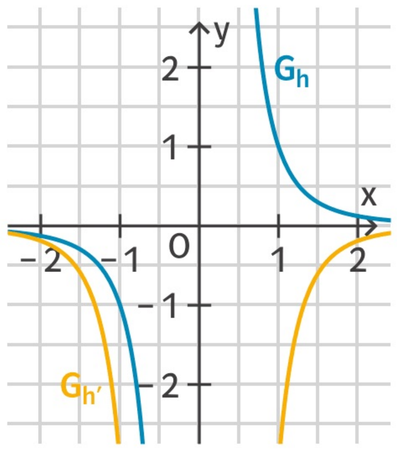
Potenzfunktionen mit negativen Exponenten und deren Ableitungen
Die Ableitung einer Potenzfunktion mit natürlichem positivem Exponenten ist bereits bekannt.
$f: x \mapsto x^n$ mit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$
$f': x \mapsto n x^{n-1}$

Potenzfunktionen mit negativem ganzzahligem Exponenten sind gebrochen-rational und können mit der Quotientenregel abgeleitet werden.
$g: x \mapsto x^{-n}$ mit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$g(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$g'(x) = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot n x^{n-1}}{(x^n)^2} = \frac{-n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n x^{n-1-2n} = -n x^{-n-1}$$

$h: x \mapsto x^{-3}$
$h': x \mapsto -3x^{-4}$



Es ergibt sich folgende Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten.

Satz: Die Funktion $f: x \mapsto x^k$ (mit $k \in \mathbb{Z}^-$) ist differenzierbar auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und es gilt $f'(x) = k x^{k-1}$.

Beispiel

Bestimmen Sie einen Term der Ableitung von f und vereinfachen Sie diesen.

a) $f: x \mapsto \frac{x^2}{x-2}$ **b)** $f: x \mapsto 5x^2 + \frac{x}{x^2-4}$ **c)** $f: x \mapsto 12x^{-6}$ **d)** $f: x \mapsto \frac{2x^2-6x+1}{(x-2)^2}$

Lösung

a) $f'(x) = \frac{2x \cdot (x-2) - x^2 \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$

b) $f'(x) = 10x + \frac{1 \cdot (x^2-4) - x \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = 10x + \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}$

c) $f'(x) = 12 \cdot (-6) x^{-6-1} = -72x^{-7}$

d) $f'(x) = \frac{(4x-6) \cdot (x-2)^2 - (2x^2-6x+1) \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{(4x-6) \cdot (x-2) - (2x^2-6x+1) \cdot 2}{(x-2)^3}$

$= \frac{4x^2 - 6x - 8x + 12 - 4x^2 + 12x - 2}{(x-2)^3} = \frac{-2x+10}{(x-2)^3}$

Aufgaben

1 Bestimmen Sie einen Term der Ableitung der Funktion f und vereinfachen Sie diesen.

a) $f(x) = \frac{0{,}5x}{x-2}$ **b)** $f(x) = \frac{3x-1}{4x+2}$ **c)** $f(z) = \frac{3-2z^2}{2z^2-2}$ **d)** $f(x) = \frac{2x^2-x+5}{10x}$

e) $f(x) = \frac{(x-2)^2}{2x^2}$ **f)** $f(t) = \frac{-3t}{-t^2-2t}$ **g)** $f(a) = \frac{4}{(a+2)^2} - 3$ **h)** $f(x) = \frac{x^2}{(5x-2)^2}$

2 Bestimmen Sie einen Term der Ableitung der Funktion g.

a) $g(x) = x^{-4}$ **b)** $g(x) = 12x^{-1}$ **c)** $g(x) = x^{-3} + x^{-4}$ **d)** $g(x) = 7x^n \ (n \in \mathbb{Z})$

e) $g(x) = x \cdot x^{-3}$ **f)** $g(x) = x^{-3} : 3$ **g)** $g(a) = 5a^{-2} - 3$ **h)** $g(x) = (20x^2 - 10) \cdot 10x^{-1}$

3 Erklären Sie sich jeweils gegenseitig anhand eines Beispiels die Anwendung der Quotientenregel und wie man eine Potenzfunktion mit negativem Exponenten ableiten kann.

→ Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

4 Beim Ableiten der Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{-x^2 - 2}{3x + 1}$ und $g(x) = \frac{4(x^2 - 2)}{4 - 2x}$ sind Fehler unterlaufen. Beschreiben Sie die Fehler und bilden Sie korrekte Terme der Ableitungen der Funktionen f und g.

$$f'(x) = \frac{3 \cdot (-x^2 - 2) - (3x + 1)(-2x)}{3x + 1}$$

$$g'(x) = \frac{(4 - 2x) \cdot 2x - 4(x^2 - 2) \cdot 2}{16 - 4x^2}$$

5 Beurteilen Sie, ob die Funktion F eine Stammfunktion von f ist.

a) $F: x \mapsto \frac{2x^2 + 4}{x^2}$ und $f: x \mapsto -8x^{-3}$

b) $F: x \mapsto x^{-2}(4x + 1)$ und $f: x \mapsto -\frac{4x + 2}{x^3}$

6 Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = \frac{4}{x^2}$. Ihr Graph wird mit G_h bezeichnet.

a) Bestimmen Sie $h'(x)$ mit zwei unterschiedlichen Ableitungsregeln.

b) Geben Sie jeweils die Gleichung der waagerechten Asymptote von G_h und $G_{h'}$, die Polstellen von h und h' sowie jeweils ihre Art an.

c) Skizzieren Sie G_h und $G_{h'}$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse.

Test 1

→ Lösungen | Seite 285

7 Gegeben ist der Funktionsterm der Funktion f. Beurteilen Sie, ob $g(x)$ ein Term der Ableitung von f ist.

a) $f(x) = \frac{-x^2 - 2}{0{,}5x^2 - 4}$ $g(x) = \frac{10x}{(0{,}5x^2 - 4)^2}$

b) $f(x) = 3x^{-2} + \frac{1}{x}$ $g(x) = \frac{-x - 6}{x^3}$

8 Gegeben ist die Funktion $F: x \mapsto x^{-2}$. Sie ist eine Stammfunktion der Funktion f.

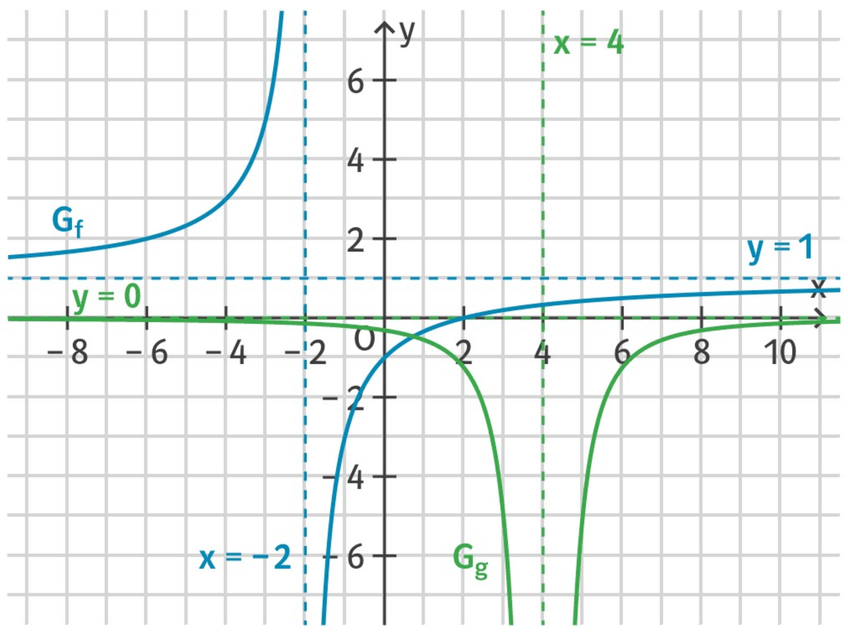
a) Bestimmen Sie einen Term der Ableitung von f.

b) Zeigen Sie, dass F, f und f' keine Nullstellen haben.

c) Geben Sie die Gleichungen der gemeinsamen Asymptoten von G_F, G_f und $G_{f'}$ an.

d) Skizzieren Sie G_F, G_f und $G_{f'}$.

9 Gegeben sind die Graphen der Funktionen f und g. Skizzieren Sie die Graphen der Ableitungen von f und g.



10 Bestimmen Sie die Steigung des Graphen G_g an der Stelle x_0.

a) $g: x \mapsto -\frac{x - 1}{(4x)^2}$, $x_0 = 2$

b) $g: x \mapsto -\frac{1{,}25x^{-4}}{5}$, $x_0 = -1$

c) $g: x \mapsto \frac{(2x - 4)^2}{6x}$, $x_0 = 5$

d) $g: x \mapsto -\frac{x + k}{kx + 2}$, $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $x_0 = 0$

11 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen G_f an der Stelle x_0.

a) $f: x \mapsto \frac{-2x}{(x - 2)^2}$, $x_0 = 1$

b) $f: x \mapsto \frac{x^2}{x + 1}$, $x_0 = -2$

c) $f: x \mapsto \frac{x + 1}{x - 4}$, $x_0 = 7$

d) $f: x \mapsto \frac{2x^2}{(x + 4)^2}$, $x_0 = -8$

12 Bestimmen Sie einen Term der Ableitung der Funktion von f. Bestimmen Sie dann mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware die Koordinaten aller Punkte, in denen der Graph G_f eine horizontale Tangente hat.

a) $f: x \mapsto -\frac{0{,}5x^2}{x-2}$ **b)** $f: x \mapsto \frac{3x-1}{4x+2}$ **c)** $f: z \mapsto \frac{3-2z^2}{2z^2-2}$ **d)** $f: t \mapsto \frac{2t^2-t+8}{10t}$

13 Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte, in denen der Graph G_f die Steigung m hat.

→ Strategie | Seite 259
Aufstellen und Lösen einer Gleichung

a) $f: x \mapsto x(x-4)^{-1}$, $m = -1$ **b)** $f: \mapsto \frac{3-1{,}5x}{5x-2}$, $m = -3$ **c)** $f: x \mapsto \frac{(x-4)^2}{20x} + 4x$, $m = 3{,}25$ **d)** $f: x \mapsto \frac{2x}{(2x-0{,}5)^2}$, $m = 0$

14 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{x+1{,}5}{x-2}$ mit $D = D_{max}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Geben Sie die Definitionsmenge von f an und skizzieren Sie den Graphen G_f mithilfe seiner Asymptoten.

b) Begründen Sie, dass der Graph $G_{f'}$ der Ableitung f' die x-Achse als Asymptote hat. Geben Sie die Polstelle von f' an und bestimmen Sie ihre Art.

c) Ergänzen Sie $G_{f'}$ in Ihrer Skizze.

15 Geben Sie eine gebrochen-rationale Funktion an, deren Ableitung folgende Eigenschaften aufweist.

a) $f'(x)$ ist als Quotient der Form $\frac{p(x)}{q(x)}$ darstellbar, wobei $q(x)$ vom Grad 3 ist.

b) f' hat die Polstelle $x = 3$ und es gilt $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f'(x) = -\infty$.

16 Bestimmen Sie eine Stammfunktion zur Funktionenschar $f_k: x \mapsto \frac{1}{x^k}$ (mit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$).
Kontrollieren Sie sich gegenseitig und erläutern Sie, wie viele Lösungen es gibt.

17 Gegeben ist die gebrochen-rationale Funktion $f: \mapsto \frac{u(x)}{(x-a)^n}$ mit der Polstelle $a \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass die Ableitung f' ebenso die Polstelle a hat, allerdings mit der Ordnung $n + 1$.
Diskutieren Sie, was dies für die Polstelle von f bzw. f' bedeutet.

Test 2

→ Lösungen | Seite 285

18 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \frac{3-1{,}5x}{5x-2}$ mit $D = D_{max}$. Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.

a) Geben Sie die Definitionsmenge der Ableitung g' von g an. Geben Sie die Polstelle von g' und ihre Art an und begründen Sie Ihre Angabe.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_g im Schnittpunkt von G_g mit der x-Achse.

19 Gegeben ist die Funktionenschar $f_k: x \mapsto \frac{kx^2-2k}{2-x}$ $(k \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

a) Untersuchen Sie mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware, wie sich eine Veränderung von k auf den Schnittpunkt der Graphen von f_k und f_k' auswirkt.

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass die x-Koordinate des Schnittpunktes der Graphen von f_k und f_k' unabhängig von k ist.

Grundwissen Test

→ Lösungen | Seite 285

G 20 Lösen Sie die Bruchgleichung rechnerisch.

a) $\frac{12}{(x-2)^2} = 3$ **b)** $-\frac{4x}{x^2-1} - 2 = 0$ **c)** $\frac{x+1}{x^2} = \frac{1}{x} + 4$ **d)** $\frac{2x}{x-2} = \frac{1}{2}x + 3$

G 21 Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen an den Graphen G_f, die parallel zur Geraden g mit $g(x) = 3x - 1$ verläuft.

2 Untersuchung gebrochen-rationaler Funktionen

(1) Nullstellen

(2) Grenzverhalten im Unendlichen

(3) $f(x) = 0$

(4) Symmetrieverhalten

(5) $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

(6) Extremstellen

(7) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < 0}} f(x)$ und $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > 0}} f(x)$

(8) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$

(9) Polstellen und ihre Art

(10) $f(-x) = -f(x)$

Finden Sie zueinander passende Kartenpaare und erläutern Sie Ihre Zuordnung.

Bisher musste man bei der Untersuchung gebrochen-rationaler Funktionen bzw. ihrer Graphen ohne Methoden der Differentialrechnung auskommen. Mithilfe der Quotientenregel können nun u.a. Extrem- und Wendestellen ermittelt werden. Im Folgenden wird eine exemplarische Funktionsuntersuchung anhand der Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x}$ gezeigt.

Definitionsmenge

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Symmetrieverhalten

$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{-x} = -\frac{x^2 + 1}{x} = -f(x) \implies G_f$ ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

Nullstellen

Da $x^2 + 1 = 0$ keine Lösung hat, hat f keine Nullstellen.

Schnittpunkt mit der y-Achse

Da $0 \notin D$ gilt, hat G_f keinen Schnittpunkt mit der y-Achse.

Verhalten an den Rändern der Definitionsmenge

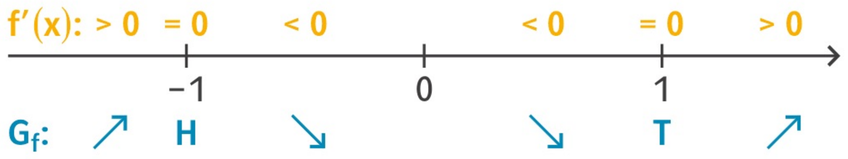
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1}{x} = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 1}{x} = -\infty$, da $z > n$ ist.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\overset{\to 1}{(x^2 + 1)}}{\underset{\to 0^+}{(x)}} = +\infty$ und $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\overset{\to 1}{(x^2 + 1)}}{\underset{\to 0^-}{(x)}} = -\infty$

Extrempunkte und Monotonieverhalten

$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \iff x^2 - 1 = 0 \iff x = 1$ oder $x = -1$

In den Intervallen $]-\infty; -1]$ und $[1; \infty[$ nimmt f streng monoton zu und in den Intervallen $[-1; 0[$ und $]0; 1]$ streng monoton ab.



Es ist $f(-1) = -2$ und $f(1) = 2$. Man erhält den Hochpunkt $H(-1|-2)$ und den Tiefpunkt $T(1|2)$.

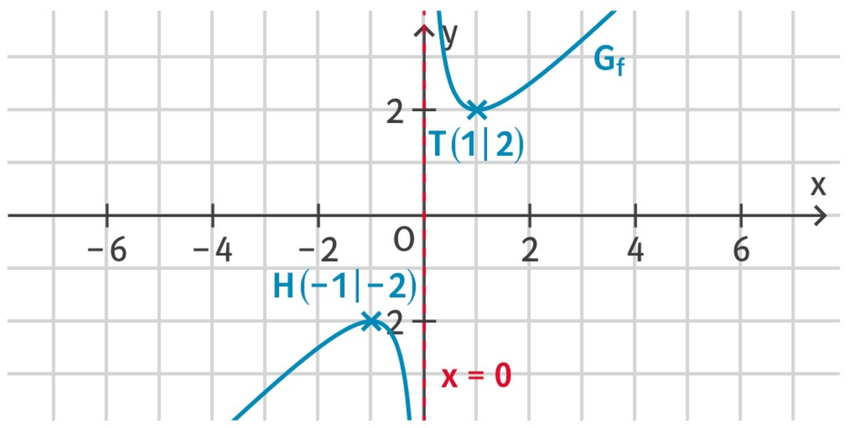
Wendepunkte und Krümmungsverhalten

$f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{2x^2 - (x^2 - 1) \cdot 2}{x^3} = \frac{2}{x^3} \neq 0$

Damit gibt es keine Wendestellen.

x	$]-\infty; 0[$	0	$]0; +\infty[$
$f''(x)$	< 0	nicht def.	> 0
G_f	rechts-gekrümmt	–	links-gekrümmt

Graph



Zur Erinnerung:

Ist $p(x)$ ein Polynom vom Grad z und $q(x)$ ein Polynom vom Grad n, dann gilt für $f: x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$:

$z > n$: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \pm\infty$,

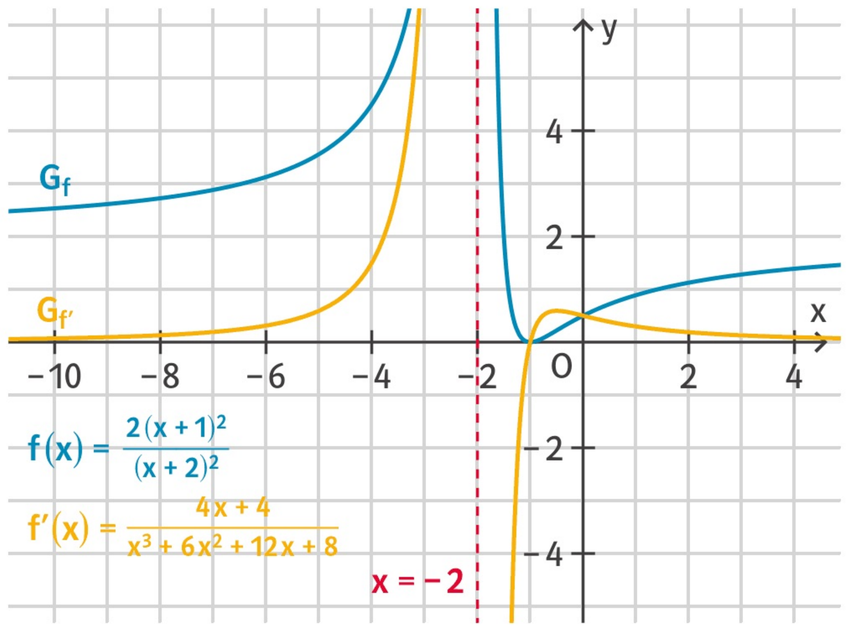
$z < n$: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = 0$,

$z = n$: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = c$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Aspekte bei der Untersuchung einer Funktion f und ihres Graphen G_f:
- Definitionsmenge von f
- Symmetrieverhalten von G_f
- Nullstellen von f
- Schnittpunkt von G_f mit der y-Achse
- Verhalten von f an den Rändern der Definitionsmenge
- Asymptoten von G_f
- Extrempunkte von G_f und Monotonieverhalten von f
- Wendepunkte und Krümmungsverhalten von G_f

Bemerkungen:

(1) Zur Ermittlung der Monotonieintervalle einer gebrochen-rationalen Funktion müssen neben den Nullstellen ihrer Ableitung auch die Definitionslücken der Funktion berücksichtigt werden. So ergeben sich beispielsweise bei der Funktion f mit $f(x) = \frac{2(x+1)^2}{(x+2)^2}$ folgende Monotonieintervalle:
$]-\infty; -2[$: f nimmt streng monoton zu.
$]-2; -1]$: f nimmt streng monoton ab.
$[-1; +\infty[$: f nimmt streng monoton zu.



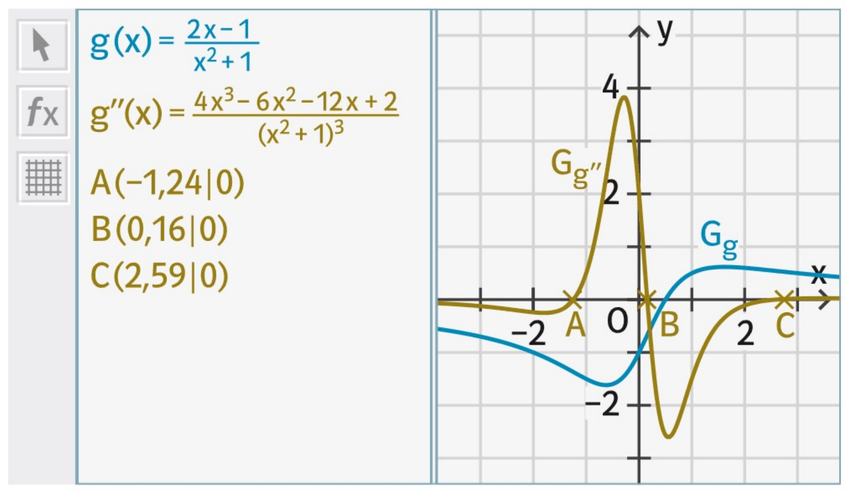
(2) Möchte man das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion ermitteln, benötigt man die zweite Ableitung. Dabei ist es empfehlenswert, den Funktionsterm nach Möglichkeit zu kürzen. Außerdem können Gleichungen vom Grad 3 oder höher auftreten, die gelöst werden müssen. Der Einsatz einer geeigneten Mathematiksoftware bietet sich in solchen Fällen an.

$g(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$

$g'(x) = \frac{2\cdot(x^2+1) - (2x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}$

$g''(x) = \frac{4x^3-6x^2-12x+2}{(x^2+1)^3}$

$]-\infty; -1{,}24]$: G_g ist rechtsgekrümmt.
$[-1{,}24; 0{,}16]$: G_g ist linksgekrümmt.
$[0{,}16; 2{,}59]$: G_g ist rechtsgekrümmt.
$[2{,}59; +\infty[$: G_g ist linksgekrümmt.



Hinweis:
Bei Monotonieintervallen müssen Definitionslücken ausgeschlossen werden, während Nullstellen der ersten Ableitung eingeschlossen werden.

Beispiel 1

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{15}{x^2+4}$. Beurteilen Sie die Aussage.

a) Der Punkt $P(0\,|\,3{,}75)$ ist der einzige Extrempunkt des Graphen G_f von f.

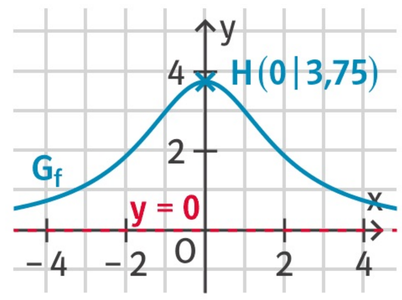
b) Die Funktion f hat genau zwei Wendestellen.

Lösung

a) Es gilt $f'(x) = \frac{0\cdot(x^2+4) - 15\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-30x}{(x^2+4)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ und es ist $g(0) = 3{,}75$. Außerdem hat G_f die x-Achse als Asymptote, ist achsensymmetrisch zur y-Achse und verläuft zudem durchgehend oberhalb der x-Achse (da $f(x) > 0$ ist). Daraus folgt: Die Aussage ist wahr.

b) $f''(x) = \frac{90x^2-120}{(x^2+4)^3} = 0 \Leftrightarrow 90x^2 - 120 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{120}{90} \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ oder $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

Daraus folgt: Die Aussage ist wahr.



Alternative Lösung:
Da der Zähler von $f(x)$ konstant und positiv ist und der Nenner von $f(x)$ quadratisch sowie stets positiv ist und für $x = 0$ minimal wird, wird $f(x)$ einzig für $x = 0$ maximal und nähert sich für $x \to \pm\infty$ dem Wert 0 an. Somit gibt es eine Extremstelle und zwei Wendestellen.

Beispiel 2

Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \frac{8x}{x^2+4}$ mit $D = D_{max}$. Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.

a) Geben Sie die Definitionsmenge von g an und bestimmen Sie das Symmetrieverhalten von G_g.

b) Geben Sie die Nullstelle von g an. Zeigen Sie, dass G_g die x-Achse als Asymptote hat.

c) Skizzieren Sie G_g mithilfe seiner Extrempunkte und den bisherigen Ergebnissen.

d) Geben Sie die Wertemenge von g an.

Lösung

a) Es gilt $D = \mathbb{R}$. Wegen $g(-x) = \frac{8\cdot(-x)}{(-x)^2+4} = \frac{-8x}{x^2+4} = -g(x)$ ist der Graph G_g punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

b) Die Nullstelle ist $x = 0$.

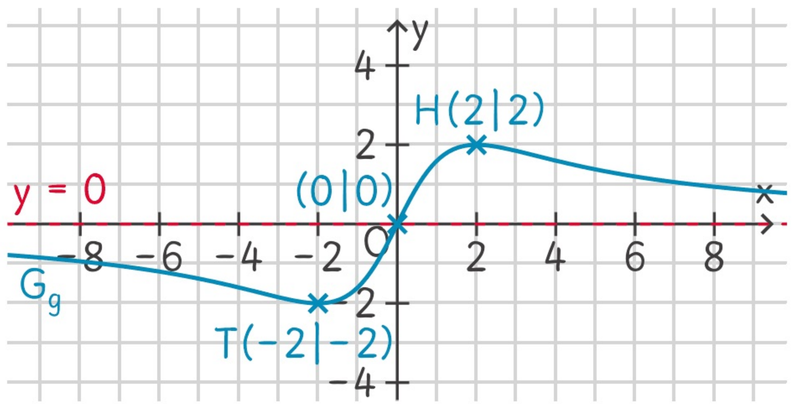
Aus $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{8x}{x^2+4} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{8x}{x^2+4} = 0$ (da $z < n$) folgt, dass G_g eine waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y = 0$ und somit die x-Achse als Asymptote hat.

c) $g'(x) = \frac{8\cdot(x^2+4) - 8x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-8x^2+32}{(x^2+4)^2} = 0 \Leftrightarrow -8(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ oder $x = 2$

Monotonieverhalten:

Es ist $g(-2) = -2$ und $g(2) = 2$. Man erhält den Tiefpunkt $T(-2|-2)$ und der Hochpunkt $H(2|2)$.

Skizze:



d) $W = [-2; 2]$

Aufgaben

1 Emilia und Luisa müssen bei der Hausaufgabe mögliche Extremstellen der Funktion $f: x \mapsto \frac{4x}{(x-3)^2}$ mit $D = \mathbb{R}\backslash\{3\}$ bestimmen. Beurteilen Sie ihre Lösungswege.

Luisas Lösung:

$$f'(x) = \frac{4\cdot(x-3)^2 - 4x\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}$$

$$= \frac{(x-3)[4\cdot(x-3) - 8x]}{(x-3)^4}$$

$$= \frac{(x-3)(-4x-12)}{(x-3)^4} = \frac{-4(x-3)(x+3)}{(x-3)^4} = 0$$

$\Leftrightarrow x = 3$ oder $x = -3$

Emilias Lösung:

$$f'(x) = \frac{4\cdot(x-3)^2 - 4x\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}$$

$$= \frac{4\cdot(x-3) - 4x\cdot 2}{(x-3)^3} = \frac{-4x-12}{(x-3)^3} = 0$$

$\Leftrightarrow -4x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow x = -3$

2 Bestimmen Sie Lage und Art aller Extrempunkte des Graphen der Funktion f.

a) $f(x) = \frac{2}{x^2-3}$ **b)** $f(z) = \frac{z^2-4}{z^2}$ **c)** $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ **d)** $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{2}{x}$

3 Bestimmen Sie je einen Term der ersten und zweiten Ableitung der Funktion g. Geben Sie die Terme in vollständig gekürzter Form an. Ermitteln Sie mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware alle Extrem- und Wendestellen der Funktion g.

a) $g: x \mapsto \frac{10x+10}{(x+4)^2}$ **b)** $g: x \mapsto \frac{12x}{x^2+3}$ **c)** $g: t \mapsto \frac{t^2-16}{2t+10}$ **d)** $g: a \mapsto \frac{-12(a-1)}{a^2+5}$

4 Erläutern Sie sich gegenseitig anhand eines Beispiels, an welchen Stellen sich das Monotonieverhalten einer gebrochen-rationalen Funktion ändern kann.

5 Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f und geben Sie die Monotonieintervalle an. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.

→ Strategie | Seite 260 Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

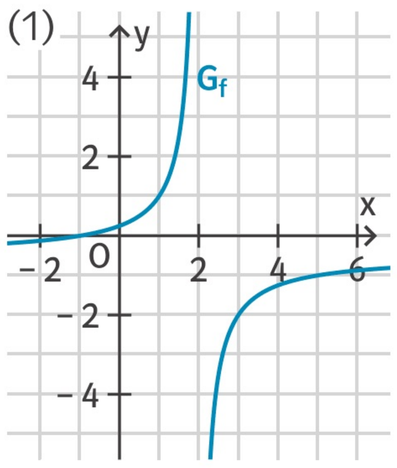
a) $f: x \mapsto \frac{6}{x^2+1}$ **b)** $f: x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ **c)** $f: x \mapsto \frac{-(x^2-4)}{2x^2}$ **d)** $f: x \mapsto \frac{20x}{(x+4)^2}$

e) $f: x \mapsto \frac{x^2+1}{x(x-2)}$ **f)** $f: x \mapsto \frac{x^2-2}{2x+6}$ **g)** $f: x \mapsto \frac{-15(x-2)}{x^2+3}$ **h)** $f: x \mapsto 0{,}2x + \frac{2}{x^2}$

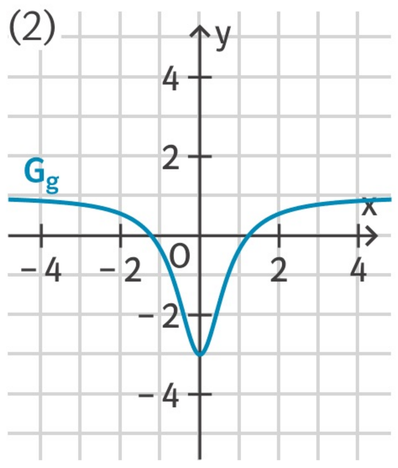
6 Gegeben sind Graphen einfacher gebrochen-rationaler Funktionen. Geben Sie jeweils die Anzahl der Nullstellen der ersten und zweiten Ableitung an. Gehen Sie dabei arbeitsteilig vor und erklären Sie sich gegenseitig Ihre Ergebnisse.

Zur Erinnerung:
Einfache gebrochen-rationale Funktionen sind Funktionen der Form $x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome höchstens vom Grad 2 sind und $\frac{p(x)}{q(x)}$ vollständig gekürzt ist.

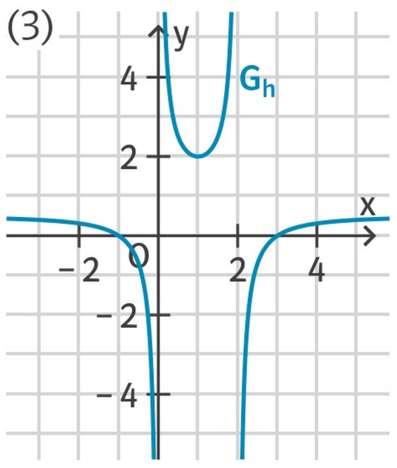
(1)



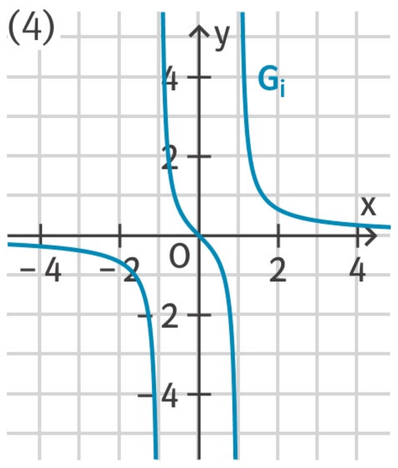
(2)



(3)



(4)



7 Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten des Graphen der Funktion f. Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.

→ Strategie | Seite 260 Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

a) $f: x \mapsto \frac{x-2}{x-4}$ **b)** $f: x \mapsto \frac{5}{x^2+2}$ **c)** $f: z \mapsto \frac{12-2z^2}{z^2-8}$ **d)** $f: t \mapsto -0{,}25 \cdot \frac{t^2}{t-1}$

8 Gegeben ist die Funktion $f: t \mapsto \frac{0{,}5(t-1)^2}{t-2}$ mit $D = D_{max}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Geben Sie die Definitionsmenge und die Nullstellen von f an.

b) Zeigen Sie $\frac{0{,}5(t-1)^2}{t-2} = 0{,}5t + \frac{0{,}5}{t-2}$. Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten von G_f an.

c) Ermitteln Sie Lage und Art der Extrempunkte des Graphen von f. Skizzieren Sie den Graphen G_f mithilfe der bisherigen Ergebnisse.

d) Für die zweite Ableitung gilt $f'': t \mapsto \frac{1}{(t-2)^3}$. Geben Sie das Krümmungsverhalten von G_f und die Anzahl der Wendestellen von f an. Begründen Sie Ihre Angabe.

Test 1

→ Lösungen | Seite 285

9 Begründen Sie durch Rechnung, dass die Funktion $f: x \mapsto \frac{5}{(x-2)^2}$ weder Extrem- noch Wendestellen hat.

10 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto -\frac{x^2-4}{x^2+3}$ mit $D = D_{max}$. Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass $D = \mathbb{R}$ ist, und geben Sie die Nullstellen von g an.

b) Ermitteln Sie das Symmetrieverhalten von G_g.

c) Bestimmen Sie das Verhalten von g für $x \to \pm\infty$.

d) Zeigen Sie, dass G_g genau einen Hochpunkt hat, und bestimmen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von G_g.

e) Skizzieren Sie G_g unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse.

11 Diskutieren und beurteilen Sie folgende Aussage: „Hat die einfache gebrochen-rationale Funktion g die Definitionsmenge $D = \mathbb{R}\backslash\{2\}$ und nimmt g auf den Intervallen $]-\infty; 2[$ und $]2; +\infty[$ streng monoton ab, dann gilt $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$."

→ Strategie | Seite 256 Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

12 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1{,}6 - 3{,}2x}{-0{,}8x^2}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Untersuchen Sie die Funktion f und zeichnen Sie G_f.

b) Ergänzen Sie in Ihrer Zeichnung den Graphen der Ableitung von f und kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.

13 Zeigen Sie, dass die Funktion $f: x \mapsto \frac{8}{4 - x^2}$ die Wertemenge $W = \mathbb{R} \setminus [0; 2[$ hat.

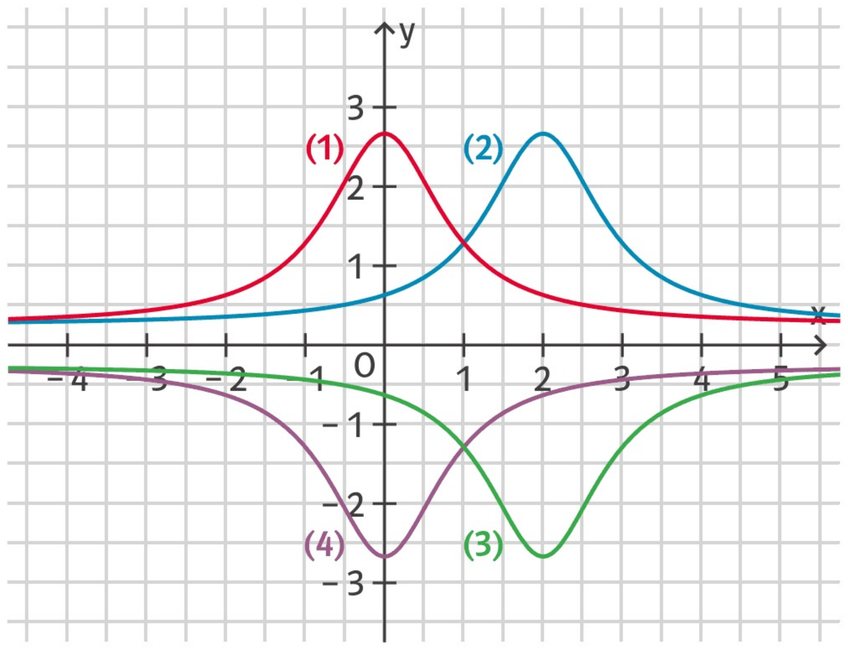
14 Zeigen Sie, dass die Extremstellen der Funktionenschar $f_k: x \mapsto \frac{kx}{x^2 + 4}$ $(k \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ unabhängig vom Parameter k sind.

15 Die Funktion G mit $G(x) = \frac{x^2 + 8}{4x^2 + 3}$ ist eine Stammfunktion der Funktion g.

a) Ordnen Sie der Stammfunktion G den passenden Graphen zu. Geben Sie für die anderen drei Graphen jeweils einen passenden Funktionsterm an.

b) Begründen Sie ohne Rechnung, dass g eine Nullstelle und zwei Extremstellen hat.

c) Beschreiben Sie das Symmetrieverhalten des Graphen G_g von g und schließen Sie daraus auf die Koordinaten eines Wendepunktes von G_g.



d) Geben Sie die Gleichung der waagerechten Asymptote von G_g an und skizzieren Sie G_g unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse.

16 Gegeben sind die Funktionen F mit $F(x) = 0{,}25x - 1 + \frac{1}{x}$ und f mit $f(x) = \frac{x^2 - 4}{4x^2}$.

a) Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion von f ist.

b) Bestimmen Sie Lage und Art der Extrempunkte das Graphen von F.

c) Zeigen Sie, dass weder der Graph von F noch der von f einen Wendepunkt hat.

d) Welche der Funktionen F, f, f′ und f″ haben das gleiche Monotonieverhalten? Begründen Sie Ihre Antwort.

e) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen F, f, f′ und f″.

17 Gegeben ist die Funktionenschar $f_c: x \mapsto \frac{x + c}{4x(x + 2)}$ mit $c \in [-5; 5] \setminus \{0; 2\}$ und $D = D_{max}$.

a) Geben Sie die Definitionsmenge und die Nullstelle von f_c an.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichungen der Asymptoten der Graphen der Funktionenschar unabhängig von c sind.

c) Untersuchen Sie die Anzahl der Extrem- und Wendepunkte der Graphen der Funktionenschar mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware.

18 Die Konzentration eines Medikaments $\left(\text{in } \frac{mg}{cm^3}\right)$ im Blut eines Patienten lässt sich durch die Funktion $f: t \mapsto 0{,}16\frac{t}{(t + 2)^2}$ beschreiben (t: Zeit in Minuten ab dem Zeitpunkt der Einnahme).

a) Beschreiben Sie die Bedeutung der Ableitung von f im Sachzusammenhang.

b) Ermitteln Sie, wie lange die Konzentration des Medikaments nach der Einnahme im Blut zunimmt und ab wann sie wieder abnimmt.

c) Berechnen Sie die momentane Änderungsrate der Konzentration zu Beginn, nach einer, zwei, drei, vier, fünf und sechs Minuten. Interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang.

d) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von f im Zeitintervall der ersten sechs Minuten nach Einnahme. Vergleichen Sie mit den Ergebnissen aus Teilaufgabe c). Beschreiben Sie, was Ihnen auffällt.

19 **Abiturprüfung 2021 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, daraus Teilaufgaben 1a), b) und c)**

Gegeben ist die in $\mathbb{R}\setminus\{-2; 2\}$ definierte Funktion $f: x \mapsto \frac{6x}{x^2 - 4}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet und ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

a) Geben Sie die Gleichungen aller senkrechten Asymptoten von G_f an. Begründen Sie, dass G_f die x-Achse als waagrechte Asymptote besitzt.

b) Bestimmen Sie das jeweilige Monotonieverhalten von f in den drei Teilintervallen $]-\infty; -2[$, $]-2; 2[$ und $]2; +\infty[$ der Definitionsmenge. Berechnen Sie zudem die Steigung der Tangente an G_f im Punkt $(0\,|\,f(0))$.

$\left(\text{zur Kontrolle: } f'(x) = -\frac{6\cdot(x^2+4)}{(x^2-4)^2}\right)$

Die Punkte $A(3\,|\,3{,}6)$ und $B(8\,|\,0{,}8)$ liegen auf G_f; zwischen diesen beiden Punkten verläuft G_f unterhalb der Strecke $\overline{AB}$.

c) Skizzieren Sie G_f im Bereich $-10 \leq x \leq 10$ unter Verwendung der bisherigen Informationen in einem Koordinatensystem.

20 **Abiturprüfung 2021 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 2**

Betrachtet wird die Schar der Funktionen $f_{a,b,c}: x \mapsto \frac{ax + b}{x^2 + c}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und maximaler Definitionsmenge $D_{a,b,c}$.

a) Die Funktion f aus Aufgabe 19 ist eine Funktion dieser Schar. Geben Sie die zugehörigen Werte von a, b und c an.

b) Begründen Sie: Wenn $a = 0$ und $b \neq 0$ gilt, dann ist der Graph von $f_{a,b,c}$ symmetrisch bezüglich der y-Achse und schneidet die x-Achse nicht.

c) Geben Sie für a, b und c alle Werte an, sodass sowohl $D_{a,b,c} = \mathbb{R}$ gilt als auch, dass der Graph von $f_{a,b,c}$ symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs, aber nicht identisch mit der x-Achse ist.

d) Für die erste Ableitung von $f_{a,b,c}$ gilt: $f'_{a,b,c}(x) = -\frac{ax^2 + 2bx - ac}{(x^2 + c)^2}$.

Zeigen Sie: Wenn $a \neq 0$ und $c > 0$ gilt, dann besitzt der Graph von $f_{a,b,c}$ genau zwei Extrempunkte.

Test 2

→ Lösungen | Seite 286

21 Die zweite Ableitung der gebrochen-rationalen Funktion f hat keine Nullstelle. Beurteilen Sie, ob man daraus folgern kann, dass der Graph G_f auf dem Definitionsbereich sein Krümmungsverhalten nicht ändert.

22 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2{,}5x + 2}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Ermitteln Sie die Wertemenge von f.

b) Bestimmen Sie mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware die Anzahl der Wendepunkte von G_f und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

23 Zeigen Sie, dass eine Funktion f mit $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$ maximal zwei Extremstellen haben kann.

Grundwissen Test

→ Lösungen | Seite 286

G 24 In einem Eishockeyteam sind 14 Nordamerikaner, von denen acht den Schläger links halten, und zwölf Europäer, von denen sieben den Schläger links halten. Ein Eishockeyspieler wird für ein Interview zufällig ausgelost. Die Merkmale N: „Nordamerikaner“ und L: „Schläger links“ werden betrachtet.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der zufällig ausgeloste Spieler

a) Europäer ist und den Schläger rechts hält,

b) Nordamerikaner ist, wenn er den Schläger links hält.

→ Strategie | Seite 256
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

3 Die Quotientenregel und Untersuchung verknüpfter Funktionen

Vroni und Basti ermitteln auf unterschiedlichen Wegen die Stellen, an denen eine horizontale Tangente an den Graphen der Funktion $f: x \mapsto \frac{2x+2}{e^x}$ vorliegt. Vergleichen und beurteilen Sie ihr Vorgehen.

Vroni:

$f'(x) = 2e^{-x} + (2x+2) \cdot e^{-x} \cdot (-1)$

$2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} = 0$

$-2xe^{-x} = 0$

$x = 0$

Basti:

$f'(x) = \frac{2 \cdot e^x - (2x+2) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{2-(2x+2)}{e^x}$

$2 - (2x+2) = 0$

$-2x = 0$

$x = 0$

Mithilfe der Quotientenregel wurden bisher gebrochen-rationale Funktionen abgeleitet. Mit ihrer Hilfe kann man jedoch auch andere Funktionen der Form $x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ ableiten. Damit lassen sich alle bisherigen Arten von Verknüpfungen mithilfe der Faktor-, der Summen-, der Produkt-, der Ketten- und der Quotientenregel ableiten.

Zur Erinnerung:
Zwei Funktionen lassen sich wie folgt verknüpfen:
$g+h$, $g-h$, $g \cdot h$, $\frac{g}{h}$ oder $g \circ h$.

Mithilfe der **Quotientenregel** können beliebige Funktionen der Form $x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ abgeleitet werden, wobei u und v differenzierbar sind und $v(x) \neq 0$ gilt. Die Quotientenregel gilt insbesondere auch dann, wenn $u(x)$ und $v(x)$ keine Polynome sind.

Beispiel: f mit $f(x) = \frac{x-2}{e^x}$ und f' mit $f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - (x-2) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{3-x}{e^x}$.

Vorgehen zur Untersuchung verknüpfter Funktionen

Bei der Untersuchung beliebiger Verknüpfungen aller bisher behandelten Arten von Funktionen ist es wichtig, die Struktur der Funktionsterme zu erkennen. Ein mögliches Vorgehen zur Untersuchung einer verknüpften Funktion wird im Folgenden anhand der Funktion $f: x \mapsto \frac{e^x}{x^3}$ erläutert.

Definitionsmenge

Der Funktionsterm ist ein Quotient und daher darf der Nenner nicht null werden, d.h. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Symmetrieverhalten

Da weder $f(-x) = f(x)$ noch $f(-x) = -f(x)$ gilt, ist G_f weder symmetrisch bezüglich der y-Achse noch bezüglich des Koordinatenursprungs.

Nullstellen

$f(x) = \frac{e^x}{x^3} = 0$ hat keine Lösung, da der Zähler $e^x > 0$ für alle $x \in D$ ist. Es gibt keine Nullstellen.

Verhalten an den Rändern von D

Es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$, da zwar e^x und x^3 beide für $x \to +\infty$ gegen $+\infty$ streben, aber e^x dabei schneller wächst.

Es gilt $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^3} = 0$, da x^3 gegen $-\infty$ und e^x gegen null strebt.

Es gilt $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$, da e^x gegen 1 und x^3 gegen 0^+ strebt.

Es gilt $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{e^x}{x^3} = -\infty$, da e^x gegen 1 und x^3 gegen 0^- strebt.

Zur Erinnerung:
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0^+$
$\left(\text{bzw. } \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0^-\right)$
bedeutet, dass die Funktionswerte $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ gegen 0 streben und dabei positiv (bzw. negativ) sind.

Extrempunkte und Monotonieverhalten

$$f'(x) = \frac{x^3 \cdot e^x - e^x \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{e^x x^2 (x-3)}{x^6} = \frac{e^x (x-3)}{x^4} = 0 \iff e^x (x-3) = 0 \iff x = 3$$

Auf den Intervallen $]-\infty; 0[$ und $]0; 3]$ nimmt f streng monoton ab und auf dem Intervall $[3; +\infty[$ nimmt f strengt monoton zu.

$f'(x)$:	< 0	n. def.	< 0	$= 0$	> 0
		0		3	
G_f:	↘		↘	T	↗

Es ist $f(3) = \frac{e^3}{27} \approx 0{,}74$. Man erhält den Tiefpunkt $\left(3 \middle| \frac{e^3}{27}\right)$.

Wendepunkte und Krümmungsverhalten

Ableitung des Zählerpolynoms $u(x) = e^x(x-3)$ von $f'(x) = \frac{e^x(x-3)}{x^4}$:

$u'(x) = e^x(x-3) + e^x \cdot 1 = e^x(x-2)$.

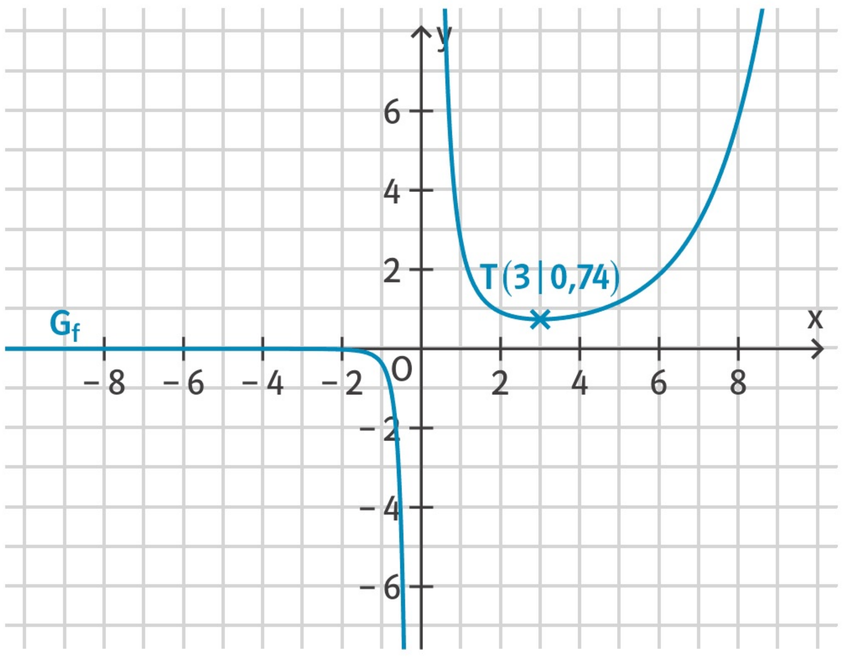
Damit erhält man

$$f''(x) = \frac{e^x(x-2) \cdot x^4 - e^x(x-3) \cdot 4x^3}{(x^4)^2} = \frac{e^x(x-2) \cdot x - e^x(4x-12)}{x^5} = \frac{e^x \cdot (x^2 - 2x - 4x + 12)}{x^5} = \frac{e^x(x^2 - 6x + 12)}{x^5}.$$

$$f''(x) = 0 \iff e^x(x^2 - 6x + 12) = 0 \iff x^2 - 6x + 12 = 0 \iff x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2}$$

Da $\sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 12} = \sqrt{-12}$ nicht definiert ist, hat f keine Wendestelle.
Es gilt $f''(x) < 0$ für alle $x < 0$ und $f''(x) > 0$ für alle $x > 0$, weshalb G_f auf dem Intervall $]-\infty; 0[$ rechtsgekrümmt und auf dem Intervall $]0; +\infty[$ linksgekrümmt ist.

Graph



Beispiel 1

Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern der Definitionsmenge.

a) $f: x \mapsto \frac{2e^x}{x-1}$ **b)** $f: x \mapsto \frac{x^2+1}{e^x-1}$

Lösung

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2e^x}{x-1} = +\infty$, da e^x schneller wächst als x, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2e^x}{x-1} = 0^-$,

($2e^x \to +\infty$, $x - 1 \to +\infty$; $2e^x \to 0$, $x - 1 \to -\infty$)

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{2e^x}{x-1} = -\infty$ und $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{2e^x}{x-1} = +\infty$.

($2e^x \to 2e$, $x - 1 \to 0^-$; $2e^x \to 2e$, $x - 1 \to 0^+$)

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{e^x-1} = 0$, da e^x schneller wächst als x, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{e^x-1} = -\infty$,

($x^2 + 1 \to +\infty$, $e^x - 1 \to +\infty$; $x^2 + 1 \to 1$, $e^x - 1 \to -1$)

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x^2+1}{e^x-1} = +\infty$ und $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{x^2+1}{e^x-1} = -\infty$.

($x^2 + 1 \to 1$, $e^x - 1 \to 0^+$; $x^2 + 1 \to 1$, $e^x - 1 \to 0^-$)

Beispiel 2

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{(x-1)\cdot e^x}{x}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Geben Sie die Nullstelle von f und die Gleichung der senkrechten Asymptote von G_f an.

b) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x-1)\cdot e^x}{x}$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{(x-1)\cdot e^x}{x}$.

c) Zeigen Sie, dass f keine Extremstellen hat.

d) Skizzieren Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse.

Lösung

a) Nullstelle: $x = 1$. Gleichung der senkrechten Asymptote: $x = 0$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\underbrace{\frac{x-1}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty} \right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\underbrace{\frac{x-1}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{e^x}_{\to 0^+} \right) = 0^+$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x-1}{x}$
$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$

c) $f(x) = g(x)\cdot h(x)$ mit

$g(x) = \frac{x-1}{x}$ und $h(x) = e^x$

$g'(x) = \frac{1\cdot x - (x-1)\cdot 1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$ und $h'(x) = e^x$

$f'(x) = \frac{1}{x^2}\cdot e^x + \frac{x-1}{x}\cdot e^x$

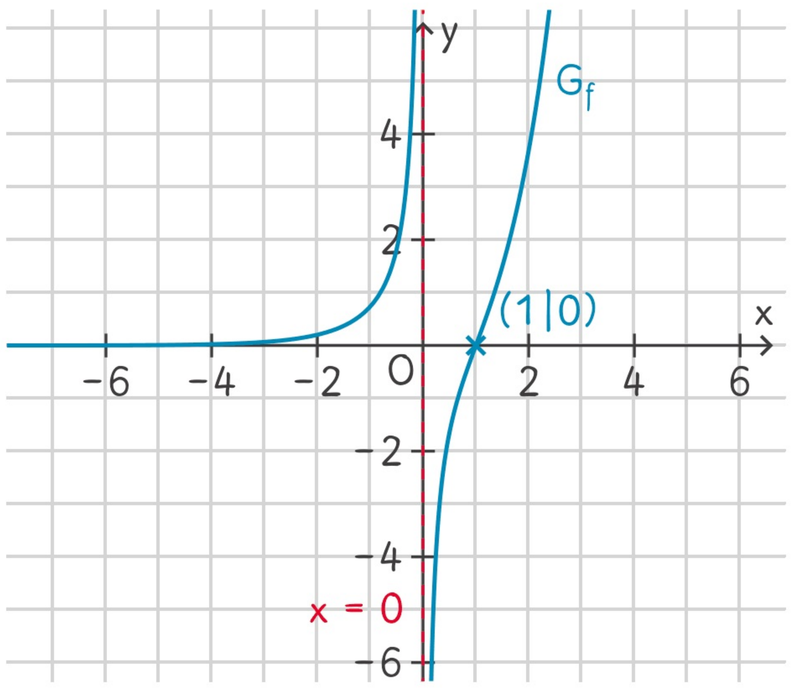
$= e^x \cdot \frac{(x-1)\cdot x + 1}{x^2} = e^x \cdot \frac{x^2 - x + 1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2}$

Da $\sqrt{1 - 4\cdot 1\cdot 1} = \sqrt{-3}$ nicht definiert ist, hat f' keine Nullstelle und damit f keine Extremstelle.

d) Skizze:



Aufgaben

1 Bestimmen Sie die Ableitung von f. Kontrollieren Sie gegenseitig Ihre Ergebnisse.

a) $f: x \mapsto \frac{e^x}{x+1}$ **b)** $f: x \mapsto \frac{2}{x^2}\cdot e^x$ **c)** $f: x \mapsto \frac{\sin(x)}{3x-2}$ **d)** $f: a \mapsto 2a + \frac{3a}{e^a + 1}$

2 Geben Sie die Definitionsmenge von f mit $D = D_{max}$ an und bestimmen Sie die Nullstellen von f.

a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{e^x}$ **b)** $f(k) = \frac{k^3 - 1}{e^k - 1}$ **c)** $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2}$ **d)** $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x}$

e) $f(x) = \frac{x^2 e^x - 4e^x}{1 - x}$ **f)** $f(x) = e^{\frac{1}{x^2 - 2}}$ **g)** $f(x) = \frac{\sin(x)\cdot(x-2)}{x}$ **h)** $f(t) = \frac{t^2 + t - 6}{t(e^t - e)}$

3 Bestimmen Sie einen Term der Ableitung f'. Untersuchen Sie dann mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware das Monotonieverhalten von f auf dem Intervall $[-7{,}5;\ 7{,}5]$.

a) $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ **b)** $f(x) = \frac{2}{x} + \sin(x)$ **c)** $f(z) = -5ze^{-z}$ **d)** $f(x) = \frac{1}{4}e^{x^2} - \frac{1}{x+1}$

4 Bestimmen Sie den Grenzwert.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x}$ **b)** $\lim\limits_{t \to -\infty} \frac{t^2}{e^t}$ **c)** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{-2e^x}{x}$ **d)** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\cos(x)}{x}$

Test 1

Lösungen | Seite 286

5 **Abiturprüfung 2019 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1**

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{e^{2x}}{x}$ mit Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts des Graphen von f.

→ Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

6 Untersuchen Sie das Verhalten von f mit $D = D_{max}$ an den Rändern der Definitionsmenge. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe eines Funktionenplotters.

a) $f(x) = \frac{x+1}{e^x - 1}$ **b)** $f(x) = \frac{x+1}{x \cdot e^x}$ **c)** $f(x) = e^x - \frac{4x^2}{x+1}$ **d)** $f(x) = 2x + \frac{x}{e^x + 1}$

7 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{e^x}{x^2 - 1}$. Ihr Graph wird G_f bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass f keine Nullstellen hat, und geben Sie die Gleichungen der senkrechten Asymptoten von G_f an.
b) Bestimmen Sie das Verhalten von f für $x \to +\infty$.
c) Begründen Sie, dass G_f die x-Achse als Asymptote hat.
d) Bestimmen Sie Lage und Art der Extrempunkte von G_f.
e) Skizzieren Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse.

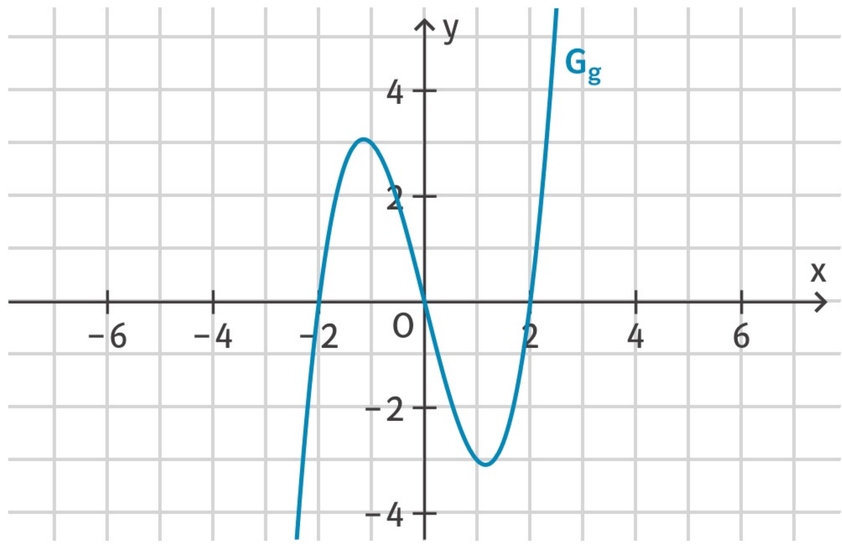
8 Gegeben ist die Funktion $f: t \mapsto \frac{2}{e^{t^2}}$ mit $D = D_{max}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ definiert ist und G_f symmetrisch ist.
b) Untersuchen Sie f und zeichnen Sie G_f.
c) Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die von den Wendetangenten von G_f und der x-Achse eingeschlossen wird.

9 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{0{,}1x^4 + 0{,}9x^3}{x+1}$. Eine der beiden Wendetangenten von G_f schließt mit ihrer Normalen und der x-Achse eine dreieckige Fläche ein. Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.

10 Beurteilen Sie folgende Aussagen, die sich auf den abgebildeten Funktionsgraphen G_g und die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ und $D = D_{max}$ beziehen.

(1) Für die maximale Definitionsmenge von f gilt $D_{max} = \mathbb{R}$.
(2) f hat keine Nullstellen.
(3) Es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
(4) G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung.



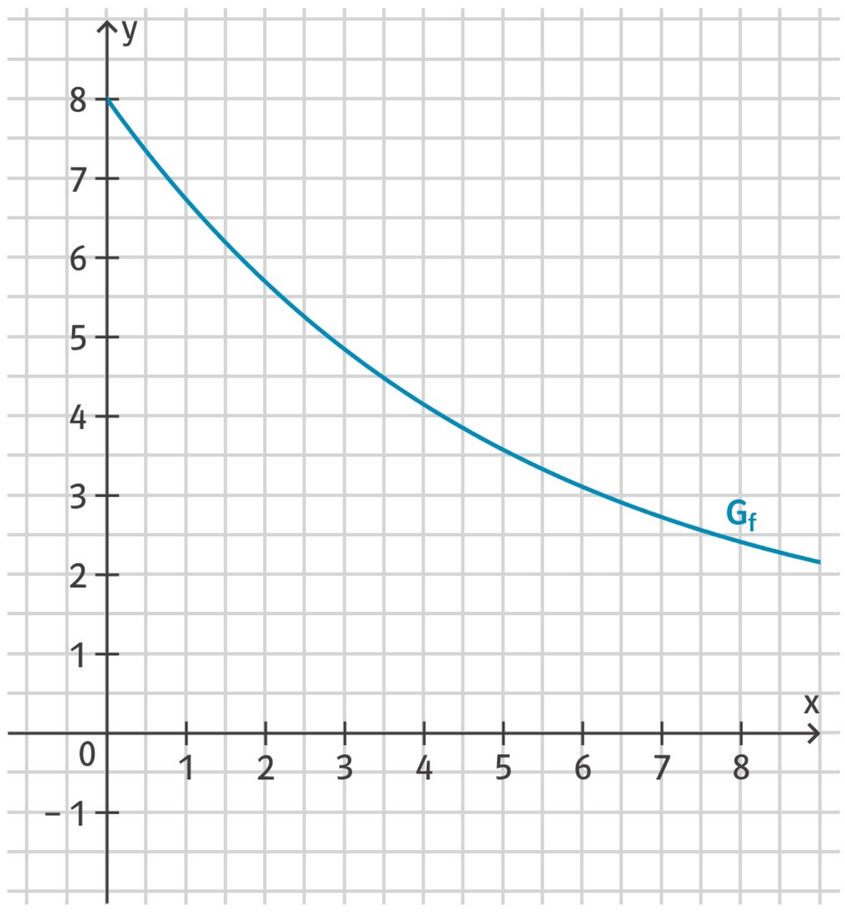
11 Nach der Eröffnung einer neuen Attraktion in einem Vergnügungspark werden die erwarteten täglichen Besucherzahlen modellhaft mithilfe der Funktion $f: x \mapsto \frac{100x - 1000}{e^{0{,}05x}} + 10\,000$ kalkuliert, wobei x die Anzahl der Tage nach Eröffnung der Attraktion angibt.

a) Berechnen Sie f(10) und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang.
b) Ermitteln Sie, wann mit der größten Besucherzahl gerechnet wird. Geben Sie diese größte Besucherzahl an.
c) Interpretieren Sie die Funktion g mit $g(x) = f(30) - f(x)$ im Sachzusammenhang.
d) Mit welcher Besucherzahl kalkulieren die Betreiber des Vergnügungsparks langfristig? Begründen Sie Ihre Antwort.
e) Zeigen Sie, dass nach 50 Tagen die Besucherzahl am stärksten abnimmt.

12 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{[g(x)]^2}{x^2 - 4}$ mit $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2; 2\}$, wobei $g(x)$ ein Polynom vom Grad 2 ist und die Nullstellen x_1 und x_2 (mit $x_1, x_2 \in D_f$) hat. Zeigen Sie, dass G_f an den Stellen x_1 und x_2 waagerechte Tangenten hat.

13 **Abiturprüfung 2020 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, daraus Teilaufgaben 1a) und b)**

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 1 + 7e^{-0,2x}$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}_0^+$; die Abbildung zeigt ihren Graphen G_f.



a) Begründen Sie, dass die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ waagrechte Asymptote von G_f ist. Zeigen Sie rechnerisch, dass f streng monoton abnehmend ist.

Für jeden Wert $s > 0$ legen die Punkte $(0|1)$, $(s|1)$, $(s|f(s))$ und $(0|f(s))$ ein Rechteck mit dem Flächeninhalt $R(s)$ fest.

b) Zeichnen Sie dieses Rechteck für $s = 5$ in die Abbildung ein. Zeigen Sie, dass $R(s)$ für einen bestimmten Wert von s maximal ist, und geben Sie diesen Wert von s an.

(zur Kontrolle: $R(s) = 7s \cdot e^{-0,2s}$)

Hinweis zu Aufgabe 13 b):
Übertragen Sie zunächst die Abbildung in Ihr Heft und zeichnen Sie dann das Rechteck.

14 **Abiturprüfung 2020 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 2**

Die in $\mathbb{R}_0^+$ definierte Funktion $A: x \mapsto \frac{8}{f(x)}$ beschreibt modellhaft die zeitliche Entwicklung des Flächeninhalts eines Algenteppichs am Südufer eines Sees. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Tagen und $A(x)$ der Flächeninhalt in Quadratmetern.

Hinweis:
$f(x)$ bezieht sich auf die Funktion f aus Aufgabe 13.

a) Bestimmen Sie $A(0)$ sowie $\lim\limits_{x \to +\infty} A(x)$ und geben Sie jeweils die Bedeutung des Ergebnisses im Sachzusammenhang an. Begründen Sie mithilfe des Monotonieverhaltens der Funktion f, dass der Flächeninhalt des Algenteppichs im Laufe der Zeit ständig zunimmt.

b) Bestimmen Sie denjenigen Wert x_0, für den $A(x_0) = 4$ gilt, und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang. *(zur Kontrolle: $x_0 \approx 9,7$)*

c) Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate des Flächeninhalts des Algenteppichs zu Beobachtungsbeginn.

d) Nur zu dem Zeitpunkt, der im Modell durch x_0 (vgl. Aufgabe 14 b) beschrieben wird, nimmt die momentane Änderungsrate des Flächeninhalts des Algenteppichs ihren größten Wert an. Geben Sie eine besondere Eigenschaft des Graphen von A im Punkt $(x_0|A(x_0))$ an, die sich daraus folgern lässt, und begründen Sie Ihre Angabe.

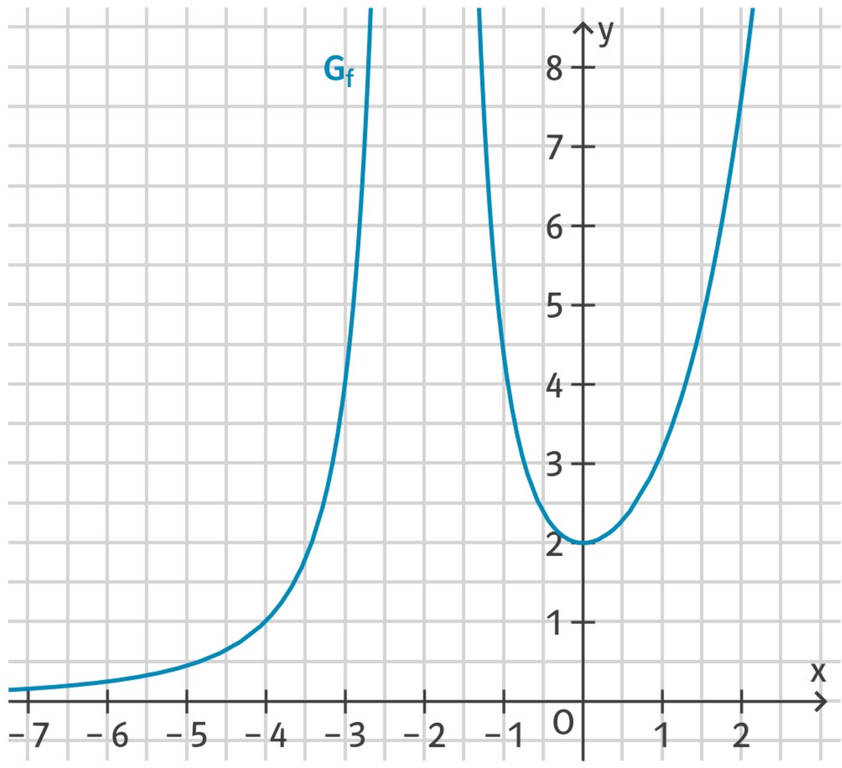
e) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion A unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem $(0 \le x \le 26$ und $-2 \le y \le 10)$.

f) Um die zeitliche Entwicklung des Flächeninhalts eines Algenteppichs am Nordufer des Sees zu beschreiben, wird im Term $A(x)$ die im Exponenten zur Basis e enthaltene Zahl $-0,2$ durch eine kleinere Zahl ersetzt. Vergleichen Sie den Algenteppich am Nordufer mit dem am Südufer

- hinsichtlich der durch $A(0)$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} A(x)$ beschriebenen Eigenschaften (vgl. Aufgabe 14 a).
- hinsichtlich der momentanen Änderungsrate des Flächeninhalts zu Beobachtungsbeginn (vgl. Aufgabe 14 c).

Skizzieren Sie – ausgehend von diesem Vergleich – in Ihrer Abbildung den Graphen einer Funktion, die eine mögliche zeitliche Entwicklung des Flächeninhalts des Algenteppichs am Nordufer beschreibt.

15 Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $f = g + h$, die durch Verknüpfung der Funktionen g und h entsteht. F ist eine Stammfunktion von f.



a) Gehen Sie im Folgenden arbeitsteilig vor und erklären Sie sich gegenseitig Ihre Ergebnisse. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

(1) F hat eine Extremstelle.

(2) Die Ableitung f' von f hat eine Nullstelle.

(3) Der Graph von F hat einen Wendepunkt.

(4) f' hat eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel.

(5) Ein Summand von $F(x)$ ist der Term einer einfachen gebrochen-rationalen Funktion.

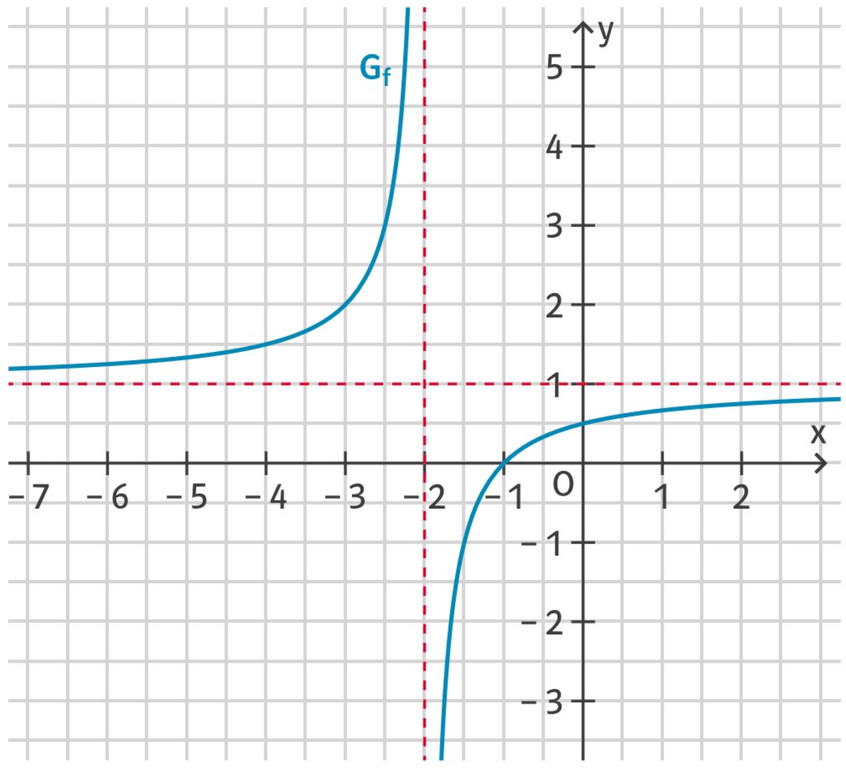
(6) $g(x) = e^x$ könnte ein Summand von $F(x)$ sein.

b) Bestimmen Sie einen konkreten Funktionsterm von F. Diskutieren und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe eines Funktionenplotters.

Test 2

Lösungen | Seite 287

16 Gegeben ist die Funktion $h: x \mapsto \frac{e^x x^2}{x+1}$ mit $D = D_{max}$. Ihr Graph wird mit G_h bezeichnet.



a) Geben Sie die Definitionsmenge und die Nullstellen von h an.

b) Untersuchen Sie das Verhalten von h an den Rändern der Definitionsmenge.

c) Zeigen Sie, dass G_h genau einen Extrempunkt hat, und zeichnen Sie G_h.

17 Gegeben sind der Graph der Funktion f und die Funktion $g: x \mapsto e^{f(x)}$ mit $D = D_{max}$.

a) Geben Sie die Definitionsmenge von g an.

b) Ermitteln Sie das Grenzverhalten von g an den Rändern der Definitionsmenge.

c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von g.

18 Die Regel von de L'Hôpital besagt unter anderem: Gegeben sei ein offenes Intervall I, eine Stelle $a \in I$ und zwei Funktionen u und v, die auf $I \setminus \{a\}$ differenzierbar seien. Außerdem sei $v'(x) \neq 0$ für alle $x \in I \setminus \{a\}$ und $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \lim\limits_{x \to a} v(x) = 0$. Wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$ existiert, dann stimmt er mit dem Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)}$ überein.

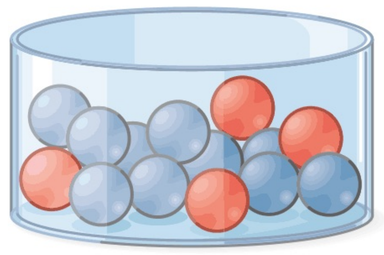
Bestimmen Sie jeweils das Grenzverhalten der Funktionen $u: x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ und $v: x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ für $x \to 0$.

vgl. hierzu die Exkursion auf Seite 171

Grundwissen Test

Lösungen | Seite 287

G 19 Aus einer Urne mit zehn blauen und vier roten Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Es werden die Ereignisse A: „Es wird genau eine rote Kugel gezogen" und B: „Im zweiten Zug wird eine blaue Kugel gezogen" betrachtet. Beurteilen Sie, ob die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind.



Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

Wiederholen

1 Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Nullstellen der Funktion f mit $D = D_{max}$.

a) $f: x \mapsto \frac{x-3}{e^x}$ **b)** $f: a \mapsto \frac{2e^a}{a^2-6a+9}$ **c)** $f: x \mapsto \frac{0{,}5x+1}{e^x-1}$ **d)** $f: x \mapsto \frac{\sin(x)}{(x-1)(x+2)}$

2 Bestimmen Sie einen Term der Ableitung der Funktion g und vereinfachen Sie diesen so weit wie möglich.

a) $g: x \mapsto \frac{3x^2}{2-x}$ **b)** $g: x \mapsto 2x + \frac{3}{x-4}$ **c)** $g: t \mapsto -\frac{e^{t^2}}{0{,}5t}$ **d)** $g: x \mapsto \frac{x-4}{2xe^x}$

3 Ordnen Sie jeder der Funktionen (A) bis (D) eine passende Stammfunktion (1) bis (4) zu. Begründen Sie Ihre Zuordnungen.

(A) $x \mapsto -\frac{10}{(x-4)^3}$ (B) $x \mapsto -15x^{-4}$ (1) $x \mapsto \frac{5}{x^3}$ (2) $x \mapsto \frac{x^2}{(x-4)^2}$

(C) $x \mapsto -\frac{6}{x^4}$ (D) $x \mapsto \frac{-8x}{(x-4)^3}$ (3) $x \mapsto \frac{5}{(x-4)^2}$ (4) $x \mapsto 2x^{-3}$

4 Ermitteln Sie das Verhalten der Funktion f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.

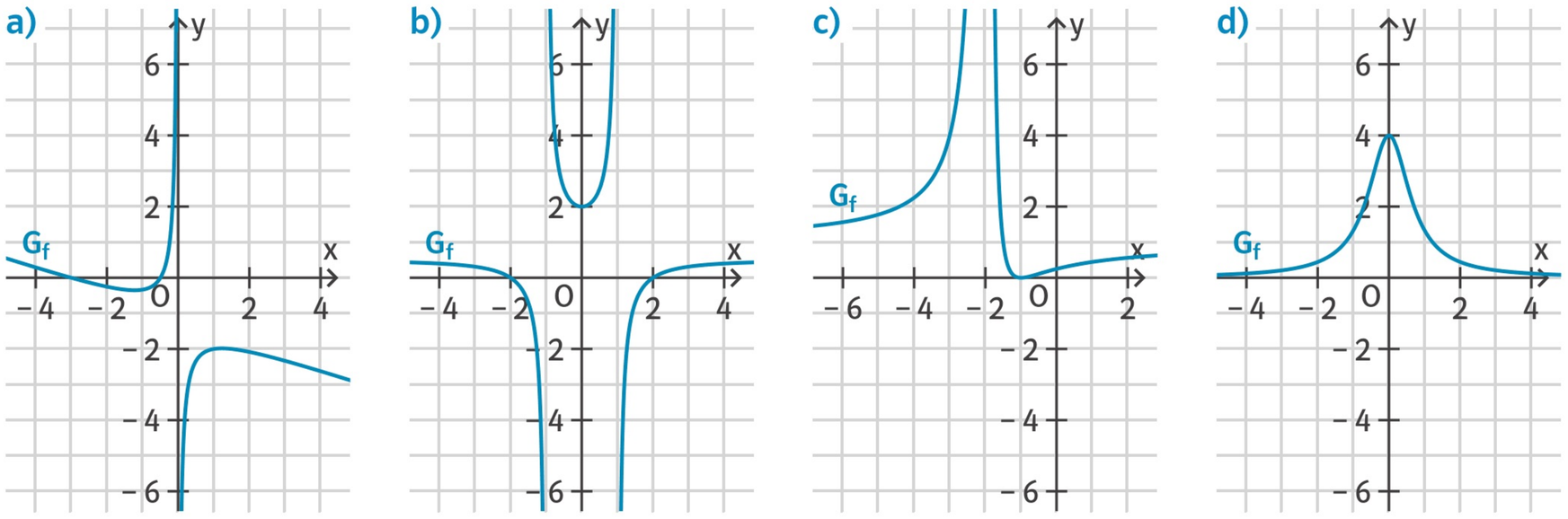
a) $f: x \mapsto \frac{x^2}{\frac{1}{3}e^x}$ **b)** $f: x \mapsto \frac{5e^x}{x^3-12}$ **c)** $f: x \mapsto \frac{2e^x+2}{x^2-8x}$ **d)** $f: x \mapsto e^x - \frac{1}{x}$

Vertiefen

5 Bestimmen Sie einen Term der Ableitung der Funktion f sowohl mithilfe der Quotientenregel als auch mithilfe der Produktregel. Zeigen Sie, dass beide Terme äquivalent sind.

a) $f: x \mapsto \frac{4}{x-8}$ **b)** $f: \mapsto x^{-1}\left(\frac{2}{3}x+1\right)$ **c)** $f: \mapsto 3x^2(x-2)^{-2}$ **d)** $f: x \mapsto \frac{kx^2+2}{-x}$ $(k \in \mathbb{R})$

6 Gegeben ist der Graph G_f einer einfachen gebrochen-rationalen Funktion f. Geben Sie jeweils die Anzahl der Nullstellen der ersten und zweiten Ableitung an. Begründen Sie Ihre Angabe.



7 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{-(-2x+1)^2}{-x}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an G_f im Punkt $(2|4{,}5)$.

b) Geben Sie die Polstelle der Ableitung von f und ihre Art an.

8 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \frac{2-x^2}{x^2-4}$ mit $D = D_{max}$. Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.

a) Geben Sie die Definitionsmenge von g an.

b) Zeigen Sie, dass g genau zwei Nullstellen hat und G_g symmetrisch ist.

c) Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_g an.

d) Bestimmen Sie die Monotonieintervalle von g.

e) Erklären Sie die Besonderheit des Punkts $P(0|-0{,}5)$.

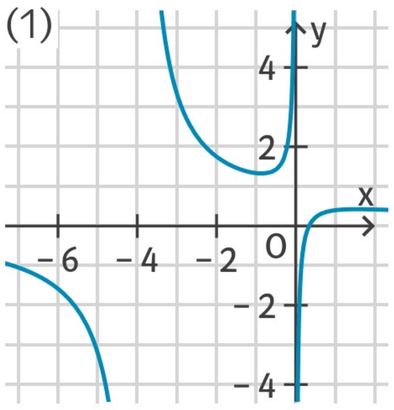
f) Zeichnen Sie G_g unter Einbezug der bisherigen Ergebnisse.

g) Ergänzen Sie den Graphen der Ableitung von f in Ihrer Zeichnung.

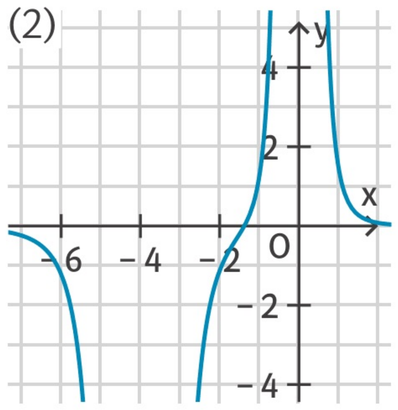
9 Gegeben sind die Funktionen $f: x \mapsto \frac{x-1}{x}$ und $g: x \mapsto \frac{0{,}5(x-2)}{x-1} + 2$. Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion g aus dem Graphen der Funktion f hervorgeht. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.

10 Die Abbildungen zeigen die Graphen der Funktion f, einer ihrer Stammfunktionen F und ihrer Ableitungen f′ und f″. Ordnen Sie jeder Funktion den passenden Graphen zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.

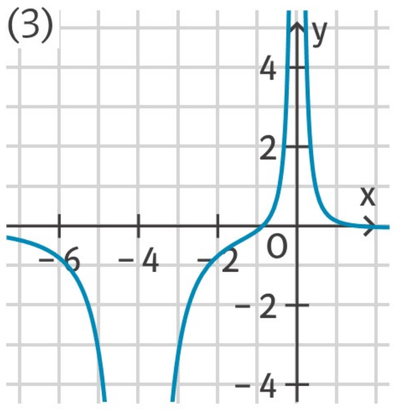
(1)



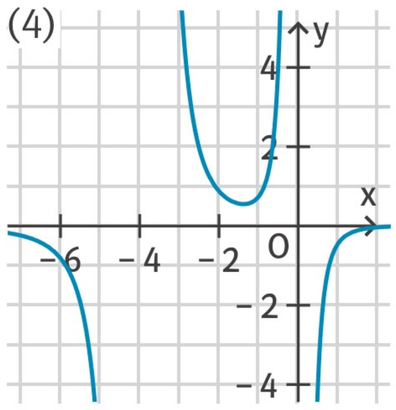
(2)



(3)



(4)



11 Gegeben sind die Funktionen $f: x \mapsto \frac{1}{x} - 2$, $g: x \mapsto \frac{x+2}{x-1}$ und $h: x \mapsto \frac{1}{(x+3)^2} + 1$. Ihre Graphen werden mit G_f, G_g und G_h bezeichnet. Arbeiten Sie im Folgenden arbeitsteilig und erklären Sie sich gegenseitig Ihre Lösungen.

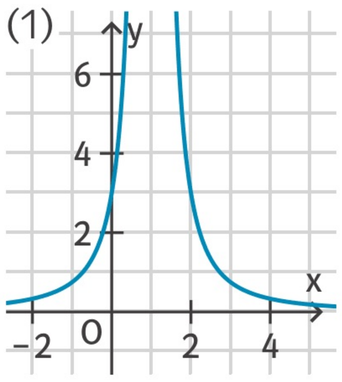
a) Skizzieren Sie G_f, G_g und G_h.

b) Beschreiben Sie das Monotonieverhalten der Funktionen f, g und h sowie das Krümmungsverhalten ihrer Graphen G_f, G_g und G_h.

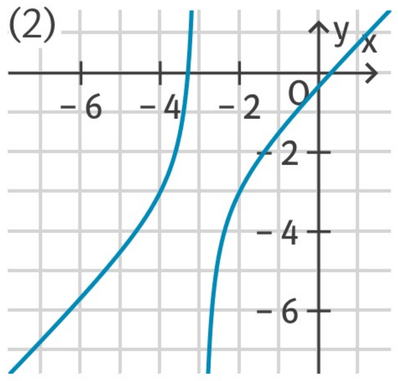
c) Begründen Sie, welcher der gegebenen Graphen der Graph der Ableitung von g ist und welcher der Graph einer Stammfunktion von h ist.

→ Strategie | Seite 257
Ausschlussprinzip

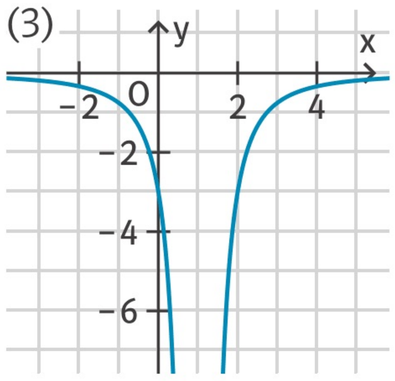
(1)



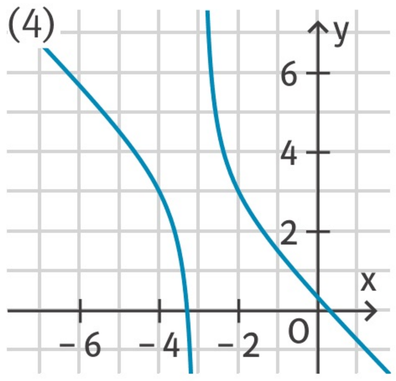
(2)



(3)



(4)



d) Zeigen Sie, dass G_f, $G_{f'}$ und $G_{f''}$ die gleiche senkrechte Asymptote haben.

12 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion h mit maximaler Definitionsmenge, bestimmen Sie das Verhalten von h an den Rändern der Definitionsmenge und ermitteln Sie Lage und Art der Extrempunkte von G_h. Skizzieren Sie unter Einbezug der bisherigen Ergebnisse den Funktionsgraphen G_h. Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.

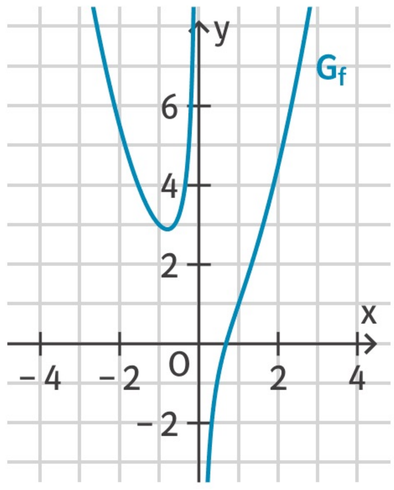
a) $h(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2}$ **b)** $h(x) = \frac{(x+2)^2}{e^x}$ **c)** $h(x) = \frac{-e^x}{1{,}2x}$ **d)** $h(x) = \frac{4x^2 - 4}{x^2 + 1}$

13 Gegeben ist der Graph der Ableitung der gebrochen-rationalen Funktion f. Beurteilen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

(1) Die Funktion f ist im Intervall $]-\infty; 2[$ streng monoton zunehmend.
(2) Die Funktion f hat keine Extremstelle.
(3) G_f besitzt zwei Wendepunkte.
(4) G_f ist nicht symmetrisch.
(5) Es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -0{,}5$.
(6) Die zweite Ableitung von f hat eine Polstelle mit VZW.
(7) G_f besitzt eine schräge Asymptote.

14 Gegeben ist die Funktionenschar $g_k: x \mapsto \frac{2x^2 + 8x}{x^2 + kx + 1}$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{4{,}25\}$. Ermitteln Sie arbeitsteilig Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Funktionen g_1, g_2 und g_4. Erläutern Sie sich gegenseitig Ihre Erkenntnisse und prüfen Sie diese mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.

15 Die Funktion f mit $D = D_{max}$ ist eine Verknüpfung der Funktionen g und h mit $g(x) = \frac{x-1}{x}$ und $h(x) = x^2$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der Funktion f.



a) Geben Sie einen Funktionsterm sowie die Definitionsmenge von f an.

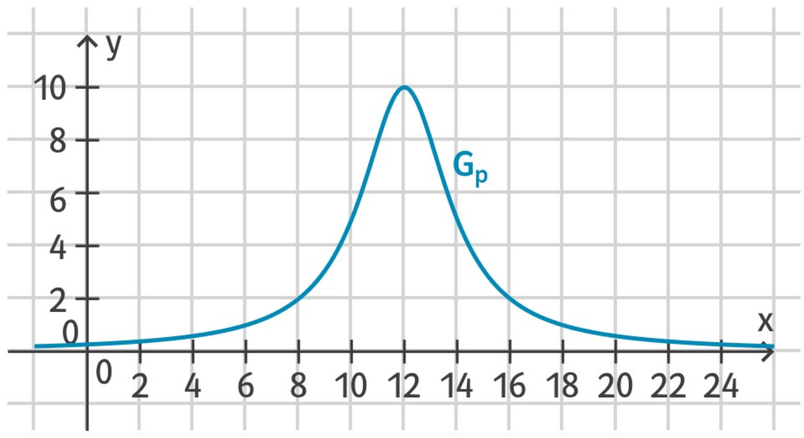
b) Skizzieren Sie die Funktionsgraphen der Funktionen f, g und h in ein gemeinsames Koordinatensystem.

c) Beschreiben Sie, in welchen Bereichen von D_f der Verlauf von G_f von g bzw. von h dominiert wird.

Vernetzen

16 **Abiturprüfung 2021 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, daraus Teilaufgaben 3 a), b) und c)**

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $p: x \mapsto \frac{40}{(x-12)^2+4}$; die Abbildung zeigt den Graphen G_p von p.



a) Beschreiben Sie, wie G_p aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h: x \mapsto \frac{5}{x^2+4}$ schrittweise hervorgeht, und begründen Sie damit, dass G_p bezüglich der Gerade mit der Gleichung $x = 12$ symmetrisch ist.

Eine auf einem Hausdach installierte Photovoltaikanlage wandelt Lichtenergie in elektrische Energie um. Für $4 \leq x \leq 20$ beschreibt die Funktion p modellhaft die zeitliche Entwicklung der Leistung der Anlage an einem bestimmten Tag. Dabei ist x die seit Mitternacht vergangene Zeit in Stunden und $p(x)$ die Leistung in kW (Kilowatt).

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Uhrzeit am Nachmittag auf Minuten genau, ab der die Leistung weniger als 40 % ihres Tageshöchstwerts von 10 kW beträgt.

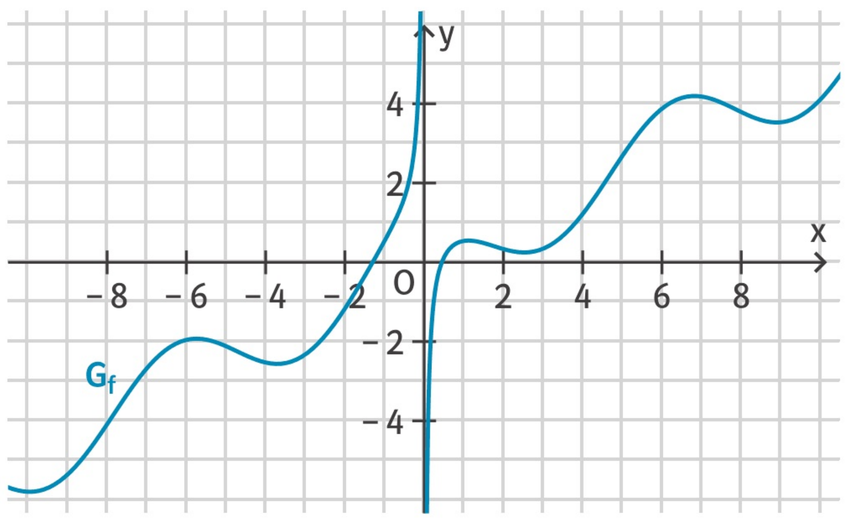
c) Die Funktion p besitzt im Intervall $[4; 12]$ eine Wendestelle. Geben Sie die Bedeutung dieser Wendestelle im Sachzusammenhang an.

17 Die Gravitationskraft F_G (in N) zwischen der Erde und einem x km von der Erdoberfläche entfernten Körper mit der Masse 1 kg kann mit der Formel $F_G = \frac{398{,}3781 \cdot 10^6}{(6371+x)^2}$ bestimmt werden.

a) Bestimmen Sie F_G für $x = 0$ und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

b) Zeigen Sie, dass für wachsende Entfernungen F_G streng monoton abnimmt, und interpretieren Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{398{,}3781 \cdot 10^6}{(6371+x)^2}$ im Sachzusammenhang.

18 Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $f: x \mapsto g(x) + h(x)$. Bestimmen Sie einen konkreten Funktionsterm von f. Diskutieren und erläutern Sie sich gegenseitig Ihre Vorgehensweise. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe eines Funktionenplotters.



19 Folgender Beweis zeigt, dass $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ gilt:

Für alle $x > 0$ gilt: $-1 \leq \sin(x) \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} \leq \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} \leq \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow 0 \leq \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0.$

Vollziehen Sie gemeinsam den Beweis nach und bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2\cos(x)}{x}$.

Die Regel von de L'Hôpital

Guillaume François Antoine de L'Hôpital ist bekannt für den nach ihm benannten Satz **Regel von de L'Hôpital**, auch wenn dieser Satz eigentlich von Johann I Bernoulli entdeckt worden ist. Daher wird er auch **Regel von Bernoulli-de-L'Hôpital** genannt.

Guillaume François Antoine de L'Hôpital (1661 – 1704), manchmal auch de L'Hospital geschrieben, war ein französischer Mathematiker. Er engagierte den Schweizer Mathematiker Johann I Bernoulli (1667 – 1748) als Hauslehrer. Gegen ein hohes Gehalt schloss er mit ihm die Vereinbarung, dass ihm Bernoulli seine Entdeckungen zur freien Verfügung überlasse.

Untersucht man eine Funktion der Form $f: x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ (u und v sind Funktionen, $v(x) \neq 0$) können sich bei der Ermittlung von Grenzwerten u.a. folgende Problemstellungen ergeben:

(1) Bei der Bestimmung des Grenzwerts $\lim\limits_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)}$

- konvergieren beide Funktionen u und v gegen null: $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to a} v(x) = 0$;
- divergieren beide Funktionen u und v: $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \pm\infty$ und $\lim\limits_{x \to a} v(x) = \pm\infty$.

(2) Bei der Bestimmung des Grenzwerts $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{u(x)}{v(x)}$

- konvergieren beide Funktionen u und v gegen null: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} u(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to \pm\infty} v(x) = 0$;
- divergieren beide Funktionen u und v: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} u(x) = \pm\infty$ und $\lim\limits_{x \to \pm\infty} v(x) = \pm\infty$.

In diesen Fällen ist es schwierig, eine Aussage zum Grenzverhalten der Funktion f für $x \to a$ bzw. $x \to \infty$ zu treffen. Diese Problemstellungen können jedoch mit den Regeln von L'Hôpital gelöst werden.

Satz (Regel von de L'Hôpital): Gegeben sei ein offenes Intervall I, eine Stelle $a \in I$ und zwei Funktionen u und v, die auf $I \setminus \{a\}$ differenzierbar seien. Außerdem sei $v'(x) \neq 0$ für alle $x \in I \setminus \{a\}$. Dann gilt:

Falls $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \lim\limits_{x \to a} v(x) = 0$ oder $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \lim\limits_{x \to a} v(x) = \pm\infty$ gilt,

so folgt $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}}$,

vorausgesetzt der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$ existiert.

Die Regel von de L'Hôpital ist auch für einseitige Grenzwerte und für Grenzwerte bei $\pm\infty$ gültig, d.h., man kann $x \to a$ durch $x \to a,\ x < a$ oder $x \to a,\ x > a$ oder $x \to \pm\infty$ ersetzen.

Sollte $\lim\limits_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$ wieder ein unbestimmter Ausdruck der Form „$\frac{0}{0}$“ oder „$\frac{\infty}{\infty}$“ sein, kann die Regel erneut angewendet werden.

Die Voraussetzungen des Satzes sind bei beiden Anwendungen jeweils erfüllt.

Eine mögliche Grenzwertuntersuchung mithilfe der Regel von de L'Hôpital wird anhand der Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2}{e^x}$ gezeigt. Betrachtet man $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x}$, so liegt ein unbestimmter Ausdruck der Form „$\frac{\infty}{\infty}$“ vor, da $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ gilt. Nach der Regel von de L'Hôpital gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x}$. Wegen $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ liegt erneut ein unbestimmter Ausdruck der Form „$\frac{\infty}{\infty}$“ vor. Man muss die Regel erneut anwenden und erhält $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$.

1 Bestimmen Sie mithilfe der Regel von de L'Hôpital den Grenzwert der Funktion f für $x \to a$.

a) $f: x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{0{,}5x}$, $a = 0$

b) $f: x \mapsto \frac{x^2}{e^x - 1}$, $a = 0$

c) $f: x \mapsto \frac{4x^2 - 64}{x^2 - x - 12}$, $a = 4$

d) $f: x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$, $a = 0$

2 Bestimmen Sie mithilfe der Regel von de L'Hôpital den Grenzwert.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{5x}}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{(2x+2)^2}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}$

Rückblick

Quotientenregel

Sind die Funktionen u und v differenzierbar, dann ist $f: x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ für alle x mit $v(x) \neq 0$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$.

Leitet man gebrochen-rationale Funktionen ab, können Terme auftreten, die nicht vollständig gekürzt sind. Es ist jedoch häufig von Vorteil, mit vollständig gekürzten Termen zu arbeiten.

$f: x \mapsto \frac{2x}{(x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{2 \cdot (x+1)^2 - 2x \cdot 2(x+1)}{((x+1)^2)^2}$

$= \frac{2(x+1)[(x+1) - 2x]}{(x+1)^4}$

$= \frac{2(-x+1)}{(x+1)^3}$

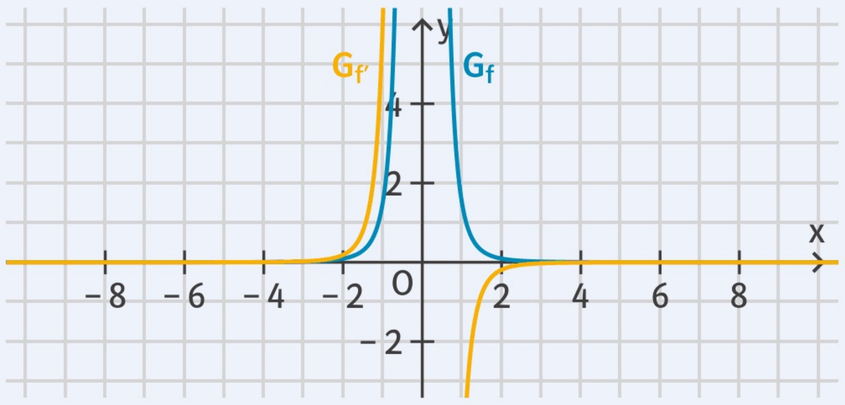
Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten und ihre Ableitung

Potenzfunktionen mit negativem ganzzahligem Exponenten sind gebrochen-rational.

Die Funktion $f: x \mapsto x^k$ (mit $k \in \mathbb{Z}^-$) ist differenzierbar auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ und für ihre Ableitung gilt $f'(x) = kx^{k-1}$.

$f(x) = 1{,}5x^{-4} = \frac{1{,}5}{x^4}$

$f'(x) = 1{,}5 \cdot (-4)x^{-4-1} = -6x^{-5}$



Aspekte bei der Untersuchung einer Funktion f und ihres Graphen G_f

Mithilfe des Funktionsterms können ermittelt werden:

- Definitionsmenge von f
- Symmetrieverhalten von G_f
- Nullstellen von f und Koordinaten des Schnittpunktes von G_f mit der y-Achse
- Verhalten von f an den Rändern der Definitionsmenge
- Gleichungen der Asymptoten von G_f
- Extrempunkte von G_f und Monotonieverhalten von f
- Wendepunkte und Krümmungsverhalten von G_f

$f: x \mapsto \frac{(x-1)^2}{4(x-2)}$ *mit* $D = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

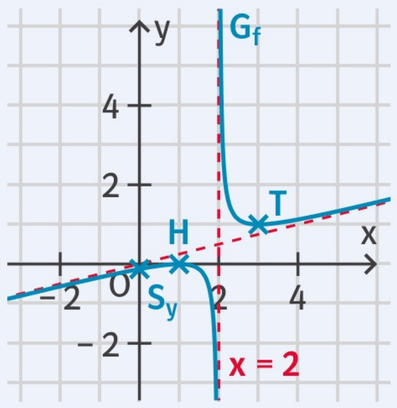
$f(-x) \neq f(x)$; $f(-x) \neq -f(x)$; *keine Sym. erkennbar*

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $S_y\left(0 \middle| -\frac{1}{8}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$

Es gibt eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = 2$ *und eine schräge Asymptote.*



$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{4(x-2)^2} = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ *oder* $x = 3$

$]-\infty; 1]$ *und* $[3; \infty[$: *f nimmt streng monoton zu.*

$[1; 2[$ *und* $]2; 3]$: *f nimmt streng monoton ab.*

$f(1) = 0$ *und* $f(3) = 1$; $H(1|0)$ *und* $T(3|1)$.

$f''(x) = \frac{1}{2(x-2)^3} \neq 0$; *keine Wendestellen.*

$]-\infty; 2[$: G_f *ist rechtsgekrümmt.*

$]2; \infty[$: G_f *ist linksgekrümmt.*

Untersuchung von Verknüpfungen von Funktionen aller bisherigen Funktionstypen

Mithilfe der Quotientenregel können beliebige Funktionen der Form $x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ abgeleitet werden, wobei u und v differenzierbar sind und $v(x) \neq 0$ gilt. Die Quotientenregel gilt insbesondere auch dann, wenn $u(x)$ und $v(x)$ keine Polynome sind. Damit lassen sich alle bisherigen Arten von Verknüpfungen mithilfe der Faktor-, der Summen-, der Produkt-, der Ketten- und der Quotientenregel ableiten.

$f: x \mapsto \frac{3x - 4}{e^x}$

$f'(x) = \frac{3 \cdot e^x - (3x-4) \cdot e^x}{(e^x)^2}$

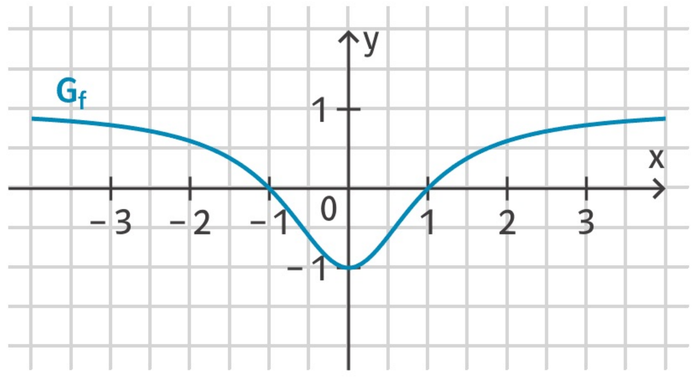
$= \frac{3 - (3x-4)}{e^x}$

$= \frac{-3x + 7}{e^x}$

1 **Abiturprüfung 2020 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, daraus Teilaufgaben 1b) und c)**

→ Lösungen | Seite 287

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; die Abbildung zeigt ihren Graphen G_f.



a) Untersuchen Sie rechnerisch das Monotonieverhalten von G_f.

$\left(\text{zur Kontrolle: } f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}\right)$

b) Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Tangente t an G_f im Punkt $(3\,|\,f(3))$. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem t die x-Achse schneidet, und zeichnen Sie t in die Abbildung ein.

Hinweis zu Aufgabe 1b): Übertragen Sie zunächst G_f in Ihr Heft und ergänzen Sie in dieser Zeichnung die Tangente.

2 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \frac{x^2 - 4x}{(x - 2)^2}$. Dervis und Moritz diskutieren miteinander. Beurteilen Sie ihre Aussagen.

Moritz:
„Beim Ableiten der Funktion g wird der Nenner quadriert, weshalb die Ableitung die Polstelle $x = 2$ hat. Es ist eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel, da sie 4. Ordnung ist."

Dervis:
„Wenn eine Funktion eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel hat, dann hat ihre Ableitung eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel."

3 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{0{,}5\,e^x}{x^2}$ mit $D = D_{max}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Begründen Sie, dass f keine Nullstellen hat.

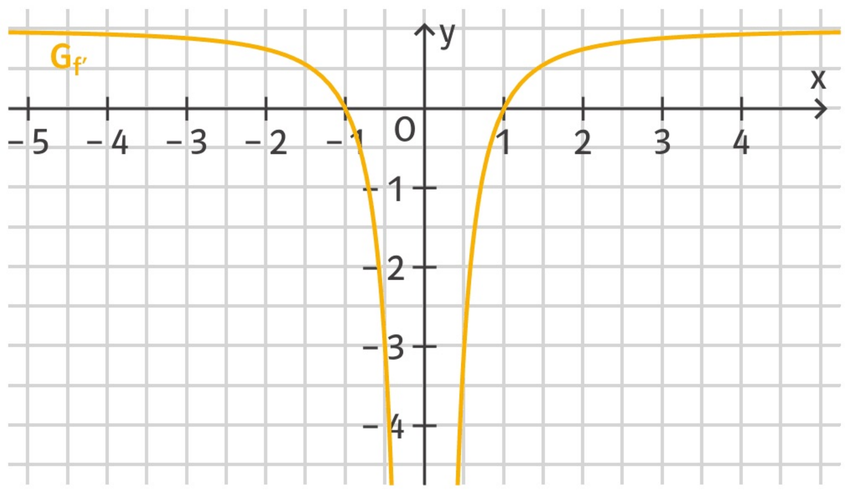
b) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern der Definitionsmenge.

c) Ermitteln Sie Lage und Art der Extrempunkte von G_f.

d) Zeichnen Sie G_f. Ergänzen Sie den Graphen der Ableitung von f in Ihrer Zeichnung.

e) Geben Sie anhand Ihrer Zeichnung die Anzahl der Nullstellen der 2. Ableitung von f und das Krümmungsverhalten von G_f an. Begründen Sie Ihre Angabe.

4 Die Abbildung zeigt den Graphen der Ableitung f' der Funktion f.



a) Geben Sie die Monotonieintervalle und Extremstellen von f an.

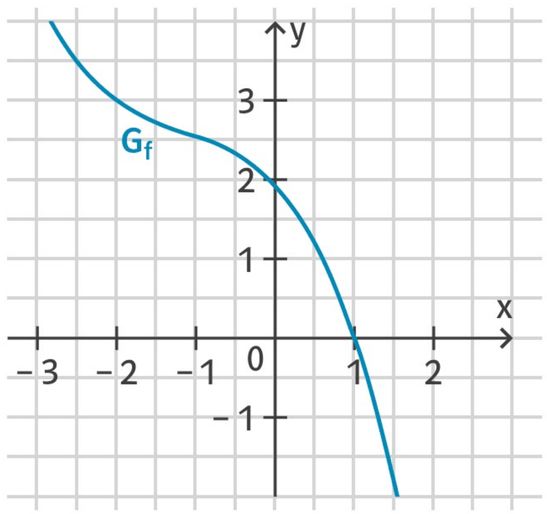
b) Hat der Graph von f Wendepunkte? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Die Funktion f hat ausschließlich die Nullstelle $x = 1$ und G_f verläuft durch den Punkt $P(-1\,|\,-4)$. Skizzieren Sie den Graphen von f.

d) Beschreiben Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f.

5 **Abiturprüfung 2021 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 4**

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f. G_f ist streng monoton fallend und schneidet die x-Achse im Punkt $(1\,|\,0)$. Betrachtet wird ferner die Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ und maximalem Definitionsbereich D_g.

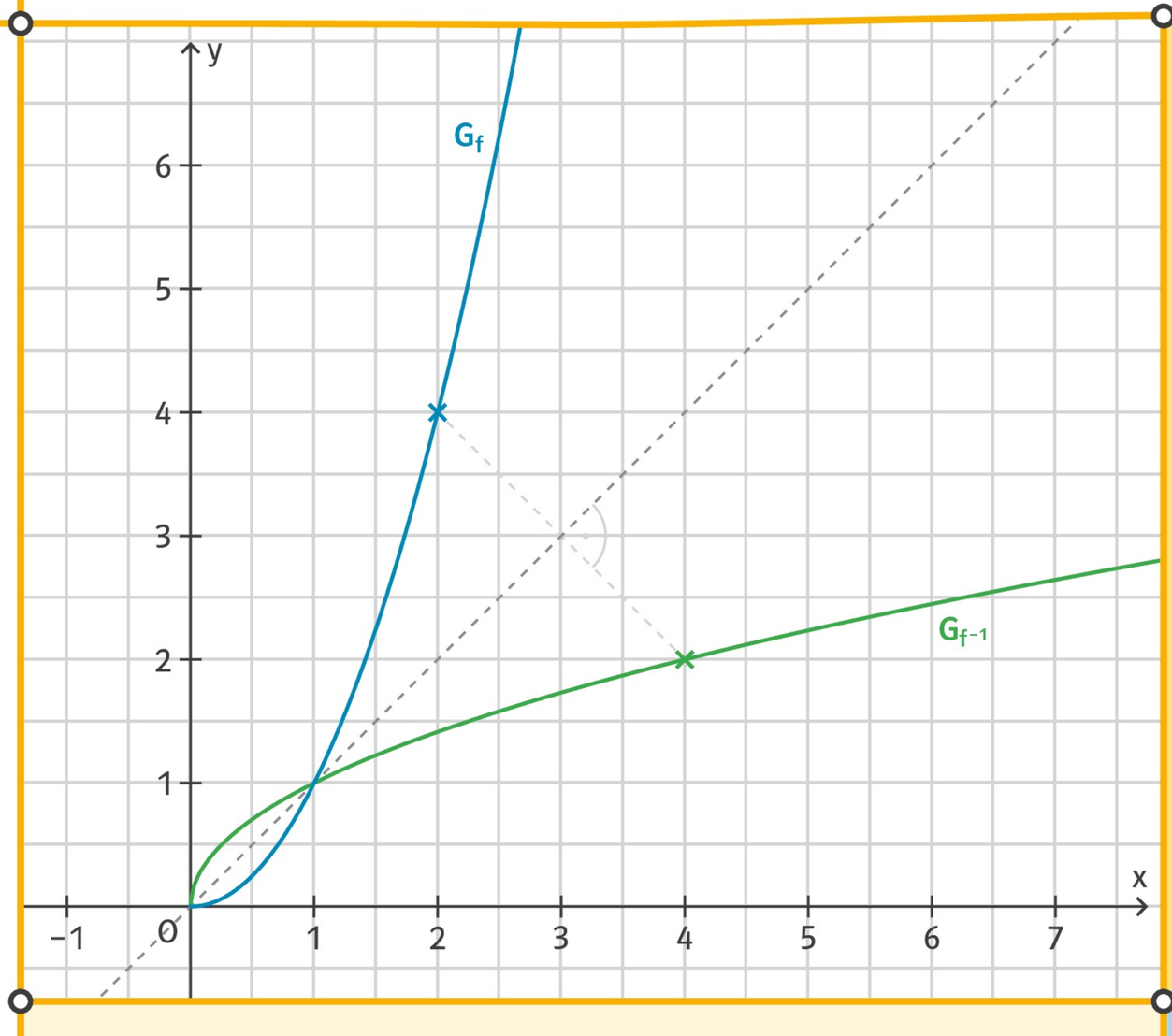


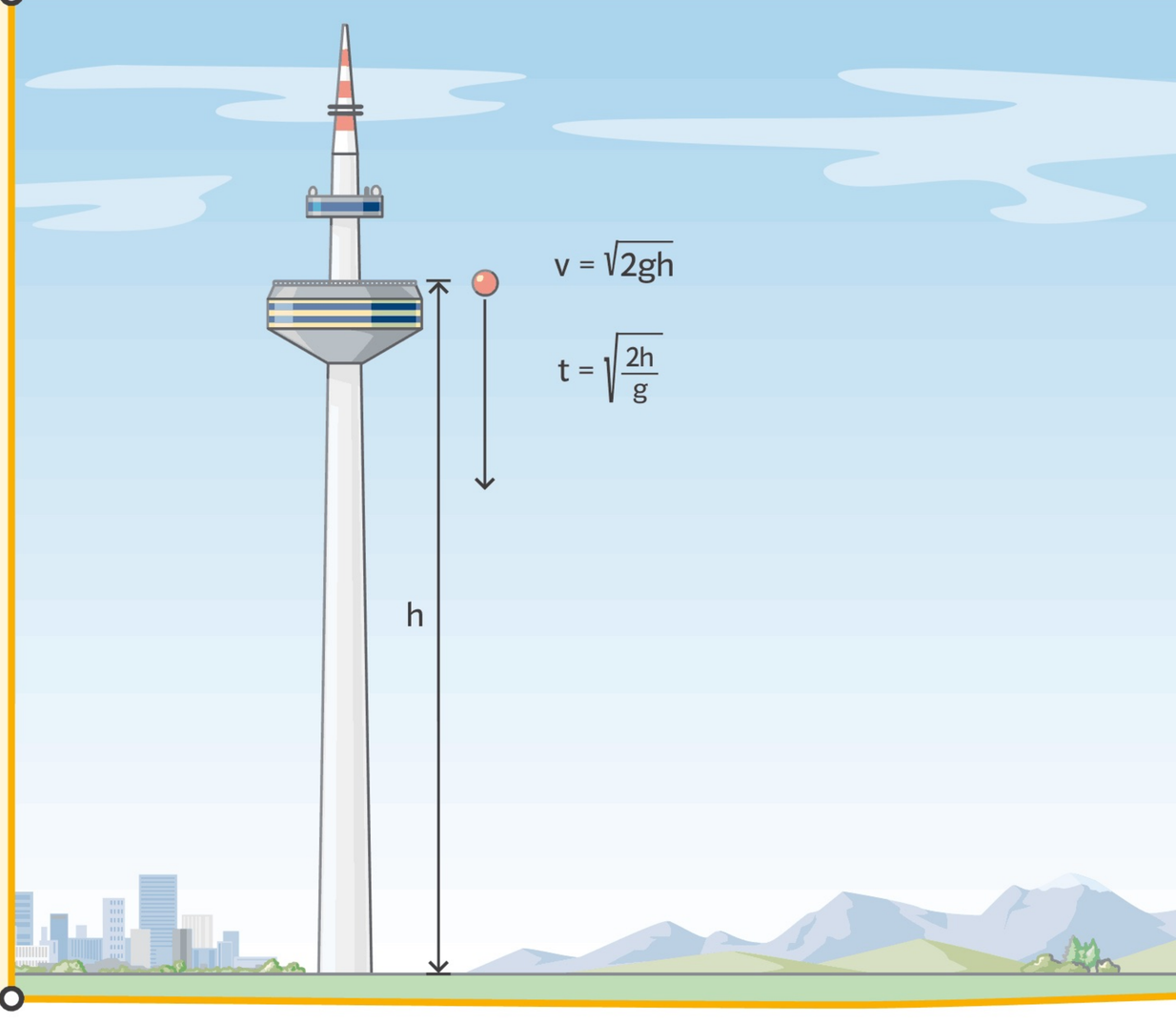
a) Begründen Sie, dass $x = 1$ nicht in D_g enthalten ist, und geben Sie den Funktionswert $g(-2)$ an.

b) Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f und g.

Hinweis zu Aufgabe 5b): Übertragen Sie zunächst G_f in Ihr Heft.

VI Wurzelfunktion





Das können Sie schon

- Potenzgesetze anwenden
- Ableitungsregeln anwenden
- Gleichungen nach einer Variable umstellen
- Beschreiben, wie ein Graph aus einem anderen Graphen hervorgeht
- Eigenschaften von Funktionen und deren Graphen untersuchen

Test

Check-in
zu Kapitel VI
Seite 267

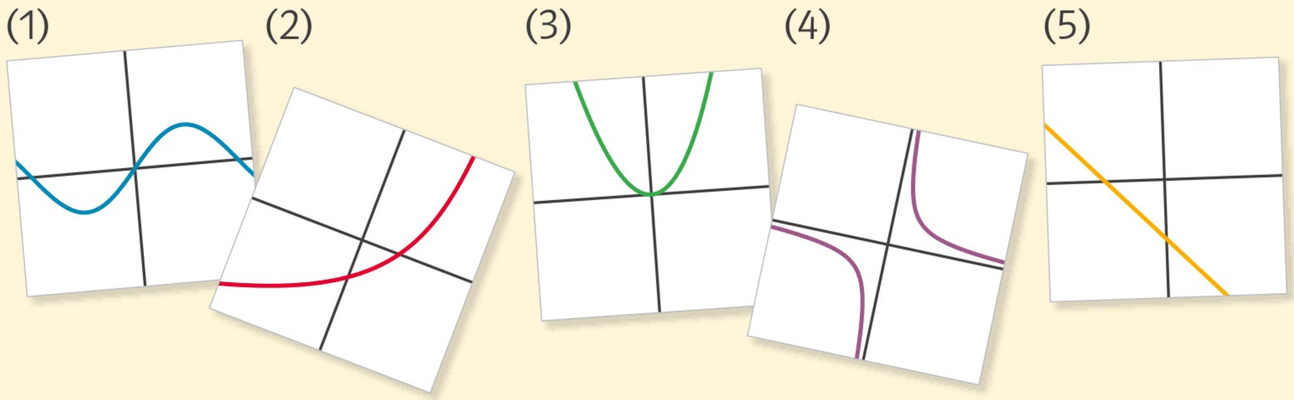
Das können Sie bald

- Funktionen auf Umkehrbarkeit untersuchen
- Den Graphen einer Umkehrfunktion skizzieren und einen Term der Umkehrfunktion bestimmen
- Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten ableiten
- Eigenschaften der Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x},\ x \in \mathbb{R}_0^+$, sowie mit der Wurzelfunktion verknüpfter Funktionen untersuchen

1 Die Umkehrfunktion

Jonah hat Graphen von Funktionen ausgedruckt, aber zuvor die Achsen nicht beschriftet. Beurteilen Sie, bei welchen Funktionsgraphen nachträglich nicht eindeutig festgelegt werden kann, welche Achse die x-Achse und welche die y-Achse ist, und beschreiben Sie die Gemeinsamkeiten dieser Graphen.

(1) (2) (3) (4) (5)

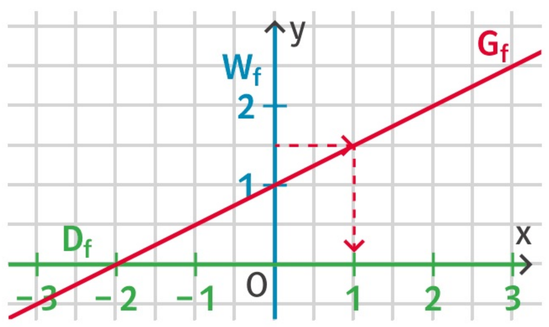


Bei einer Funktion $f: x \mapsto f(x)$ wird jedem $x \in D_f$ genau ein Funktionswert $y = f(x)$ zugeordnet. Anhand zweier Funktionen wird gezeigt, unter welchen Bedingungen die umgekehrte Zuordnung $y \mapsto x$ ebenfalls eine Funktion ist.

Bei der Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$ mit $D_f = \mathbb{R}$ wird jedem $x \in D_f$ eindeutig ein Funktionswert $f(x) \in W_f$ zugeordnet, z. B. $1 \mapsto 1{,}5$.

x	−2	−1	0	1	2
f(x)	0	0,5	1	1,5	2

Geht man umgekehrt vom Funktionswert 1,5 aus und ordnet ihm den zugehörigen x-Wert zu, ergibt sich eindeutig der x-Wert 1. Auch für alle anderen Zahlen aus der Wertemenge findet man eindeutig einen x-Wert. Damit ist die umgekehrte Zuordnung wieder eine Funktion, die man **Umkehrfunktion** von f nennt und mit f^{-1} bezeichnet.



Die Wertetabelle der Zuordnung $y \mapsto x$ erhält man, wenn man die y-Werte und die x-Werte tauscht. Da der Graph $G_{f^{-1}}$ der Umkehrfunktion von $f: x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$ eine Gerade durch die Punkte $(0|-2)$ und $(1|0)$ ist, erhält man als Zuordnungsvorschrift für die Umkehrfunktion $f^{-1}: x \mapsto 2x - 2$.

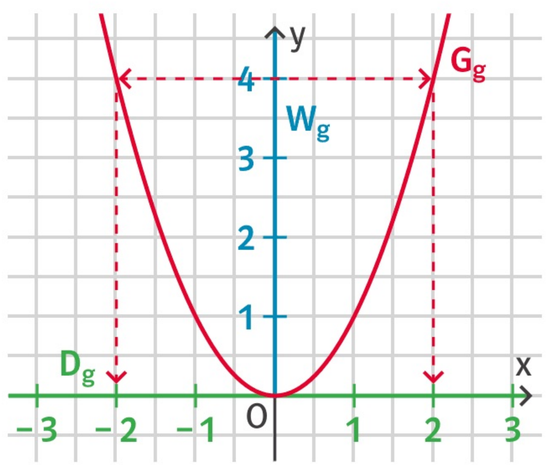
Wertetabelle der Umkehrzuordnung:

x	0	0,5	1	1,5	2
$f^{-1}(x)$	−2	−1	0	1	2

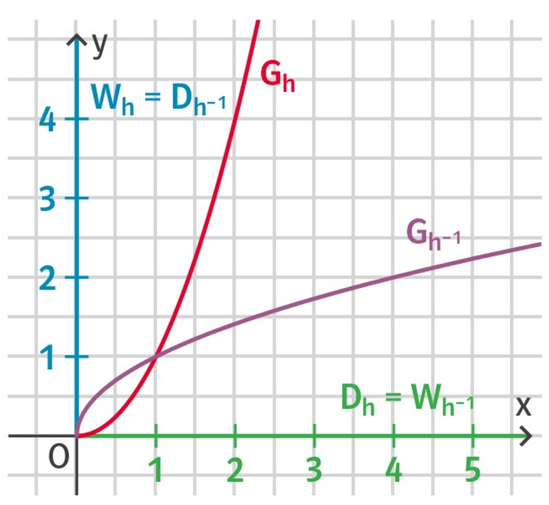
Bei der Funktion $g: x \mapsto x^2$ mit $D_g = \mathbb{R}$ wird jedem $x \in D_g$ eindeutig ein Funktionswert $g(x) \in W_g$ zugeordnet. z. B. $-2 \mapsto 4$.

x	−2	−1	0	1	2
g(x)	4	1	0	1	4

Möchte man aber umgekehrt dem Funktionswert 4 den zugehörigen x-Wert zuordnen, so erhält man keinen eindeutig bestimmten x-Wert, denn sowohl −2 als auch 2 kommen infrage. Die umgekehrte Zuordnung ist damit keine Funktion.



Schränkt man die Definitionsmenge der quadratischen Funktion g jedoch so ein, dass kein Funktionswert mehrfach angenommen wird, so erhält man eine umkehrbare Funktion. Betrachtet man die Funktion h mit $h(x) = x^2$ mit $D_h = \mathbb{R}_0^+$ und tauscht bei allen Graphenpunkten $(x|x^2)$ die x- und die y-Koordinate, so ergeben die Punkte $(x^2|x)$ den Graphen der Umkehrfunktion von h, der **(Quadrat-)Wurzelfunktion** mit $h^{-1}: x \mapsto \sqrt{x}$.
Für die Definitionsmenge $D_{h^{-1}}$ und Wertemenge $W_{h^{-1}}$ der Wurzelfunktion gilt $D_{h^{-1}} = W_h = \mathbb{R}_0^+$ und $W_{h^{-1}} = D_h = \mathbb{R}_0^+$.

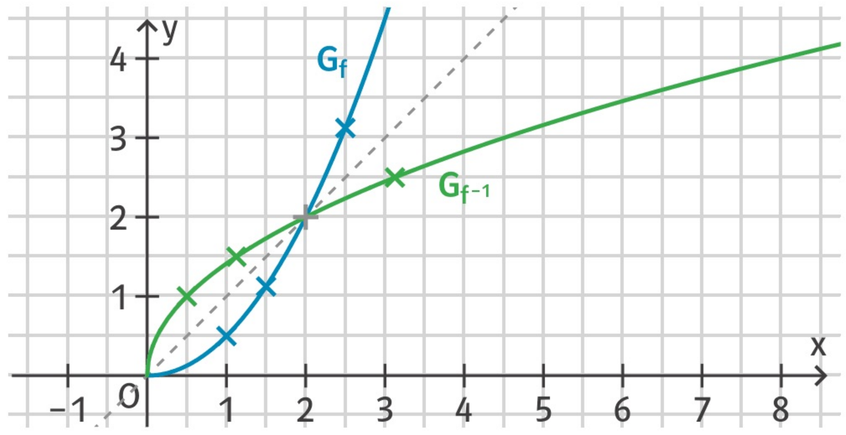


Definition: Eine Funktion $f: x \mapsto f(x)$ mit der Definitionsmenge D_f und der Wertemenge W_f heißt **umkehrbar**, falls es zu jedem $y \in W_f$ genau ein $x \in D_f$ mit $y = f(x)$ gibt.
Ist eine Funktion umkehrbar, so ist die umgekehrte Zuordnung ebenfalls eine Funktion. Diese heißt **Umkehrfunktion** von f und wird mit f^{-1} bezeichnet.
Es gilt $D_{f^{-1}} = W_f$ und $W_{f^{-1}} = D_f$.

Eine Funktion $f: x \mapsto f(x)$ heißt **umkehrbar in einem Intervall** I, wenn die Einschränkung der Funktion f auf das Intervall I umkehrbar ist.

Bestimmung des Graphen der Umkehrfunktion

Da bei Umkehrfunktionen allgemein die x- und die y-Werte vertauscht werden, liegen die Graphen einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion zueinander symmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten mit der Gleichung $y = x$, d.h., der Graph von f^{-1} entsteht durch Spiegelung von G_f an der Geraden mit der Gleichung $y = x$.



Die Schnittpunkte der Graphen von f und f^{-1} sind somit Fixpunkte bei der Spiegelung an der Geraden mit der Gleichung $y = x$.

Spiegelt man den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1} von f an der Geraden mit der Gleichung $y = x$, erhält man wieder den Graphen der Funktion f, d.h., die Funktion f ist die Umkehrfunktion von f^{-1}.

Zur Erinnerung:
Ein Punkt, der bei einer Spiegelung auf sich selbst abgebildet wird, heißt **Fixpunkt**.

Bestimmung des Funktionsterms der Umkehrfunktion

Den Funktionsterm $f^{-1}(x)$ erhält man, indem man die Funktionsgleichung von f nach x auflöst und anschließend x und y vertauscht.
So ergibt sich zum Beispiel zur Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{x-1}$, $x > 1$, der folgende Funktionsterm der Umkehrfunktion f^{-1}:

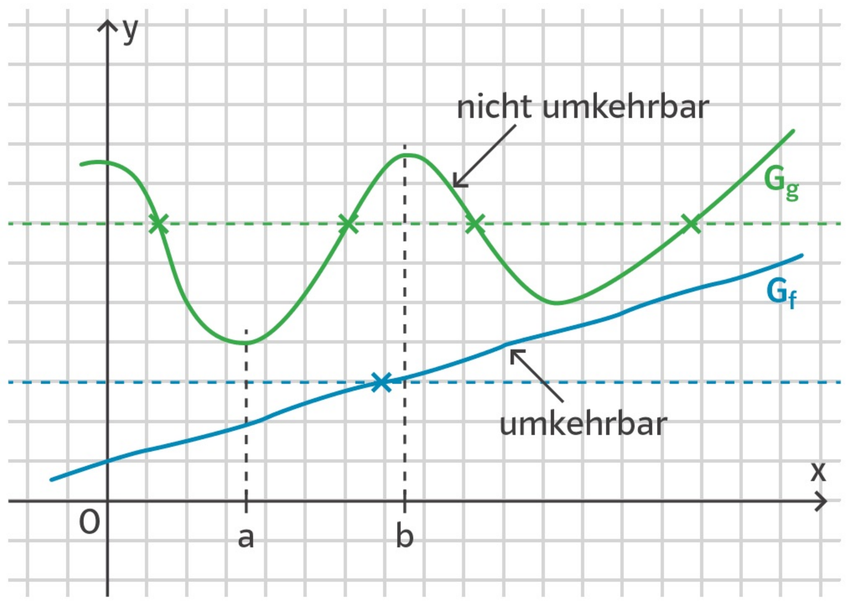
- $y = \frac{3}{x-1}$ nach x auflösen: $\quad y \cdot (x-1) = 3 \iff x - 1 = \frac{3}{y} \iff x = \frac{3}{y} + 1.$
- Variablentausch: $\quad y = \frac{3}{x} + 1.$
- Funktionsterm der Umkehrfunktion: $\quad f^{-1}(x) = \frac{3}{x} + 1.$

Für die Definitions- und Wertemenge ergeben sich $D_{f^{-1}} = W_f = \mathbb{R}^+$ und $W_{f^{-1}} = D_f =]1; +\infty[$.

$f^{-1}(x)$ bestimmen:
1. $y = f(x)$ nach x auflösen
2. Variablentausch $x \leftrightarrow y$

Falls es mindestens zwei Werte x_1 und x_2 mit $f(x_1) = f(x_2)$ gibt, ist f nicht umkehrbar.

Am Graphen lässt sich die Umkehrbarkeit von f daran erkennen, dass jede Parallele zur x-Achse den Graphen von f höchstens in einem Punkt schneidet. Dies ist sicher der Fall, wenn f streng monoton zunehmend bzw. streng monoton abnehmend ist. Zusammen mit dem Monotoniekriterium ergibt sich der folgende Satz.

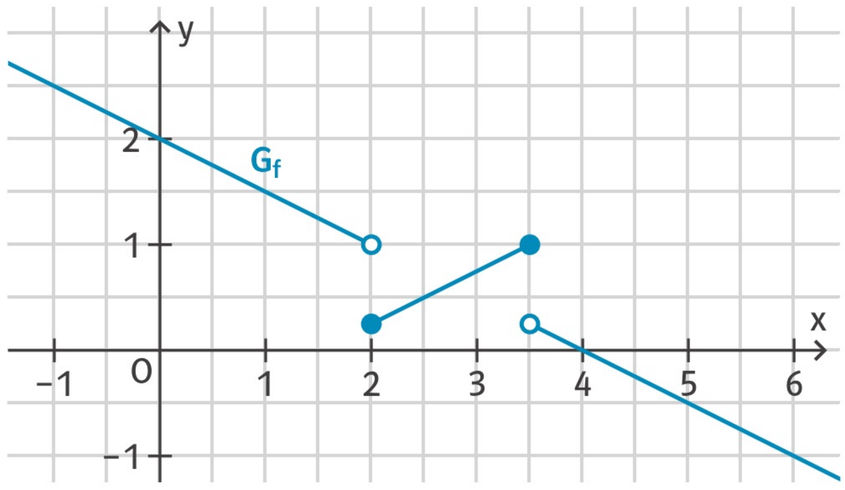


Die Funktion g ist jedoch in einzelnen Intervallen, wie z.B. in $[a; b]$, umkehrbar.

Satz (Umkehrbarkeitskriterium): Ist f eine streng monotone Funktion, so ist sie umkehrbar. Damit ist insbesondere jede differenzierbare Funktion f in einem Intervall I umkehrbar, wenn $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$ gilt.

Zur Erinnerung:
Die strenge Monotonie kann auch erfüllt sein, wenn für ein $x \in D$ gilt, dass $f'(x) = 0$ ist oder f' an dieser Stelle nicht definiert ist.

Bemerkung:
Die Umkehrung des Satzes gilt im Allgemeinen nicht, d. h., aus einem Wechsel des Monotonieverhaltens folgt nicht, dass die Funktion nicht umkehrbar ist. Beispielsweise ist die abgebildete Funktion f umkehrbar.
Setzt man dagegen voraus, dass eine umkehrbare Funktion auf einem Intervall stetig ist, dann ist sie auf diesem Intervall streng monoton.



Beispiel 1

Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x + 1)^2$, $D_f = [-1; +\infty[$.

a) Zeigen Sie mithilfe der Ableitung, dass f auf D_f umkehrbar ist.

b) Bestimmen Sie einen Term der Umkehrfunktion f^{-1} und geben Sie $D_{f^{-1}}$ und $W_{f^{-1}}$ an.

c) Skizzieren Sie die Graphen G_f und $G_{f^{-1}}$ und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

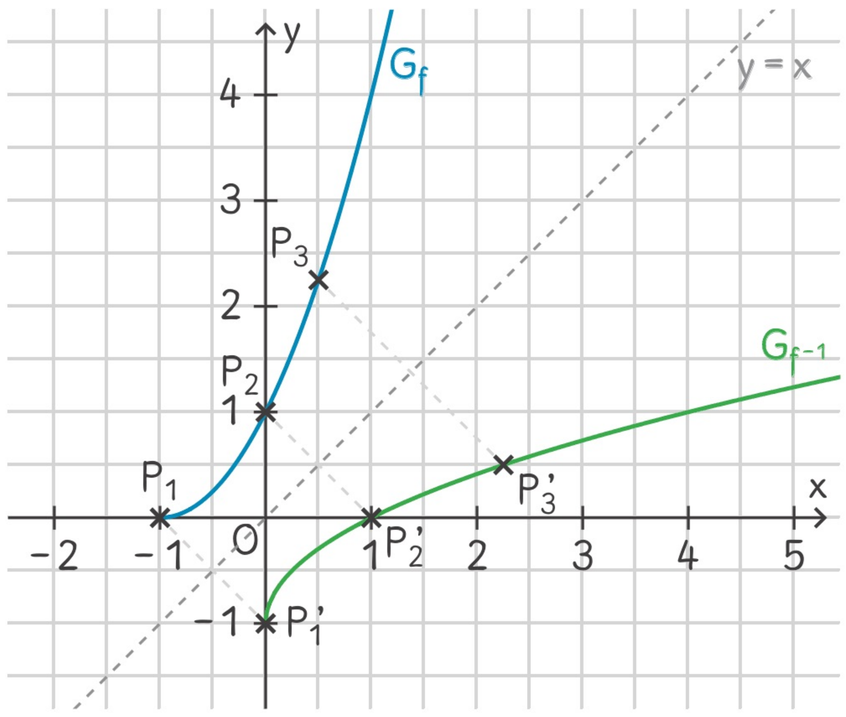
Lösung

a) Es ist $f'(x) = 2(x + 1) > 0$ für alle $x > -1$.
Also ist f in D_f streng monoton zunehmend und damit in D_f umkehrbar.

b) Auflösen der Funktionsgleichung nach x:
$y = (x + 1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{y} = x + 1$ oder $-\sqrt{y} = x + 1$
Wegen $x \geq -1$ gilt hier $\sqrt{y} = x + 1$.
$\sqrt{y} = x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{y} - 1 = x$
Variablentausch: $y = \sqrt{x} - 1$.
Man erhält $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$ mit $D_{f^{-1}} = W_f = \mathbb{R}_0^+$ und $W_{f^{-1}} = D_f = [-1; +\infty[$.

c) Man skizziert den Graphen G_f mithilfe einiger Punkte und spiegelt diesen Graphen dann an der Geraden mit der Gleichung $y = x$.

Zu **c)**:



Beispiel 2

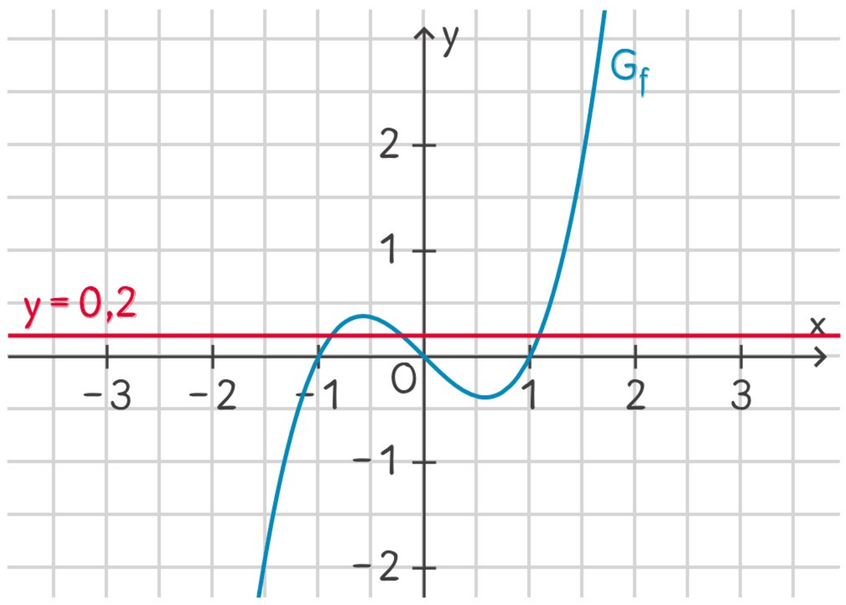
Begründen Sie auf drei verschiedene Weisen, dass die Funktion f mit $f(x) = x^3 - x$ in $\mathbb{R}$ nicht umkehrbar ist.

Lösung

1. Möglichkeit:
Der Graph der Ableitung f' mit $f'(x) = 3x^2 - 1$ ist eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(0 | -1)$. Das heißt, es gibt ein Intervall, in dem $f'(x) < 0$ ist, und ein Intervall, in dem $f'(x) > 0$ ist. Somit ändert die stetige Funktion ihr Monotonieverhalten und ist damit nicht umkehrbar.

2. Möglichkeit:
$f(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 1$ oder $x = -1$
Die Funktion hat die Nullstellen $x = 0$, $x = 1$ und $x = -1$. Das heißt, die Funktion nimmt den Funktionswert 0 mehrfach an und ist somit nicht umkehrbar.

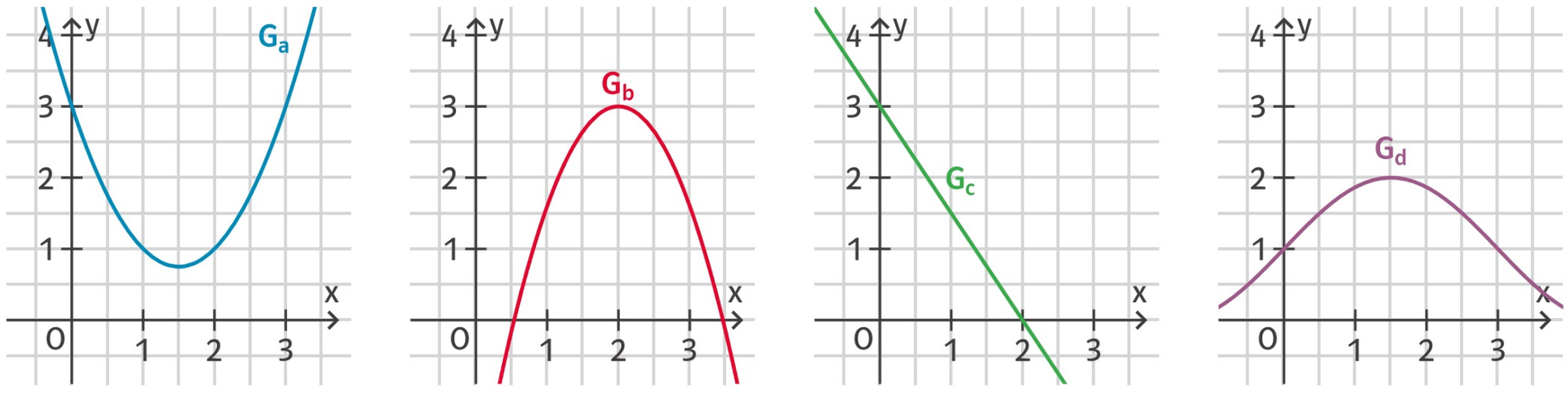
3. Möglichkeit:



Zeichnet man den Graphen von f, z. B. mithilfe eines Funktionenplotters, sieht man, dass es (mindestens) eine Parallele zur x-Achse gibt, die den Graphen mehrfach schneidet.

Aufgaben

1 Beurteilen Sie, welche der folgenden Graphen zu einer umkehrbaren Funktion gehören können.



2 Zeigen Sie mithilfe der Ableitung, dass f umkehrbar ist.

a) $f: x \mapsto x^3 + x,\ x \in \mathbb{R}$ **b)** $f: x \mapsto \frac{2}{x+1},\ x > -1$ **c)** $f: x \mapsto x^3 - x,\ x \geq \sqrt{\frac{1}{3}}$

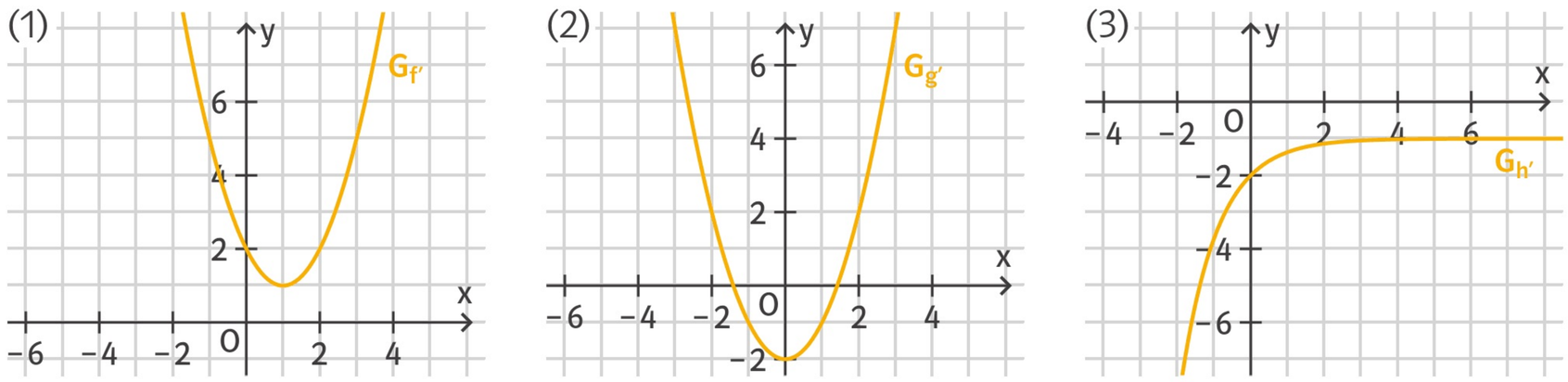
d) $f: x \mapsto x + e^{x-2},\ x \in \mathbb{R}$ **e)** $f: x \mapsto \frac{1}{2}(x-1)^2,\ x \leq 1$ **f)** $f: x \mapsto \frac{2x-3}{1-x},\ x < 1$

3 Untersuchen Sie die Funktion auf Umkehrbarkeit. Geben Sie ein möglichst großes Intervall an, in dem die Funktion umkehrbar ist.

a) $f: x \mapsto -x^2 + 3,\ x > 1$ **b)** $f: x \mapsto -e^x + 5x,\ x \in \mathbb{R}$ **c)** $f: x \mapsto 1 + \sin(x),\ x \in [0; \pi]$

d) $f: x \mapsto 0{,}5x^3 + 3x - 5,\ x \in \mathbb{R}$ **e)** $f: x \mapsto x^3 - 2x^2 + 3,\ x \in \mathbb{R}$ **f)** $f: x \mapsto \frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$

4 **a)** Beurteilen Sie, von welchen der drei gezeichneten Ableitungen die zugehörige Funktion umkehrbar ist.

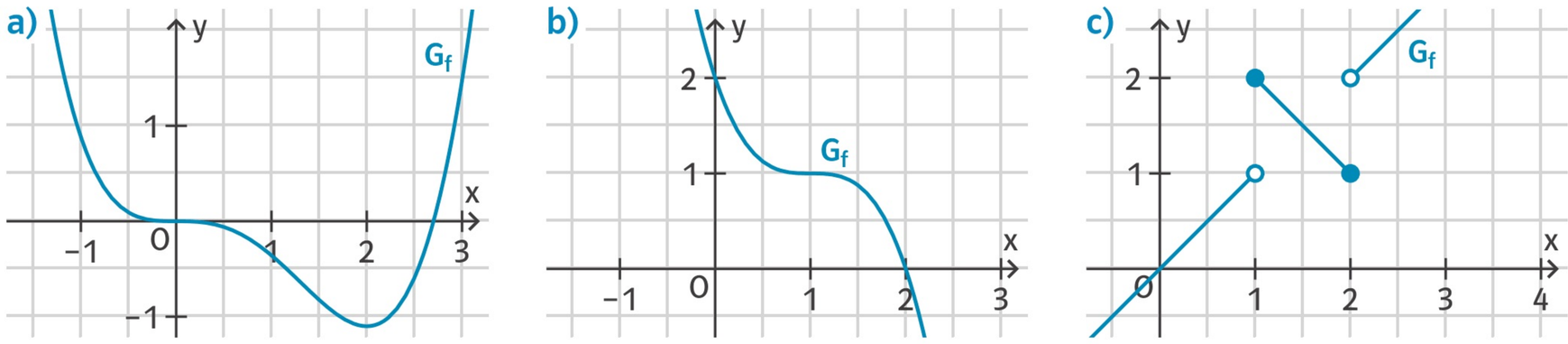


b) Erläutern Sie allgemein, wie man anhand des Graphen einer Ableitung erkennen kann, in welchen Bereichen die zugehörige Funktion umkehrbar ist.

Test 1

Lösungen | Seite 289

5 Beurteilen Sie, ob der Graph zu einer umkehrbaren Funktion gehören kann.



6 Bestimmen Sie ein Intervall, in dem die Funktion f mit $f(x) = -x \cdot e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$, umkehrbar ist, und geben Sie ein Intervall an, in dem sie nicht umkehrbar ist.

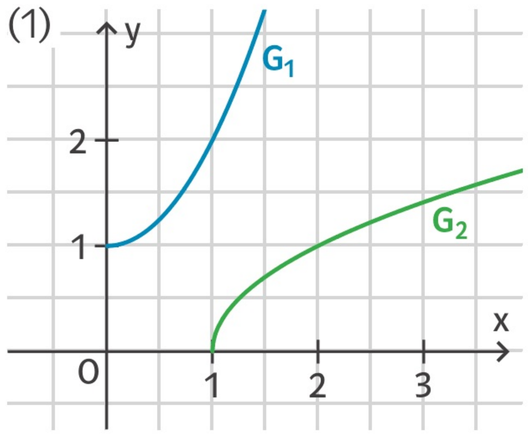
7 Zeigen Sie, dass die Funktion f umkehrbar ist, bestimmen Sie einen Term der Umkehrfunktion f^{-1} und geben Sie $D_{f^{-1}}$ und $W_{f^{-1}}$ an.

a) $f: x \mapsto 4x - 2,\ x \in \mathbb{R}$ **b)** $f: x \mapsto -2x^2 - 3,\ x \in \mathbb{R}_0^+$ **c)** $f: x \mapsto \frac{4}{x-2},\ x < 2$

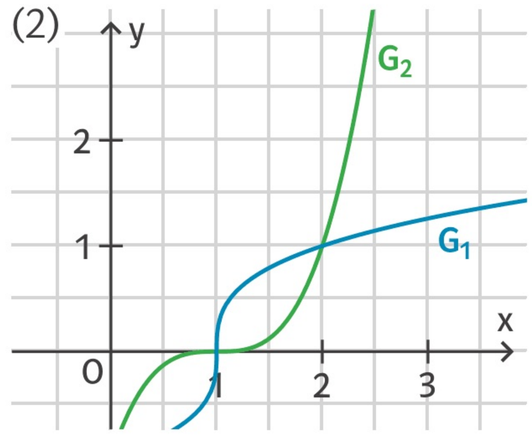
d) $f: x \mapsto 4 - \frac{6}{x},\ x < 0$ **e)** $f: x \mapsto (x-3)^2,\ x \geq 3$ **f)** $f: x \mapsto 2(x-1)^2 + 3,\ x \leq 1$

8 **a)** Beurteilen Sie jeweils, ob die beiden Graphen eine Funktion und ihre Umkehrfunktion darstellen können.

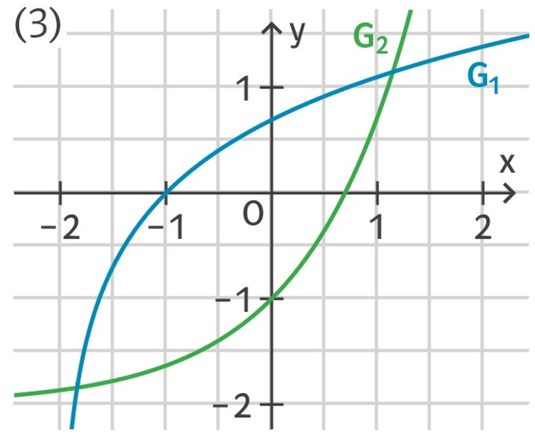
(1)



(2)



(3)



b) Erläutern Sie anhand der Funktionen $f: x \mapsto x^2,\ x \in \mathbb{R}_0^+$, und $f^{-1}: x \mapsto \sqrt{x},\ x \in \mathbb{R}_0^+$, wie der Graph $G_{f^{-1}}$ der Umkehrfunktion aus dem Graphen der Funktion f hervorgeht.

c) Bilden Sie anhand eines Beispiels die Umkehrfunktion der Umkehrfunktion. Was fällt auf? Begründen Sie diesen Zusammenhang geometrisch.

d) Geben Sie zwei verschiedene Funktionen an, für die $f^{-1} = f$ gilt.

→ Strategie | Seite 256
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

9 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 1$ mit maximaler Definitionsmenge D.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion in D umkehrbar ist.

b) Zeichnen Sie den Graphen G_f und von diesem ausgehend den Graphen der Umkehrfunktion von f. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.

c) Überprüfen Sie gegenseitig Ihre Lösungen auf Genauigkeit und erläutern Sie die Kriterien, die Sie bei Ihrer Beurteilung zugrunde gelegt haben.

→ Strategie | Seite 258
Betrachten von etwas Gegenteiligem

10 Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Es gilt stets $D = \mathbb{R}$.

a) Ist eine ganzrationale Funktion gerade, dann ist sie nicht umkehrbar.

b) Ist eine ganzrationale Funktion nicht umkehrbar, so ist sie gerade.

c) Hat eine ganzrationale Funktion keine Extremstellen, so ist sie umkehrbar.

d) Ist eine ganzrationale Funktion umkehrbar, so hat sie keine Extremstellen.

e) Jede umkehrbare Funktion ist monoton.

Zur Erinnerung:
Der Term einer geraden ganzrationalen Funktion enthält nur gerade Exponenten und ihr Graph ist symmetrisch zur y-Achse.

Test 2

→ Lösungen | Seite 289

11 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{2}{x-3}$ mit $D_f =]3; +\infty[$.

a) Zeigen Sie, dass f umkehrbar ist.

b) Bestimmen Sie einen Term der Umkehrfunktion f^{-1} von f und geben Sie $D_{f^{-1}}$ und $W_{f^{-1}}$ an.

c) Skizzieren Sie die Graphen von f und f^{-1} in ein gemeinsames Koordinatensystem und erläutern Sie, wie der Graph von f^{-1} aus dem Graphen von f hervorgeht.

12 **Abiturprüfung 2019 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, daraus Teilaufgabe 4b)**
Geben Sie den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten und umkehrbaren Funktion j an, die folgende Bedingung erfüllt: Der Graph von j und der Graph der Umkehrfunktion von j haben keinen gemeinsamen Punkt.

13 Gegeben ist eine auf einem Intervall I differenzierbare und umkehrbare Funktion f mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} differenzierbar auf W_f. Zudem gilt $f(f^{-1}(x)) = x$.

a) Vollziehen Sie die Gültigkeit von $f(f^{-1}(x)) = x$ anhand eines Beispiels nach.

b) Leiten Sie mithilfe von $f(f^{-1}(x)) = x$ die Ableitungsregel $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ her.

c) Leiten Sie die Funktion g mit $g(x) = \sqrt{x}$ mit der Regel aus Teilaufgabe b) ab.

Es gilt allgemein $f(f^{-1}(x)) = x$ für jede Funktion und deren Umkehrfunktion.

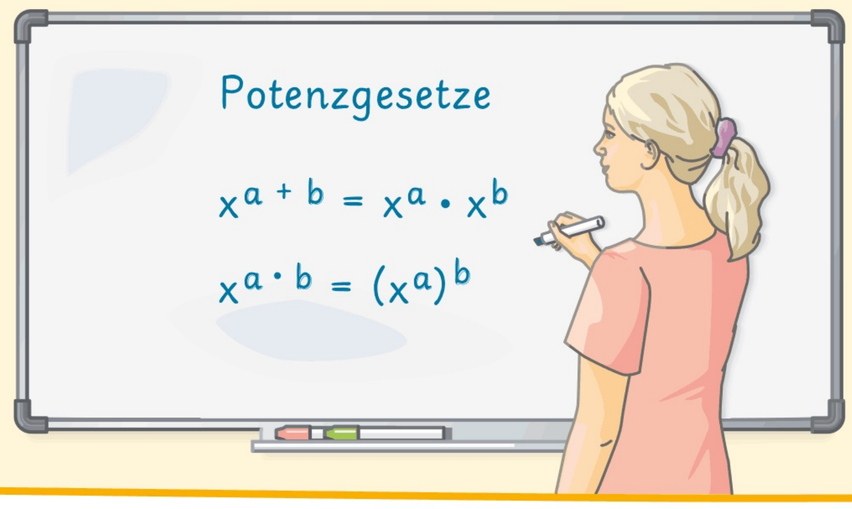
Grundwissen Test

→ Lösungen | Seite 289

G 14 Ermitteln Sie eine Gleichung der Wendetangente an den Graphen von f mit $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$.

2 Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten und ihre Ableitung

Die Ableitung der Funktion $f: x \mapsto x^{\frac{1}{2}}$ ist $f': x \mapsto \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.
Bestimmen Sie damit die Ableitungen von $g: x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$, $h: x \mapsto x^{\frac{5}{2}}$, $k: x \mapsto x^{\frac{7}{2}}$ und $l: x \mapsto x^{-\frac{1}{2}}$.
Stellen Sie eine Vermutung für die Ableitungsregel von Funktionen der Form $f: x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$ auf, deren Exponent eine rationale Zahl ist.



Bisher wurden Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten abgeleitet und untersucht. Im Folgenden werden Funktionen mit rationalen Exponenten betrachtet.

Definition: Funktionen der Form $f: x \mapsto a \cdot x^{\frac{p}{q}} = a \cdot \sqrt[q]{x^p}$ $(a \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}\setminus\{0\})$ heißen **Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten**.

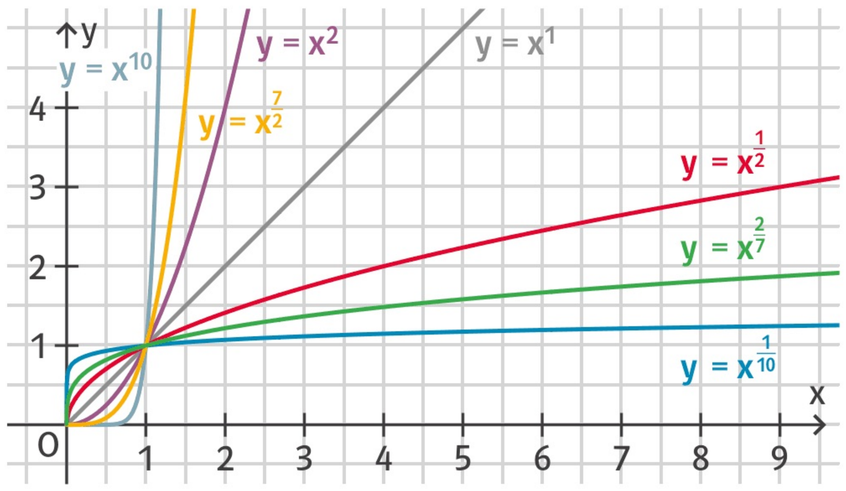
Zur Erinnerung:
Ist von einer Funktion die Definitionsmenge nicht angegeben, dann liegt die maximale Definitionsmenge vor.

Beachten Sie:
Bei Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten muss man in Abhängigkeit von p und q die Definitionsmenge gegebenenfalls einschränken, da Wurzelterme nicht für negative Radikanden bzw. Bruchterme nicht für Zahlen, die im Nenner null ergeben, definiert sind. Beispielsweise ist bei f mit $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ die Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}_0^+$ und bei g mit $g(x) = x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ ist sie $D_g = \mathbb{R}^+$.

Zur Erinnerung:
Die n-te Wurzel ist nur für nicht-negative Zahlen definiert.

Betrachtet werden die Graphen von Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten mit dem Vorfaktor $a = 1$ im I. Quadranten.

Potenzfunktionen mit positiven Exponenten



Für $\frac{p}{q} > 1$ erinnert der Graph an die Form eines Parabelastes.

Für $\frac{p}{q} = 1$ ist der Graph eine Halbgerade.

Für $0 < \frac{p}{q} < 1$ hat der Graph die Form eines „liegenden“ Parabelastes.
Alle Graphen verlaufen durch die Punkte $(0|0)$ und $(1|1)$ und sind streng monoton steigend.

Potenzfunktionen mit negativen Exponenten

Für $\frac{p}{q} < 0$ hat der Graph die Form eines Hyperbelastes.

Alle Graphen verlaufen durch den Punkt $(1|1)$ und sind streng monoton fallend. Die Koordinatenachsen sind Asymptoten, d. h., es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.

An den obigen Darstellungen erkennt man, dass z. B. die Graphen von $x \mapsto x^{\frac{7}{2}}$ und $x \mapsto x^{\frac{2}{7}}$ für $x \geq 0$ zueinander symmetrisch bezüglich der Geraden mit der Gleichung $y = x$ liegen und somit Umkehrfunktionen zueinander sind.
Allgemein gilt: Für $x \in \mathbb{R}^+$ und $p \neq 0$ hat die Funktion $f: x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$ die Umkehrfunktion $f^{-1}: x \mapsto x^{\frac{q}{p}}$.

Funktionsgleichung nach x auflösen:
$y = x^{\frac{p}{q}}$
$y^{\frac{q}{p}} = \left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{q}{p}} = x$
Variablentausch:
$y = x^{\frac{q}{p}}$

Um Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten abzuleiten, muss man die bekannte Potenzregel für ganzzahlige Exponenten erweitern.

Im ersten Schritt werden zunächst Potenzfunktionen betrachtet, deren Exponenten die Form $\frac{1}{q}$ $(q \in \mathbb{N}\setminus\{0\})$ haben.

Für die Funktion $g: x \mapsto x^q$ und die Funktion $f: x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$, $q \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, wird die Verkettung $g \circ f$ gebildet und abgeleitet.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q = x \implies (g \circ f)'(x) = 1$

Da für Potenzfunktionen $g: x \mapsto x^q$ mit ganzzahligen Exponenten $g'(x) = q \cdot x^{q-1}$ gilt, erhält man auch mithilfe der Kettenregel die Ableitung der Verkettung $g \circ f$:

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = q \cdot (f(x))^{q-1} \cdot f'(x) = q \cdot \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{q-1} \cdot f'(x) = q \cdot x^{1-\frac{1}{q}} \cdot f'(x)$.

Da $(g \circ f)'(x) = 1$ ist, muss für $f'(x)$ gelten: $f'(x) = \frac{1}{q \cdot x^{1-\frac{1}{q}}} = \frac{1}{q} \cdot x^{\frac{1}{q}-1}$.

Die bisher bekannte Ableitungsregel für Potenzfunktionen der Form x^n gilt also auch für Exponenten der Form $\frac{1}{q}$ mit $q \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Im zweiten Schritt werden nun allgemein Potenzfunktionen betrachtet, deren Exponenten die Form $\frac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\setminus\{0\})$ haben: $f(x) = x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$.

Nach der Kettenregel gilt $f'(x) = p \cdot \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{q} \cdot x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p-1}{q}+\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}$.

Satz (Ableitungsregel für Potenzfunktionen): Für Funktionen $f: x \mapsto x^r$ $(r \in \mathbb{Q})$ gilt $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$.
Umgekehrt gilt: Für $f: x \mapsto x^r$ $(r \in \mathbb{Q}\setminus\{-1\})$ ist $F: x \mapsto \frac{1}{r+1}x^{r+1}$ eine Stammfunktion von f.

Zur Erinnerung:
Für Funktionen
$f: x \mapsto x^k$ $(k \in \mathbb{Z})$ gilt
$f'(x) = k \cdot x^{k-1}$.

Beispiel:
$f(x) = 2\sqrt[3]{x^4} = 2 \cdot x^{\frac{4}{3}}$
$f'(x) = \frac{8}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}} = \frac{8}{3} \cdot \sqrt[3]{x}$
$F(x) = 2 \cdot \frac{1}{\frac{4}{3}+1} \cdot x^{\frac{4}{3}+1} = \frac{6}{7} \cdot x^{\frac{7}{3}}$

Beispiel 1

Bestimmen Sie einen Term der Ableitung f' und einen Term einer Stammfunktion F der Funktion f.

a) $f: x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$, $x > 0$ **b)** $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$

→ Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

Lösung

a) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

$f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$F(x) = \frac{1}{\frac{2}{3}+1}x^{\frac{2}{3}+1} = \frac{1}{\frac{5}{3}}x^{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}$

b) $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$

$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

$F(x) = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$

Beispiel 2

Bestimmen Sie einen Term der Ableitung f' der Funktion f.

a) $f: x \mapsto \sqrt{3x^2 - x}$ **b)** $f: x \mapsto \sqrt[3]{x} \cdot (1 + 2x)$

Lösung

a) $f(x) = (3x^2 - x)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (6x - 1)$

$= \frac{6x - 1}{2 \cdot \sqrt{3x^2 - x}}$

Oder direkt (unter Verwendung der auf dem Rand notierten „Merkregel"):

$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3x^2 - x}} \cdot (6x - 1)$

$= \frac{(6x - 1)}{2 \cdot \sqrt{3x^2 - x}}$

b) $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \cdot (1 + 2x)$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \cdot (1 + 2x) + x^{\frac{1}{3}} \cdot 2$

$= \frac{\frac{1}{3}(1 + 2x) + 2\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}$

$= \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x + 2x}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{8}{3}x}{\sqrt[3]{x^2}}$

$= \frac{1 + 8x}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Merke:
$f(x) = \sqrt{x}$
$\implies f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Beispiel 3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{4x - 2} + 1$ mit maximaler Definitionsmenge.

a) Geben Sie die Definitionsmenge D_f und die Wertemenge W_f der Funktion f an.

b) Zeigen Sie mithilfe der Ableitung, dass f auf D_f umkehrbar ist.

c) Bestimmen Sie einen Term der Umkehrfunktion f^{-1} von f und geben Sie $D_{f^{-1}}$ und $W_{f^{-1}}$ an.

Lösung

a) $D_f = [0{,}5; +\infty[$; $W_f = [1; +\infty[$

b) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (4x - 2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{4x - 2}} > 0$

für $x > 0{,}5$.

Somit ist f in D_f streng monoton zunehmend und damit umkehrbar.

c) Da $D_f = [0{,}5; +\infty[$ ist und $W_f = [1; +\infty[$, gilt:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{4x - 2} + 1 && | -1 \\ y - 1 &= \sqrt{4x - 2} && | \,^2 \\ (y - 1)^2 &= 4x - 2 && | + 2 \\ (y - 1)^2 + 2 &= 4x && | : 4 \\ \tfrac{1}{4}(y - 1)^2 + \tfrac{1}{2} &= x && \text{(Variablentausch)} \\ \tfrac{1}{4}(x - 1)^2 + \tfrac{1}{2} &= y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \tfrac{1}{4}(x - 1)^2 + \tfrac{1}{2}$$

$D_{f^{-1}} = [1; +\infty[$; $W_{f^{-1}} = [0{,}5; +\infty[$

Aufgaben

1 **a)** Ordnen Sie den Funktionen ihre Graphen zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.

→ Strategie | Seite 257
Ausschlussprinzip

f: $x \mapsto 3x^{\frac{1}{4}}$

h: $x \mapsto x^{\frac{3}{4}}$

g: $x \mapsto 3x^{-\frac{1}{4}}$

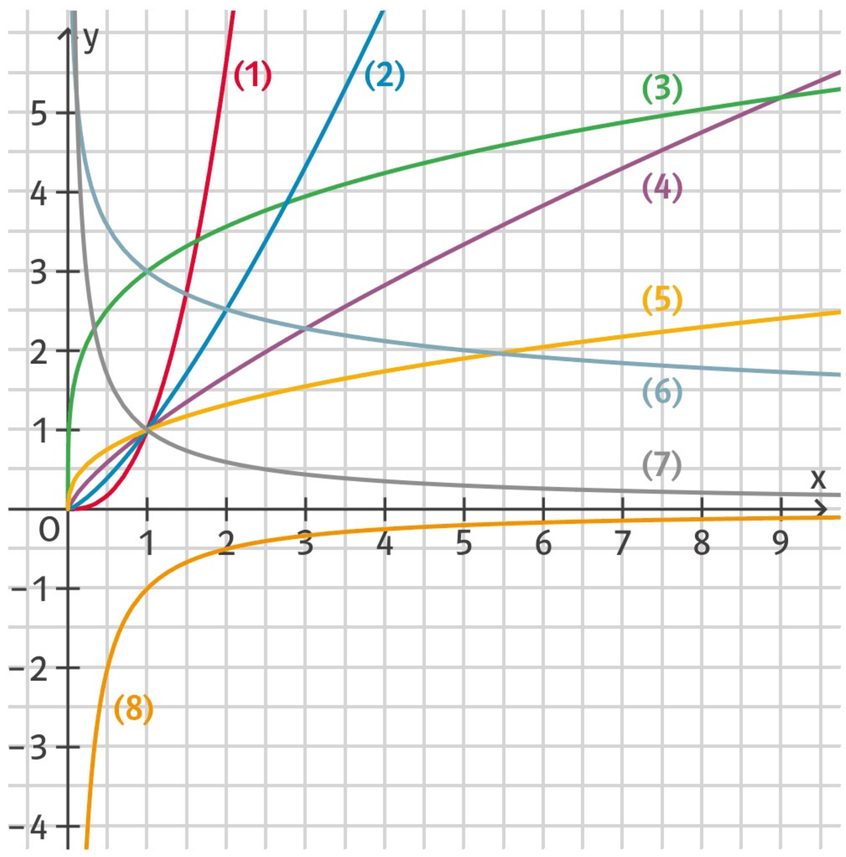
k: $x \mapsto x^{-\frac{3}{4}}$

p: $x \mapsto x^{0{,}4}$

r: $x \mapsto \sqrt[4]{x^3}$

q: $x \mapsto x^{\frac{4}{3}}$

s: $x \mapsto x^{2{,}5}$



b) Geben Sie zu dem übrig gebliebenen Graphen einen passenden Funktionsterm an.

2 Bestimmen Sie einen Term der Ableitung f' der Funktion f und berechnen Sie f'(1).

a) $f(x) = x^{0{,}2}$ **b)** $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ **c)** $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ **d)** $f(x) = 2x^{0{,}7}$

e) $f(x) = \frac{2}{3}x^{-1{,}5}$ **f)** $f(x) = \sqrt[4]{x^5}$ **g)** $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$ **h)** $f(x) = 0{,}02\sqrt{x^7}$

i) $f(x) = \left(\sqrt[5]{x}\right)^{-1}$ **j)** $f(x) = 3 \cdot \left(\sqrt[3]{x^5}\right)^{-1}$ **k)** $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3}$ **l)** $f(x) = \frac{12}{\sqrt[3]{x^4}}$

3 Beschreiben Sie die Fehler, die beim Umformen bzw. beim Ableiten gemacht wurden.

(1) $g(x) = 3 \cdot \sqrt[4]{x^3} = 3 \cdot x^{-\frac{4}{3}}$

$g'(x) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(2) $h(x) = 0{,}2 \cdot \sqrt[5]{x^2} = 0{,}2x^{\frac{2}{5}}$

$h'(x) = 0{,}2 \cdot \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{7}{5}} = 0{,}8\sqrt[5]{x^7}$

4 Bestimmen Sie einen Term einer Funktion, deren Ableitung den gegebenen Term hat.

a) $f'(x) = \frac{3}{4}x^{-0{,}25}$ **b)** $g'(x) = -\frac{4}{3}x^{-\frac{4}{3}}$ **c)** $h'(x) = 0{,}4x^{-\frac{3}{5}}$

d) $k'(x) = x^{-\frac{3}{4}}$ **e)** $p'(x) = 2\sqrt{x^{-1}}$ **f)** $q'(x) = 4{,}5\sqrt{x}$

Test 1

Lösungen | Seite 289

5 Bestimmen Sie einen Term der Ableitung f' und einen Term einer Stammfunktion F der Funktion f.

a) $f: x \mapsto -2x^{0,3}$ **b)** $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ **c)** $f: x \mapsto 2x \cdot \sqrt[3]{x^2}$

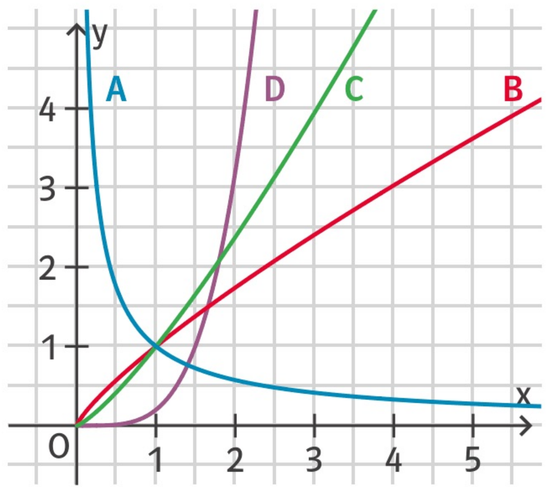
6 Ordnen Sie den Funktionen ihre Graphen zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.

$f: x \mapsto \frac{x^4}{5}$

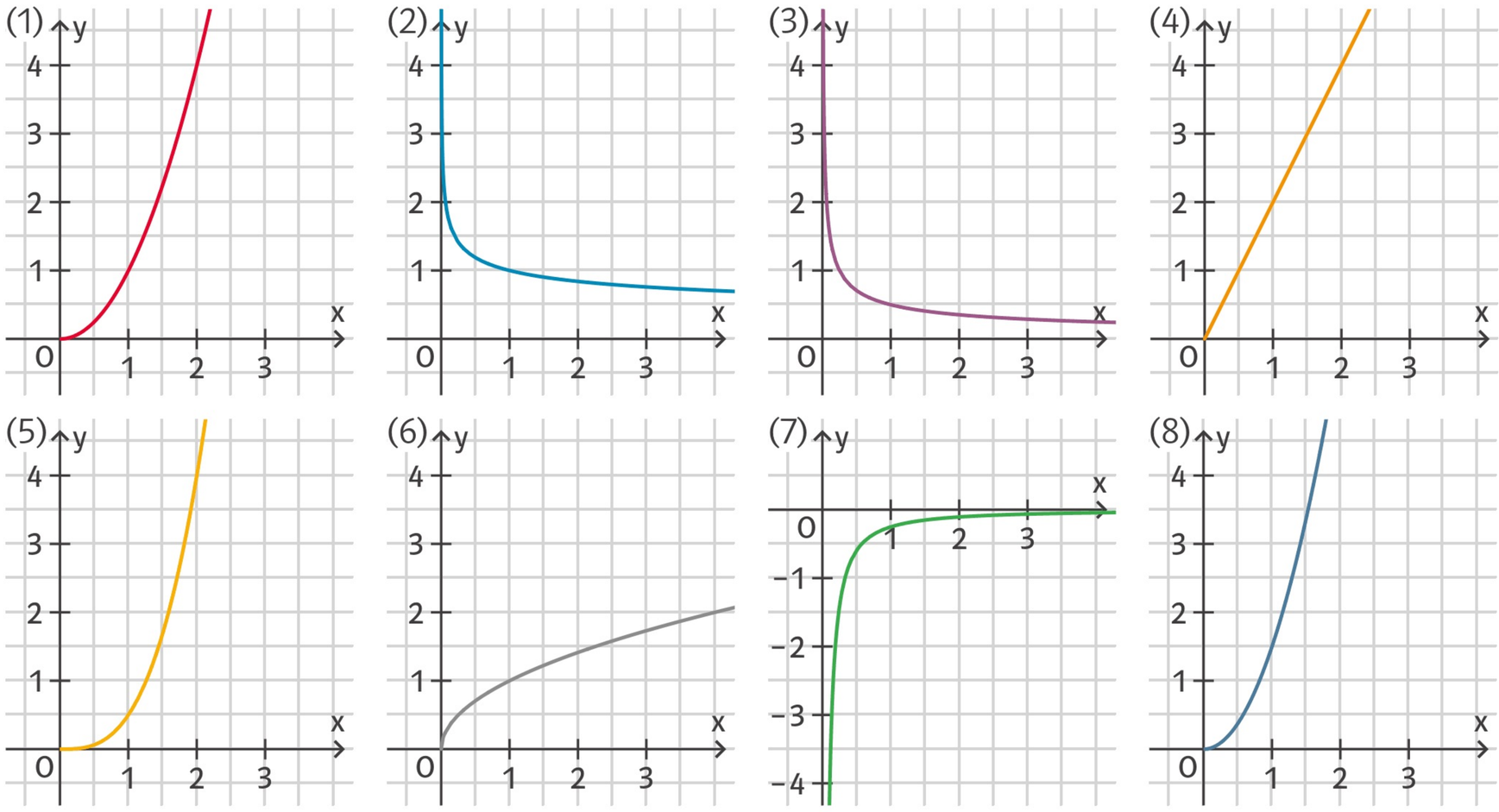
$g: x \mapsto x^{\frac{4}{5}}$

$h: x \mapsto \sqrt[4]{x^5}$

$k: x \mapsto x^{-\frac{4}{5}}$



7 Die Abbildungen zeigen für $x > 0$ die Graphen der Funktionen $f: x \mapsto 0{,}5x^3$, $g: x \mapsto x^{-0{,}25}$, $h: x \mapsto \sqrt{x}$ und $k: x \mapsto x^2$ sowie die Graphen ihrer Ableitungen.
Ordnen Sie jedem Graphen die zugehörige Funktion bzw. Ableitungsfunktion zu und begründen Sie Ihre Zuordnung mithilfe charakteristischer Eigenschaften der Graphen.



8 Bestimmen Sie einen Term der Ableitungsfunktion f' von f.

a) $f(x) = \sqrt{e^x}$ **b)** $f(x) = e^x + \sqrt{x}$ **c)** $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ **d)** $f(x) = e^x \cdot \sqrt{x}$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x}$ **f)** $f(x) = \left(\sqrt[3]{e}\right)^x$ **g)** $f(x) = \sqrt[3]{e^x + 1}$ **h)** $f(x) = e^{\sqrt{x^2 - 3}}$

9 Gegeben sind die Funktionen u, v und w mit $u(x) = \sqrt{x}$, $v(x) = x^3 - 5$ und $w(x) = x^{-2}$.

a) Bilden Sie vier Verkettungen mit je zwei dieser Funktionen und bestimmen Sie zu jeder Verkettung einen Term der Ableitung.

b) Kontrollieren Sie gegenseitig Ihre Lösungen.

10 Bestimmen Sie einen Term der Ableitungsfunktion f' von f.

a) $f(x) = \sqrt[3]{1 + 2x}$ **b)** $f(t) = \left(1 + \sqrt{t}\right)^3$ **c)** $f(x) = \sqrt[4]{\sin(x)}$ **d)** $f(t) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

e) $f(s) = 5\sqrt{s} + \frac{3}{2}s^{\frac{2}{3}}$ **f)** $f(x) = \sqrt{3x} - e^x$ **g)** $f(t) = \sqrt[3]{t} + \sin(t)$ **h)** $f(x) = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{x - 1}$

i) $f(a) = (3a + 2) \cdot \sqrt{a}$ **j)** $f(s) = \sqrt{(1 - s)^3 + 1}$ **k)** $f(x) = \frac{\sqrt{2x - 1}}{x^2}$ **l)** $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

11 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x - 2} + 1$ mit maximaler Definitionsmenge.

a) Geben Sie die Definitionsmenge D_f und die Wertemenge W_f der Funktion f an.

b) Zeigen Sie mithilfe der Ableitung, dass f auf D_f umkehrbar ist.

c) Bestimmen Sie einen Term der Umkehrfunktion f^{-1} von f und geben Sie $D_{f^{-1}}$ und $W_{f^{-1}}$ an.

12 Die Funktion h mit $h(t) = 8{,}5 \cdot \sqrt{0{,}01t + 0{,}04}$, $0 \le t \le 20$, beschreibt die Größe einer Giraffe nach der Geburt ($h(t)$ in Metern, t in Monaten).

a) Berechnen Sie die Größe der Giraffe zum Geburtstermin und bestimmen Sie, ab wann die Giraffe größer als 3 m ist.

b) Weisen Sie nach, dass die Funktion h umkehrbar ist, und bestimmen Sie einen Funktionsterm der Umkehrfunktion h^{-1} von h.

c) Beschreiben Sie die Bedeutung der Umkehrfunktion h^{-1} im Sachzusammenhang.

Test 2

→ Lösungen | Seite 289

13 Bestimmen Sie einen Term der Ableitungsfunktion f' von f.

a) $f(x) = 4x^2 \cdot \sqrt{x}$ **b)** $f(x) = \sqrt{(\sin(x))^3}$ **c)** $f(x) = (x + 1) \cdot \sqrt{x}$ **d)** $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{8 - x^3}}$

14 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3\sqrt{4x - 8} + 5$ mit maximaler Definitionsmenge.

a) Geben Sie die Definitionsmenge D_f und die Wertemenge W_f der Funktion f an.

b) Zeigen Sie mithilfe der Ableitung, dass f auf D_f umkehrbar ist.

c) Bestimmen Sie einen Term der Umkehrfunktion f^{-1} von f und geben Sie $D_{f^{-1}}$ und $W_{f^{-1}}$ an.

15 In einen auf der Spitze stehenden kegelförmigen Behälter mit dem Radius 10 cm und der Höhe 30 cm werden pro Sekunde 20 cm^3 Wasser eingefüllt. Das Volumen $V(t)$ des Wassers (in cm^3) und die Höhe $h(t)$ des Wasserspiegels im Behälter (in cm) hängen also von der Zeit t (in s) ab.

a) Ermitteln Sie einen Funktionsterm $h(t)$ und berechnen Sie damit, wie hoch das Wasser nach einer Minute im Behälter steht.

b) Berechnen Sie die momentane Steiggeschwindigkeit des Wasserspiegels nach einer Minute.

→ Strategie | Seite 256
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

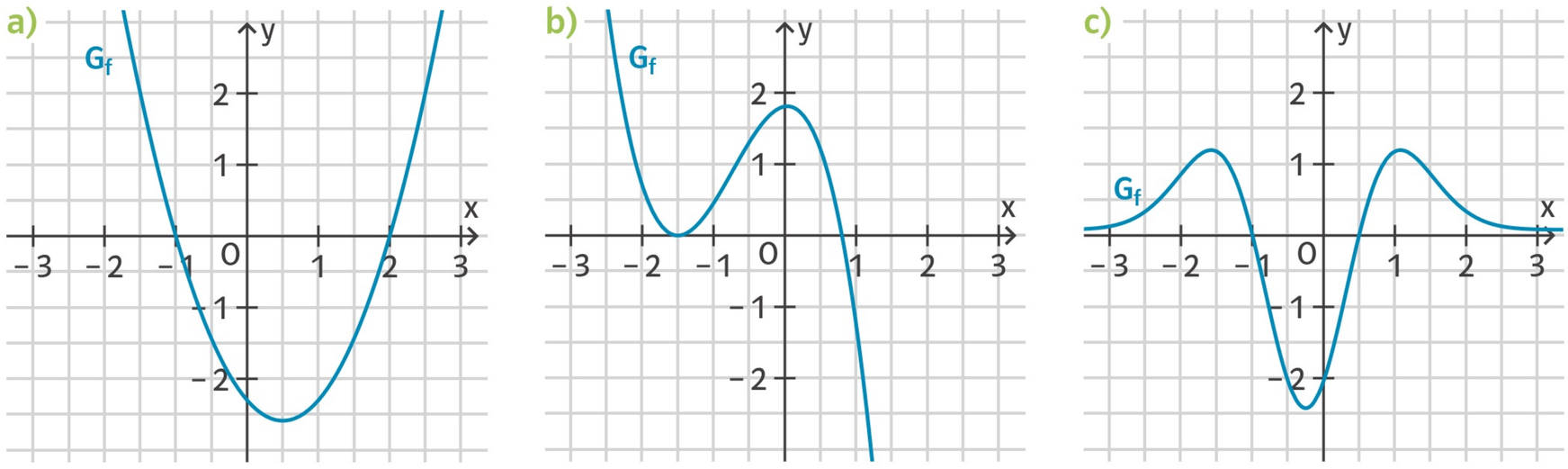
Tipp:
Verwenden Sie den Strahlensatz.

16 Bestimmen Sie mithilfe des Newton-Verfahrens mit Startwert $x_0 = 1$ die Lösung der Gleichung $x^2 - 3 - \sqrt{x} = 0$ auf drei Dezimalen genau.

Grundwissen Test

→ Lösungen | Seite 290

G 17 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f. Skizzieren Sie den Graphen derjenigen Stammfunktion F, der den Punkt $P(0|1)$ enthält, in Ihr Heft.



3 Untersuchung von Verknüpfungen mit der Wurzelfunktion

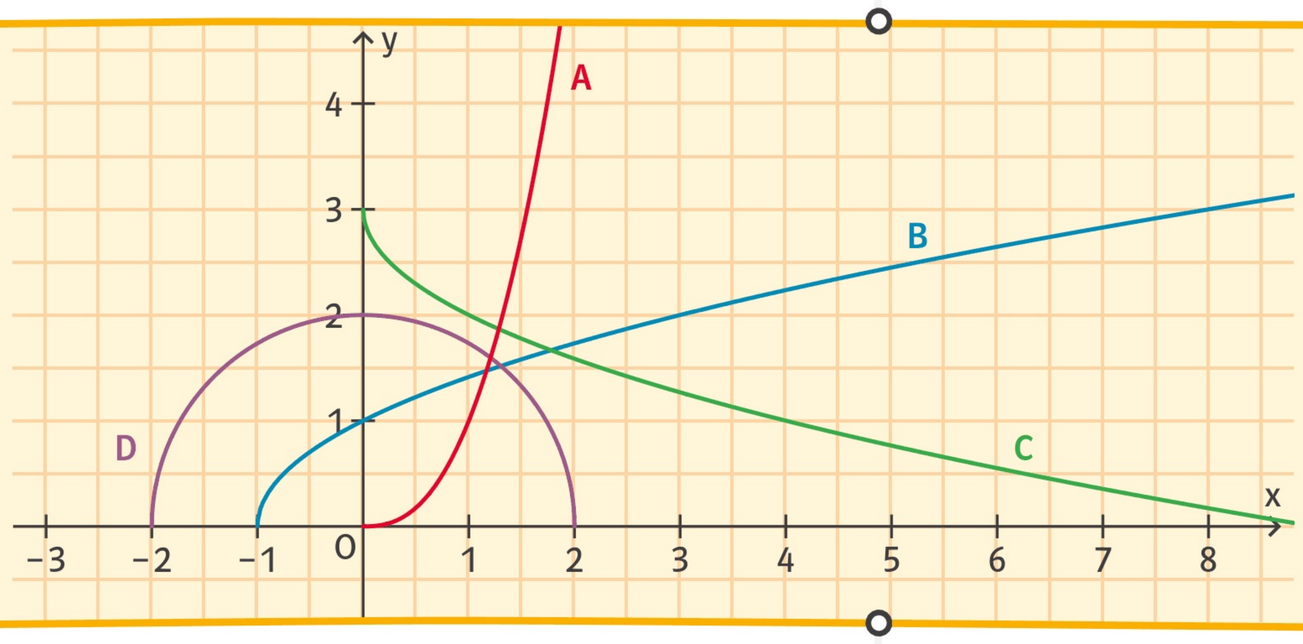
Ordnen Sie den Funktionen ihren zugehörigen Graphen zu und begründen Sie Ihre Zuordnung mithilfe charakteristischer Eigenschaften der jeweiligen Funktion.

$f: x \mapsto \sqrt{x+1}$

$g: x \mapsto -\sqrt{x}+3$

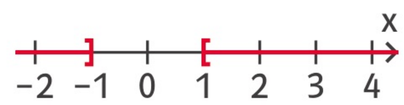
$h: x \mapsto \sqrt{4-x^2}$

$k: x \mapsto x^2 \cdot \sqrt{x}$



Bei der Untersuchung der Eigenschaften von Funktionen, die mit der Wurzelfunktion verknüpft sind, geht man auf die bekannte Weise vor. Besonderheiten, die sich bei der Wurzelfunktion ergeben, werden im Folgenden beispielhaft gezeigt.

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ mit maximaler Definitionsmenge.



Definitionsmenge

Da der Radikand nicht negativ sein darf, bestimmt man alle x-Werte, für die der Radikand größer oder gleich null ist.

$x^2 - 1 \geq 0$
$\Leftrightarrow \; x^2 \geq 1$
$\Leftrightarrow \; x \leq -1 \text{ oder } x \geq 1$
$D =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

Alternative Schreibweise:
$D = \mathbb{R} \setminus]-1; 1[$.

Symmetrieverhalten

Symmetrie zur y-Achse: $f(-x) = f(x)$.
Symmetrie zum Ursprung: $f(-x) = -f(x)$.

$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1} = f(x)$
Der Graph von f ist symmetrisch zur y-Achse.

Nullstellen

Die Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$ sind die Nullstellen von f. Der Wert einer Wurzel ist genau dann null, wenn der Radikand null ist.

$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$
$\Leftrightarrow x = -1 \text{ oder } x = 1$

Schnittpunkt mit der y-Achse

$S_y(0 \mid f(0))$

Da $0 \notin D$ gilt, hat der Graph von f keinen Schnittpunkt mit der y-Achse.

Verhalten an den Rändern der Definitionsmenge

Das Verhalten von Funktionen der Form $x \mapsto \sqrt{g(x)}$ an den Rändern von D ergibt sich aus dem Verhalten von g an diesen Rändern, denn es gilt $\sqrt{g(x)} \to 0$ für $g(x) \to 0$ und $\sqrt{g(x)} \to +\infty$ für $g(x) \to +\infty$.

Der Summand des Radikanden mit dem höchsten Exponenten ist x^2. Also gilt

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\underbrace{x^2 - 1}_{\to +\infty}} = +\infty \text{ und}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\underbrace{x^2 - 1}_{\to +\infty}} = +\infty.$$

Außerdem gilt

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \sqrt{\underbrace{x^2 - 1}_{\to 0}} = f(-1) = 0 \text{ und}$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \sqrt{\underbrace{x^2 - 1}_{\to 0}} = f(1) = 0.$$

Alternative Lösung für den jeweils zweiten Grenzwert:
Es ist

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

und

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x)$$

aufgrund der Symmetrie von G_f zur y-Achse

Extrempunkte und Monotonieverhalten

Man löst die Gleichung $f'(x) = 0$, um mögliche Extremstellen zu bestimmen. Anschließend überprüft man ihre Existenz mithilfe des Vorzeichenwechselkriteriums oder der 2. Ableitung.
Wenn die Definitionsmenge eingeschränkt ist, muss man zusätzlich noch auf Randextrema untersuchen.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$f'(x) = 0 \iff \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 0 \iff x = 0$$

Da $0 \notin D$ ist, kann bei $x = 0$ keine Extremstelle vorliegen.
Randextrema: Es ist $f(-1) = 0$ und $f(1) = 0$.
Für $x < -1$ gilt $f'(x) < 0$; also ist G_f für $x < -1$ streng monoton fallend.
Für $x > 1$ gilt $f'(x) > 0$; also ist G_f für $x > 1$ streng monoton steigend.
$T_1(-1\,|\,0)$ und $T_2(1\,|\,0)$ sind Tiefpunkte.

Auch bei den weiteren Aspekten der Funktionsuntersuchung kann man mithilfe der Symmetrieeigenschaften argumentieren.

Wendepunkte und Krümmungsverhalten

Man löst die Gleichung $f''(x) = 0$, um mögliche Wendestellen zu bestimmen. Anschließend überprüft man ihre Existenz mithilfe des Vorzeichenwechselkriteriums oder der 3. Ableitung.
Für $f''(x) < 0$ ist der Graph rechtsgekrümmt, für $f''(x) > 0$ ist er linksgekrümmt.

$$f'(x) = x \cdot (x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = 1 \cdot (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} + x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (x^2-1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{x^2}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

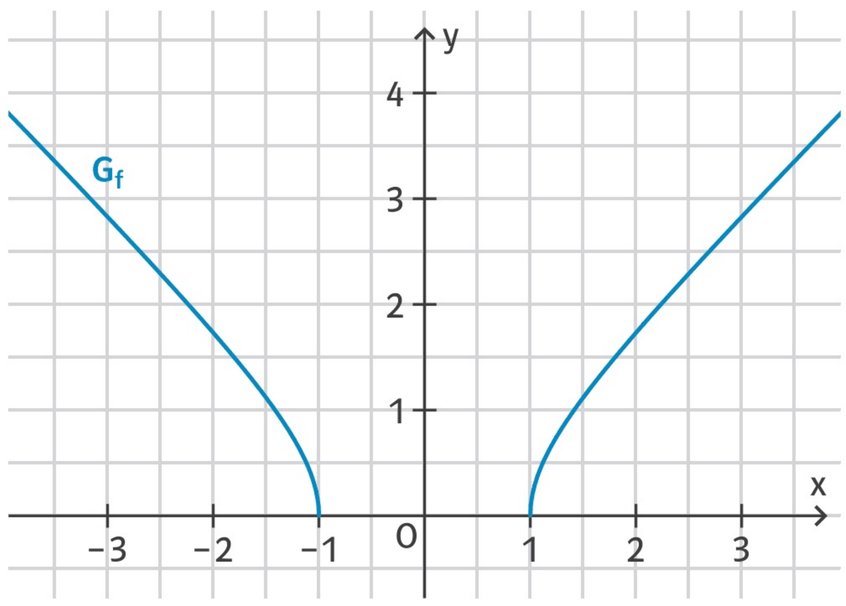
$$= \frac{1 \cdot (x^2-1) - x^2}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$$

Es ist $f''(x) = \frac{-1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} < 0$ für alle $x \in D$.
Es existieren keine Wendestellen.
Der Graph ist für $x \in]-\infty; -1]$ und für $x \in [1; +\infty[$ rechtsgekrümmt.

Graph

Zum Zeichnen verwendet man die ermittelten Eigenschaften und berechnet gegebenenfalls noch zusätzliche Funktionswerte.



Aspekte bei der Untersuchung einer Funktion f und ihres Graphen G_f:

- Definitionsmenge von f
- Symmetrieverhalten von G_f
- Nullstellen von f
- Schnittpunkt von G_f mit der y-Achse
- Verhalten von f an den Rändern der Definitionsmenge und gegebenenfalls Asymptoten von G_f
- Extrempunkte von G_f und Monotonieverhalten von f
- Wendepunkte und Krümmungsverhalten von G_f

Beispiel 1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2\sqrt{x-1} + 0{,}5$ mit maximaler Definitionsmenge D_f.

a) Bestimmen Sie D_f.

b) Beschreiben Sie, wie der Graph von f aus dem Graphen von g mit $g(x) = \sqrt{x}$ hervorgeht.

c) Skizzieren Sie die Graphen von f und g in ein gemeinsames Koordinatensystem.

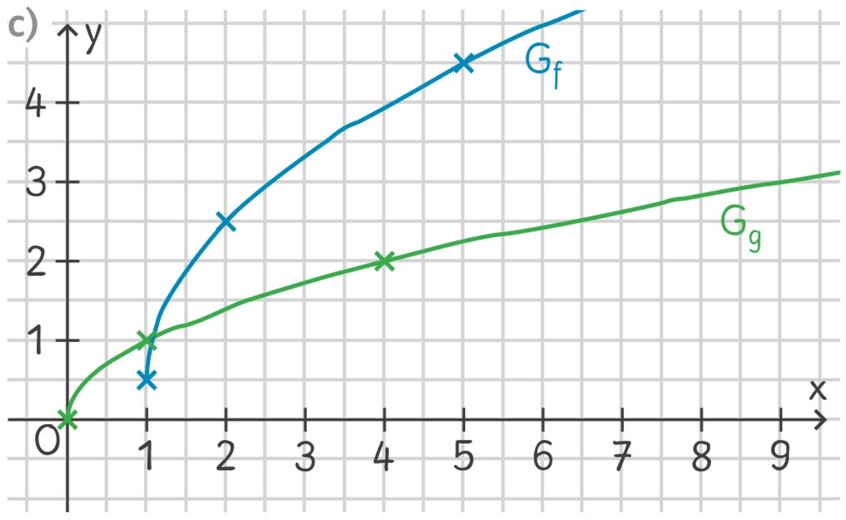
Lösung

a) $x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$

$D_f = [1; +\infty[$

b) Der Graph G_f entsteht aus dem Graphen von g durch Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung und anschließende Verschiebung um 1 in x-Richtung sowie um 0,5 in y-Richtung.

c)



Beispiel 2

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x - \sqrt{x}$ mit maximaler Definitionsmenge D. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet. Geben Sie D an, bestimmen Sie die Nullstellen von f sowie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte von G_f und skizzieren Sie anschließend G_f.

Lösung

Definitionsmenge: $D = [0; +\infty[$.

Nullstellen: $x - \sqrt{x} = 0 \iff \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} - 1) = 0 \iff x = 0$ oder $x = 1$.

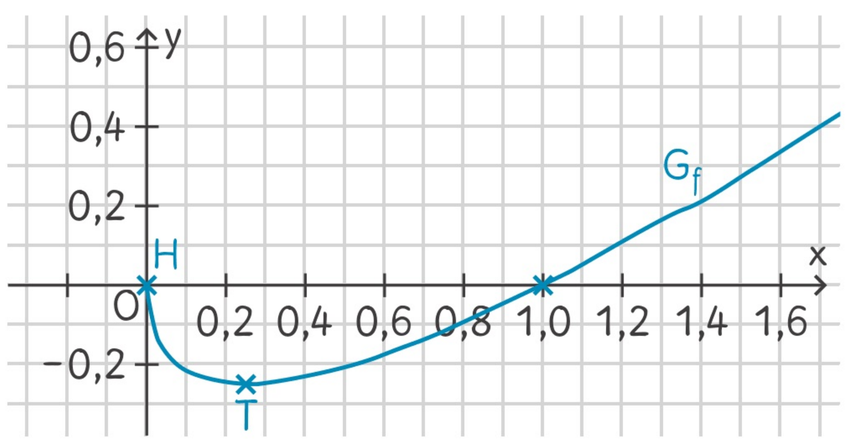
Ableitung: $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ für $x > 0$.

$f'(x) = 0 \iff 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \iff 1 = \frac{1}{2\sqrt{x}} \iff 2\sqrt{x} = 1 \iff \sqrt{x} = \frac{1}{2} \iff x = \frac{1}{4}$

$f'(x)$:	< 0		> 0
		$\frac{1}{4}$	
G_f:	↘	T	↗

Tiefpunkt: $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$; $T\left(\frac{1}{4} \middle| -\frac{1}{4}\right)$.

Randextrema: Aus $f(0) = 0$ und $f(x) < 0$ im Intervall $]0; 1[$ folgt, dass $H(0|0)$ ein Hochpunkt ist.



Beispiel 3

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x \cdot \sqrt{5 - x^2}$ mit $D = \left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right]$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Untersuchen Sie G_f auf Symmetrie.

b) Bestimmen Sie die Größen der Winkel, unter denen G_f die x-Achse schneidet.

Lösung

a) $f(-x) = -x \cdot \sqrt{5 - (-x)^2} = -x \cdot \sqrt{5 - x^2} = -f(x) \implies G_f$ ist symmetrisch zum Ursprung.

b) Nullstellen: $x \cdot \sqrt{5 - x^2} = 0 \iff x = -\sqrt{5}$ oder $x = 0$ oder $x = \sqrt{5}$.

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{5 - x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{5 - x^2}} \cdot (-2x) = \frac{\left(\sqrt{5 - x^2}\right)^2}{\sqrt{5 - x^2}} + \frac{-x^2}{\sqrt{5 - x^2}} = \frac{-2x^2 + 5}{\sqrt{5 - x^2}}$$

$$f'(0) = \frac{5}{\sqrt{5}} = m = \tan\alpha \implies \alpha \approx 65{,}9°$$

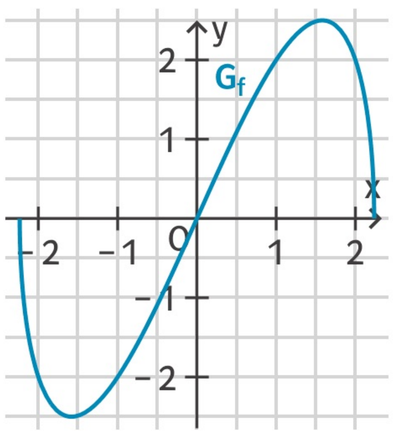
Da $f'\left(\sqrt{5}\right)$ und $f'\left(-\sqrt{5}\right)$ nicht definiert sind, betrachtet man den Grenzwert der Ableitung an diesen Stellen:

$$\lim_{\substack{x \to \sqrt{5} \\ x < \sqrt{5}}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to \sqrt{5} \\ x < \sqrt{5}}} \left(\underbrace{(-2x^2 + 5)}_{\to -5} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5 - x^2}}}_{\to 0^+} \right) \to +\infty = -\infty,$$

$$\lim_{\substack{x \to -\sqrt{5} \\ x > -\sqrt{5}}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to -\sqrt{5} \\ x > -\sqrt{5}}} \left(\underbrace{(-2x^2 + 5)}_{\to -5} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5 - x^2}}}_{\to 0^+} \right) \to +\infty = -\infty.$$

Das heißt, G_f besitzt an den Stellen $x = \sqrt{5}$ und $x = -\sqrt{5}$ jeweils eine senkrechte Tangente und schneidet deswegen die x-Achse an beiden Stellen unter einem Winkel von 90°.

Hinweis:
Zeichnen Sie mithilfe eines Funktionenplotters den Graphen der Funktion, um die Ergebnisse zu überprüfen.



Aufgaben

1 Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion f.

→ Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

a) $f: x \mapsto \sqrt{2x+1}$ **b)** $f: x \mapsto \sqrt{2x^2+7}$ **c)** $f: x \mapsto \sqrt{9-x^2}$

d) $f: x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{3x-2}}$ **e)** $f: x \mapsto \sqrt{x^2+3x}$ **f)** $f: x \mapsto \sqrt{2x^2-2}$

2 Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion f aus dem der Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ hervorgeht.

a) $f: x \mapsto 2\sqrt{x-1}$ **b)** $f: x \mapsto \sqrt{x-3}+2$ **c)** $f: x \mapsto \frac{1}{3}\sqrt{x+2}+\frac{1}{2}$

3 Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf Symmetrie.

a) $f: x \mapsto x \cdot \sqrt{x^2-8}$ **b)** $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-3}}$ **c)** $f: x \mapsto x^2+\sqrt{x^4+2}$

4 Gegeben ist die Funktion f mit maximaler Definitionsmenge D. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.
Geben Sie D an, untersuchen Sie G_f auf Symmetrie und das Verhalten von f an den Rändern von D, bestimmen Sie die Nullstellen von f sowie die Lage und Art der Extrempunkte von G_f und skizzieren Sie anschließend G_f. Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mit einem Funktionenplotter.

a) $f: x \mapsto \sqrt{2x}-x^2$ **b)** $f: x \mapsto \frac{1}{3}x \cdot \sqrt{16-x^2}$ **c)** $f: x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Test 1

→ Lösungen | Seite 290

5 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ mit maximaler Definitionsmenge D. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass ein Term der Ableitungsfunktion $f'(x) = \frac{\frac{1}{2}x-1}{\sqrt{(x-1)^3}}$ ist.

b) Geben Sie D an, untersuchen Sie G_f auf Symmetrie und das Verhalten von f an den Rändern von D, bestimmen Sie die Nullstellen von f sowie die Lage und Art der Extrempunkte von G_f und skizzieren Sie anschließend G_f.

6 Gegeben sind die Funktionen $f: x \mapsto \sqrt{3-x}$ und $g: x \mapsto \sqrt{x}-\sqrt{3}$. Ihre Graphen werden mit G_f bzw. G_g bezeichnet.

a) Geben Sie die maximalen Definitionsmengen D_f und D_g an.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f und G_g mit den Koordinatenachsen und geben Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punktes beider Graphen an.

c) Skizzieren Sie G_f und G_g in ein gemeinsames Koordinatensystem und kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mit einem Funktionenplotter.

7 **Abiturprüfung 2019 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 1**
Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \sqrt{x+1}-2$ mit maximaler Definitionsmenge D.

a) Geben Sie D an.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von g im Punkt $(8 \mid g(8))$.

8 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ mit $D = [0; +\infty[$. Bestimmen Sie Gleichungen der Tangenten an G_f und $G_{f^{-1}}$ im Schnittpunkt $S(1 \mid 1)$ der beiden Graphen und ermitteln Sie die Größe des Schnittwinkels der beiden Graphen.

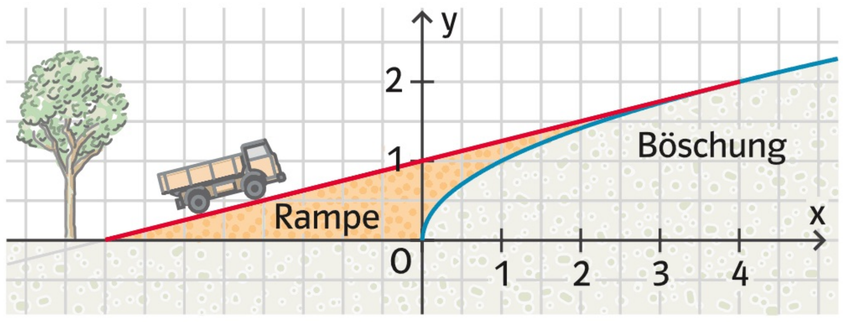
→ Strategie | Seite 256
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

9 **Abiturprüfung 2017 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1**
Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto 2\sqrt{4+x}-1$ mit maximaler Definitionsmenge D_g. Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet.

a) Geben Sie D_g und die Koordinaten des Schnittpunkts von G_g mit der y-Achse an.

b) Beschreiben Sie, wie G_g schrittweise aus dem Graphen der in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion $w: x \mapsto \sqrt{x}$ hervorgeht, und geben Sie die Wertemenge von g an.

10 Das Profil einer Böschung wird näherungsweise beschrieben durch den Graphen der Funktion $f: x \mapsto \sqrt{x}$. Eine Längeneinheit entspricht 5 m.
An die Böschung soll eine Rampe mit einem Steigungswinkel von 14° knickfrei angebaut werden.
Ermitteln Sie, wo die Rampe auf der Böschung beginnt und wo sie im Gelände endet, und bestimmen Sie die Länge der Rampe.



11 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ und $D = D_{max}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Bestimmen Sie den Term der Ableitungsfunktion f' von f und geben Sie die Definitionsmengen D_f und $D_{f'}$ an.

b) Ermitteln Sie arbeitsteilig die Gleichungen der Tangenten t_A und t_B sowie der Normalen n_A und n_B an den Graphen von f in den Punkten $A(3|f(3))$ und $B(4|f(4))$.

c) Skizzieren Sie G_f sowie die Tangenten und die Normalen aus Teilaufgabe b) in ein Koordinatensystem. Beschreiben Sie die besondere Lage der Normalen. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des von G_f, der x-Achse und n_B eingeschlossenen Kreissektors.

12 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 2\sqrt{8 - 2x^2}$ mit $D = D_{max}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge und untersuchen Sie den Graphen auf Symmetrie.

b) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f sowie ihrer Ableitung f' an den Rändern der Definitionsmenge und beschreiben Sie die Lage der Tangenten an G_f in diesen Randpunkten.

c) Zeichnen Sie G_f und $G_{f'}$ mithilfe eines Funktionenplotters.

13 **Abiturprüfung 2014 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1**

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 2 - \sqrt{12 - 2x}$ mit maximaler Definitionsmenge $D_f =]-\infty; 6]$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen. Bestimmen Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und geben Sie $f(6)$ an.

b) Bestimmen Sie den Term der Ableitungsfunktion f' von f und geben Sie die maximale Definitionsmenge von f' an.
Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to 6} f'(x)$ und beschreiben Sie, welche Eigenschaft von G_f aus diesem Ergebnis folgt. $\left(\textit{zur Kontrolle: } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{12 - 2x}}\right)$

c) Geben Sie das Monotonieverhalten von G_f und die Wertemenge von f an.

d) Geben Sie $f(-2)$ an und zeichnen Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein […].

e) Die Funktion f ist in D_f umkehrbar. Geben Sie die Definitionsmenge der Umkehrfunktion f^{-1} von f an und zeigen Sie, dass $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$ gilt.

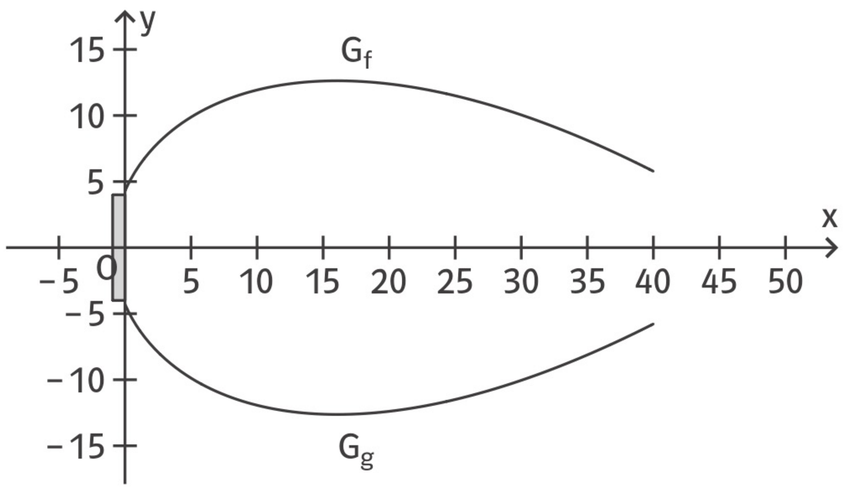
14 Die Abbildung zeigt den Querschnitt einer liegenden Vase. Der Graph G_f der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{35}\sqrt{10x + 9} \cdot (50 - x)$ stellt für $0 \le x \le 40$ die obere Berandung dar, der Graph G_g der Funktion g die untere Berandung. Die Berandung der Vase „entsteht“ durch Rotation von G_f um die x-Achse. Eine Längeneinheit entspricht 1 cm.

a) Geben Sie einen Term der Funktion g an.

b) Bestimmen Sie den Durchmesser der Vasenöffnung.

c) Der angesetzte Boden der Vase ist eine zylinderförmige Scheibe mit der Höhe 1 cm. Berechnen Sie das Volumen des Vasenbodens.

d) Berechnen Sie, welche Mindestmaße ein quaderförmiger Verpackungskarton für diese Vase haben müsste.



15 **a)** Zeigen Sie, dass die Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 3\sqrt{x},\ x \in \mathbb{R}^+$, im Punkt $B\,(x_0 \,|\, f(x_0))$ die x-Achse im Punkt $R\,(-x_0 \,|\, 0)$ schneidet.

b) Beschreiben Sie, wie man bei vorgegebenem Graphen G_f von f mit $f(x) = 3\sqrt{x},\ x \in \mathbb{R}^+$, mithilfe des Sachverhalts aus Teilaufgabe a) sofort eine Tangente in einem beliebigen Punkt an G_f zeichnen kann.

16 Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = 0{,}4\,a \cdot \sqrt{x - a^2},\ a \in \mathbb{R}^+$, mit maximaler Definitionsmenge D_a.

a) Ermitteln Sie D_a.

b) Bestimmen Sie einen Term der Ableitungsfunktionen f_a' von f_a.

c) Berechnen Sie diejenigen Werte von a, für die $f_a'(5) = 0{,}6$ gilt.

17 Gegeben sind die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \sqrt{a x^2 + 8},\ a \in \mathbb{R}^+$, sowie der Punkt $P_a\,(4 \,|\, f_a(4))$.

a) Bestimmen Sie einen Term der Ableitungsfunktionen f_a' von f_a und berechnen Sie $f_a'(4)$.

b) Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den $f_a'(4) = 0{,}5$ gilt.

c) Bestimmen Sie für $a = 0{,}5$ die Gleichung der Tangente an den Graphen von $f_{0,5}$ in $P_{0,5}$.

18 Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = x \cdot \sqrt{x + 2a},\ a \in \mathbb{R}^+$, mit maximaler Definitionsmenge D_a. Ihre Graphen werden mit G_a bezeichnet.

a) Ermitteln Sie D_a und die Nullstellen von f_a.

b) Bestimmen Sie den Wert von a so, dass der Punkt $T_a\,(-2 \,|\, f_a(-2))$ ein Tiefpunkt von G_a ist.

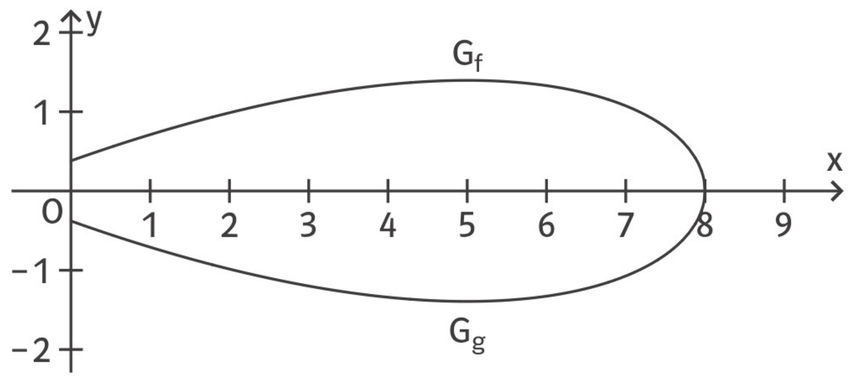
c) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Graphen G_a für $x > -2a$ linksgekrümmt sind.

→ Strategie | Seite 259
Aufstellen und Lösen einer Gleichung

Test 2

→ Lösungen | Seite 290

19 Die Abbildung zeigt den Querschnitt eines Propellerblatts, wobei der obere Rand durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}15(x + 1)\sqrt{6{,}4 - 0{,}8x}$ (x und f(x) in cm) modelliert werden kann.



a) Geben Sie eine für den Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge von f an.

b) Der abgebildete Querschnitt des Propellerblatts ist symmetrisch zur x-Achse. Der untere Rand wird durch den Graphen einer Funktion g modelliert. Geben Sie einen Funktionsterm von g an.

c) Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem G_f die x-Achse schneidet.

d) Bestimmen Sie, welche Länge und Breite eine quaderförmige Schachtel, in der man diese Propellerblätter vor der Weiterverarbeitung aufbewahrt, mindestens haben muss.

20 Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{ax}{\sqrt{1 + ax^2}},\ a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, mit maximaler Definitionsmenge D_a. Ihre Graphen werden mit G_a bezeichnet.

a) Bestimmen Sie D_a. Führen Sie dazu eine geeignete Fallunterscheidung durch.

b) Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von G_a.

c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktionen f_a. Betrachten Sie dieselben Fälle wie in Teilaufgabe a).

Betrachtet werden nun die Funktionen f_1 und f_{-1} sowie deren Graphen G_1 und G_{-1}.

d) Begründen Sie rechnerisch, dass $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 1$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = -1$ gilt.

e) Skizzieren Sie G_1 und G_{-1} in ein gemeinsames Koordinatensystem und geben Sie an, welcher geometrische Zusammenhang zwischen den beiden Graphen besteht.

Grundwissen Test

→ Lösungen | Seite 291

G 21 Prüfen Sie, ob das Dreieck ABC mit $a = 1{,}9\,\text{cm}$, $b = 14\,\text{mm}$ und $c = 0{,}1\,\text{dm}$ rechtwinklig ist.

Wiederholen

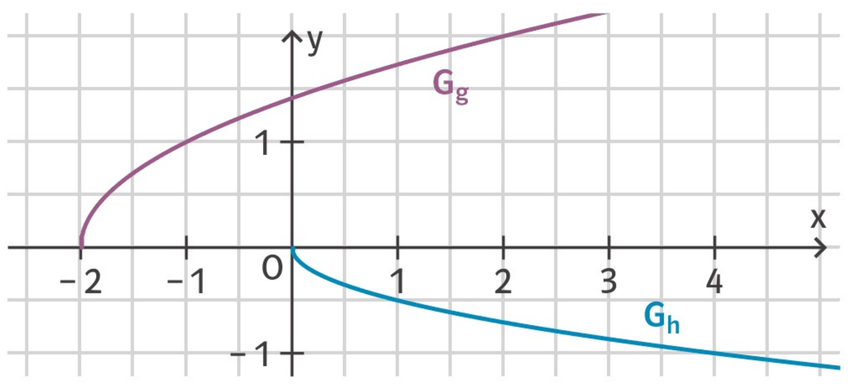
1 Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion f und ermitteln Sie einen Term der Ableitungsfunktion f'.

a) $f: x \mapsto 2x^{\frac{3}{2}}$ **b)** $f: x \mapsto 3 \cdot \sqrt[4]{x}$ **c)** $f: x \mapsto \sqrt{2x - 2} + 1$

d) $f: x \mapsto \sqrt[7]{x^3} \cdot \cos(x)$ **e)** $f: x \mapsto \sqrt{e^{3x}} + 2x$ **f)** $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x - 1}}$

g) $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}}$ **h)** $f: x \mapsto \sqrt{x^2 + x - 3}$ **i)** $f: x \mapsto \sqrt{(1 + x)(2 - x)}$

2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$. Beschreiben Sie, wie die Graphen von g und von h aus dem Graphen der Funktion f hervorgehen, und geben Sie jeweils einen Funktionsterm für g und für h an.



3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - 2$.

a) Schränken Sie die Definitionsmenge von f auf zwei Arten so ein, dass f jeweils umkehrbar ist und die jeweiligen Definitionsmengen unter dieser Bedingung maximal sind. Bestimmen Sie die Terme der Umkehrfunktionen f_1^{-1} sowie f_2^{-1} und geben Sie jeweils die Definitions- und Wertemenge an.

b) Zeichnen Sie den Graphen von f und die Graphen der beiden Umkehrfunktionen aus Teilaufgabe a) mithilfe eines Funktionenplotters und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse.

4 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente und der Normalen an den Graphen von f mit $f(x) = 2\sqrt{2x + 1}$ im Punkt $P(0 \mid f(0))$.

Vertiefen

5 Die Herstellungskosten für x Computerchips können für $0 \leq x \leq 100\,000$ näherungsweise durch die Funktion h mit $h(x) = \sqrt{x}$ (in €) modelliert werden.

a) Geben Sie an, wie hoch die Herstellungskosten für 100 Chips nach diesem Modell sind.

b) Berechnen Sie mithilfe der Ableitung, bei welcher Stückzahl die Herstellungskosten um 1 ct höher sind, wenn man einen Chip mehr produziert.

c) Die Funktion p beschreibt die Stückkosten, also die Herstellungskosten pro Chip, wenn x Chips produziert werden. Zeigen Sie, dass $p'(x) < 0$ für alle x gilt. Deuten Sie dies im Sachkontext.

6 Die Funktion f mit $D_f = \mathbb{R}$ ist zweimal differenzierbar. Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $f'(2) = 0$ und $f''(2) = -1$. Zeigen Sie, dass die Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ an der Stelle $x = 2$ ein lokales Minimum besitzt.

7 **a)** Die Funktion f ist differenzierbar und es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass eine Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ Maximumstelle von $g: x \mapsto \sqrt{f(x)}$ ist, wenn sie eine Maximumstelle von f ist.

b) Bestimmen Sie mit den Kenntnissen aus Teilaufgabe a) die Maximumstelle von g mit $g(x) = \sqrt{8{,}64x - 1{,}25x^4}$.

c) Untersuchen Sie, wie sich die Aussage in Teilaufgabe a) übertragen lässt, wenn die Funktion f statt mit der Wurzelfunktion mit einer beliebigen anderen streng monotonen Funktion als äußerer Funktion verknüpft wird.

8 Eine Funktion f besitzt die Funktionsgleichung $y = mx + t$. Geben Sie an, welche Bedingungen m und t erfüllen müssen, damit $f(x) = f^{-1}(x)$ mit $D_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ gilt. Beschreiben Sie die Lage der entsprechenden Funktionsgraphen.

9 Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = a \cdot \sqrt{x - a^2}$, $a \in \mathbb{R}^+$, deren Graphen mit G_a bezeichnet werden.

a) Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge und die Wertemenge von f_a.

b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f_a.

c) Alle Graphen G_a haben eine Tangente mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Berührpunktes B_a in Abhängigkeit von a.

→ Strategie | Seite 259
Aufstellen und Lösen einer Gleichung

d) Zeichnen Sie die Graphen G_1, $G_{1,5}$, G_2 und $G_{2,5}$ sowie die Tangente aus Teilaufgabe c) mithilfe eines Funktionenplotters.

Vernetzen

10 Bei einem kugelförmigen Riesenluftballon beträgt zu Beobachtungsbeginn der Radius 0,5 m.
Ab diesem Zeitpunkt wird er aufgepumpt, indem ihm pro Minute 1,5 m^3 Luft zugeführt werden.

a) Bestimmen Sie einen Term $V(t)$, der das Volumen V des Ballons in Kubikmetern in Abhängigkeit von der Zeit t in Minuten beschreibt.

b) Bestimmen Sie einen Term $r(t)$, der den Radius r des Ballons in Metern in Abhängigkeit von der Zeit t in Minuten beschreibt. Berechnen Sie $r(5)$ sowie $r'(5)$ und interpretieren Sie diese Werte im Sachzusammenhang.

11 Die Schwingungsdauer T eines Fadenpendels ist von der pendelnden Masse m unabhängig und kann für kleine Auslenkungen mit der Formel $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ $\left(T \text{ in s};\ l\text{: Fadenlänge in m};\ g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}\text{: Fallbeschleunigung}\right)$ berechnet werden.

a) Berechnen Sie die Schwingungsdauer T für ein Fadenpendel mit der Fadenlänge $l = 1\,m$.

b) Erläutern Sie, wie sich die Schwingungsdauer ändert, wenn die Fadenlänge l verdoppelt (verdreifacht, vervierfacht) wird.

c) Geben Sie an, auf das Wievielfache der Faden verlängert werden muss, damit sich die Schwingungsdauer T um 50 % (10 %, 75 %) vergrößert. Begründen Sie Ihre Antwort.

12 Ein frei fallender Körper erreicht mit zunehmender Fallhöhe eine immer größere Geschwindigkeit. Lässt man den Einfluss der Luftreibung unberücksichtigt, so kann man die Geschwindigkeit v $\left(\text{in } \frac{m}{s}\right)$ mit der Formel $v = \sqrt{2g \cdot h}$ berechnen $\left(g = 9{,}81\text{: Fallbeschleunigung in } \frac{m}{s^2};\ h\text{: Fallhöhe in m}\right)$.

a) Berechnen Sie die Endgeschwindigkeit in $\frac{km}{h}$, die bei einem 71 m hohen „Drop-Tower“ erreicht werden kann.

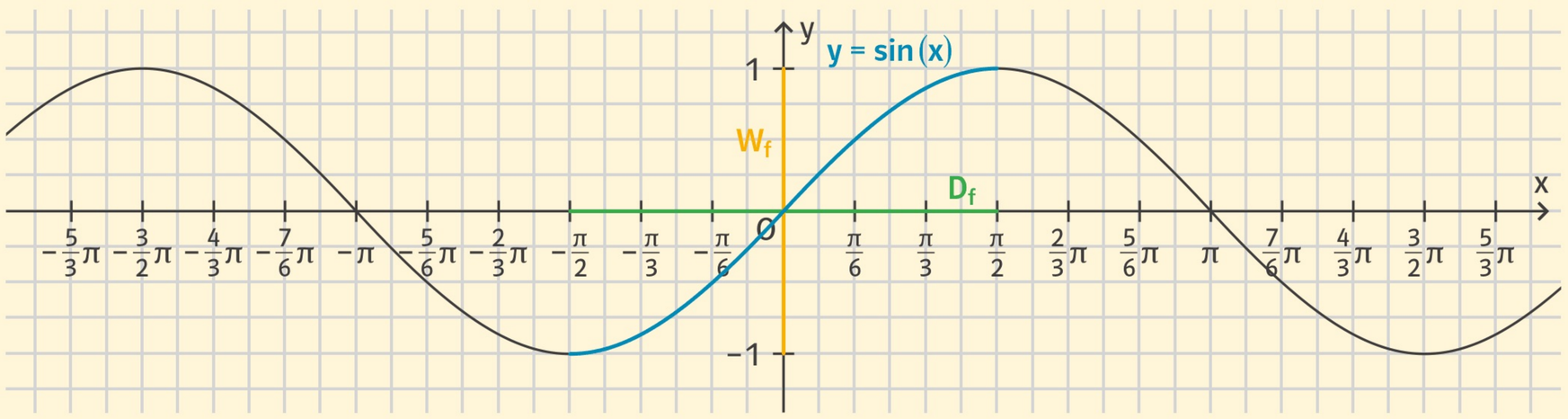
b) Ermitteln Sie, aus welcher Höhe eine Birne gefallen ist, die mit einer Geschwindigkeit von $15 \frac{m}{s}$ auf dem Boden aufschlägt.

c) Diskutieren Sie, warum Fallschirmspringerinnen und Fallschirmspringer, die vor dem Öffnen des Schirms mehrere Tausend Meter frei fallen, eine Grenzgeschwindigkeit von etwa $200 \frac{km}{h}$ nicht überschreiten und wie sich die Flughaltung auf die Grenzgeschwindigkeit auswirkt.

Die Arkusfunktionen

Bisher wurden zur Lösung von Gleichungen des Typs $\sin(x) = r$ bzw. $\cos(x) = r$, $r \in \mathbb{R}$, die Taschenrechner-Funktionen $\sin^{-1}$ bzw. $\cos^{-1}$ verwendet. Warum man das einfach machen kann, wird hier erklärt.

Auf Seite 177 wurde gezeigt, dass man zu einer Funktion f eine Umkehrfunktion f^{-1} bilden kann, wenn f streng monoton ist.
Damit dies für die Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$ zutrifft, muss dafür die Definitionsmenge auf $D_f = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ eingeschränkt werden. Die Wertemenge bleibt $W_f = [-1; 1]$.



Vertauscht man x und y in der Wertetabelle zu $f(x) = \sin(x)$, so erhält man die Wertetabelle der Umkehrfunktion f^{-1}.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3}{8}\pi$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3}{8}\pi$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x) = \sin(x)$	−1	−0,9239	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	−0,3827	0	0,3827	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,9239	1

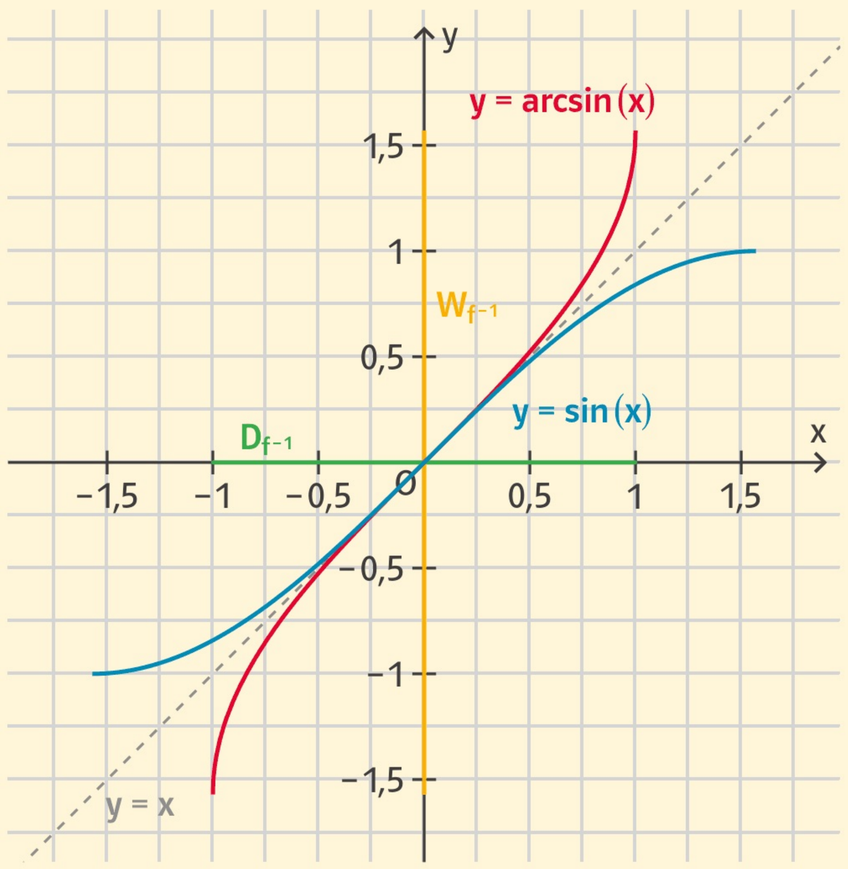
x	−1	−0,9239	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	−0,3827	0	0,3827	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,9239	1
$f^{-1}(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3}{8}\pi$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3}{8}\pi$	$\frac{\pi}{2}$

Die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ der Sinusfunktion nennt man **Arkussinusfunktion** oder auch $\sin^{-1}$:
$f^{-1}(x) = \arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$.

Die Wertemenge der Sinusfunktion ist die Definitionsmenge der Arkussinusfunktion:
$D_{f^{-1}} = W_f = [-1; 1]$.

Die Definitionsmenge der Sinusfunktion ist die Wertemenge der Arkussinusfunktion:
$W_{f^{-1}} = D_f = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

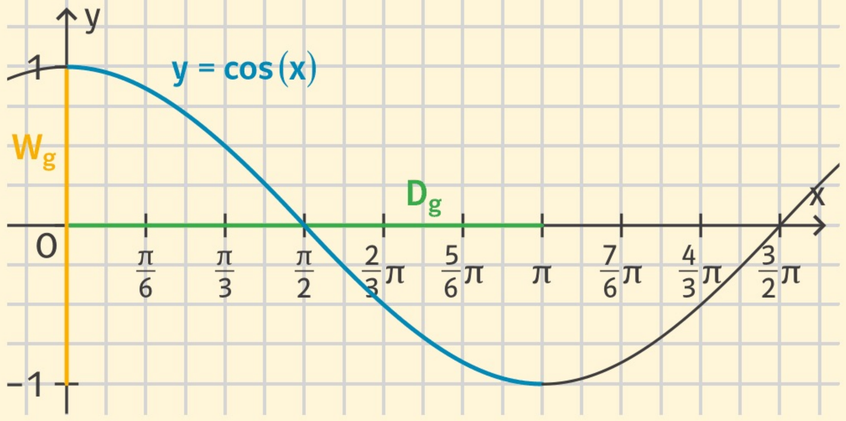
Die Graphen der Sinusfunktion und der Arkussinusfunktion liegen zueinander symmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten mit der Gleichung $y = x$.

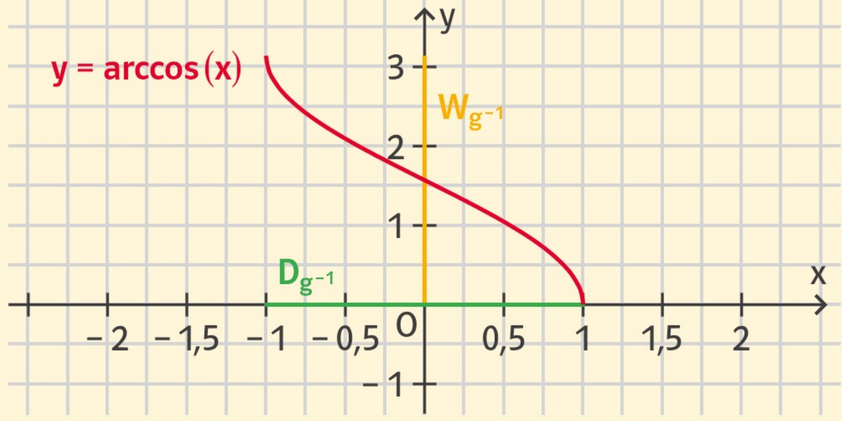


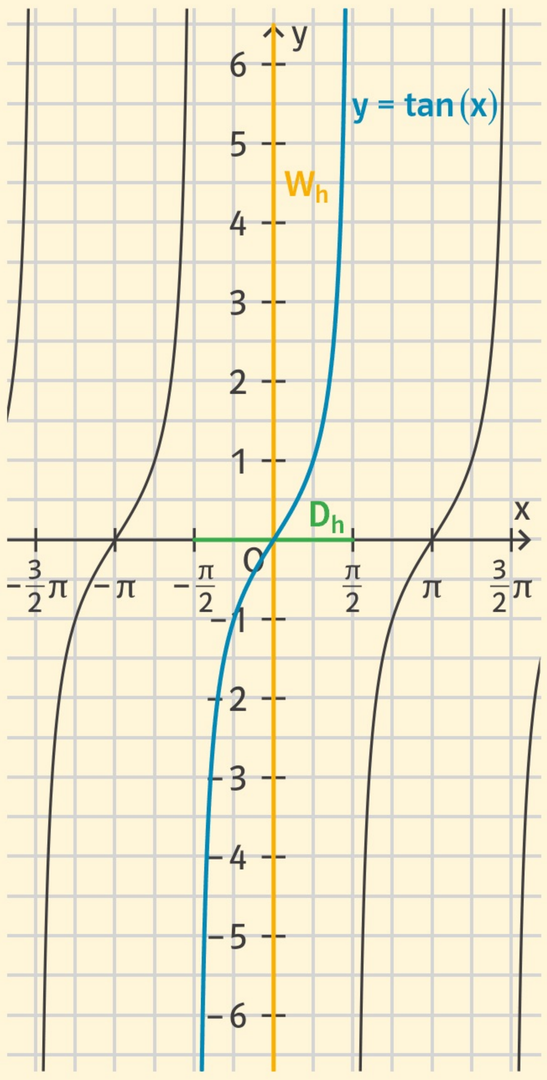
Die Arkussinusfunktion hat folgende Eigenschaften:
Sie ist streng monoton zunehmend. Der Schnittpunkt mit den Koordinatenachsen ist $(0\,|\,0)$.
Es gilt $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$; also ist der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung.

Analog bildet man die Umkehrfunktion zur Kosinusfunktion.
Da der Graph der Funktion g mit $g(x) = \cos(x)$ für $0 \le x \le \pi$ streng monoton fallend ist, wählt man dieses Intervall als Definitionsmenge: $D_g = [0; \pi]$. Die Wertemenge ist $W_g = [-1; 1]$.
Die Umkehrfunktion heißt **Arkuskosinusfunktion**: $g^{-1}(x) = \arccos(x) = \cos^{-1}(x)$.

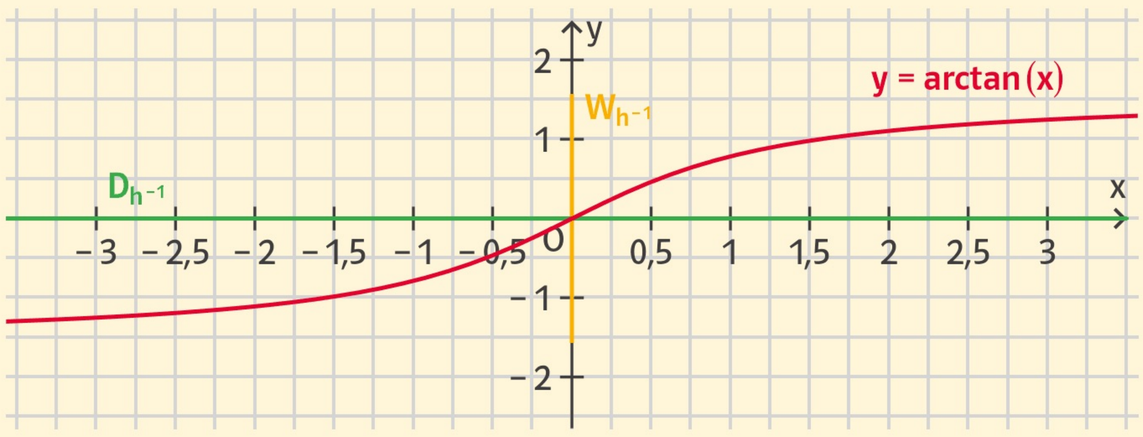
Auch bei der Arkuskosinusfunktion erhält man die Wertetabelle, indem man in der Wertetabelle der Kosinusfunktion x und y vertauscht.
Die Wertemenge der Kosinusfunktion ist die Definitionsmenge der Arkuskosinusfunktion: $D_{g^{-1}} = W_g = [-1; 1]$. Die Definitionsmenge der Kosinusfunktion ist die Wertemenge der Arkuskosinusfunktion: $W_{g^{-1}} = D_g = [0; 1]$.







Ordnet man jeder reellen Zahl x, interpretiert als Bogenmaß, ihren Tangenswert $\tan(x)$ zu, so erhält man die **Tangensfunktion** $h: x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ mit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \ldots -\frac{3}{2}\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi \ldots \right\}$.
Sie hat unendlich viele Definitionslücken, nämlich die Nullstellen der Kosinusfunktion. Die Wertemenge ist $W_h = \mathbb{R}$.
Die Tangensfunktion ist für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ streng monoton zunehmend. Schränkt man die Definitionsmenge auf $D_h = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ ein, ist h umkehrbar. Die Umkehrfunktion h^{-1} mit $h^{-1}(x) = \arctan(x) = \tan^{-1}(x)$ mit $D_{h^{-1}} = W_h = \mathbb{R}$ und $W_{h^{-1}} = D_h = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ heißt **Arkustangensfunktion**.



1 Berechnen Sie den Wert von x.
a) $\sin(x) = 1$ **b)** $\cos(x) = 0{,}5$ **c)** $\tan(x) = -1$ **d)** $\arccos(x) = \frac{\pi}{6}$ **e)** $\arcsin(x) = \frac{\pi}{4}$

2 **a)** Erstellen Sie für die Funktion g mit $g(x) = \cos(x)$ eine Wertetabelle für $x \in [0; \pi]$.
b) Vertauschen Sie x und y und erstellen Sie damit eine Wertetabelle für die Funktion g^{-1} mit $g^{-1}(x) = \arccos(x)$.
c) Zeichnen Sie beide Graphen in ein gemeinsames Koordinatensystem und machen Sie aufgrund Ihrer Zeichnung Aussagen über die Monotonie von g^{-1} und die Symmetrie des Graphen von g^{-1}.

3 Erstellen Sie für die Funktion h mit $h(x) = \arctan(x)$ eine Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen für $-5 \le x \le 5$. Machen Sie aufgrund Ihrer Zeichnung Aussagen über die Monotonie von h und die Symmetrie des Graphen von h.

Rückblick

Umkehrbarkeit, Umkehrfunktion

Eine Funktion $f: x \mapsto f(x)$ mit der Definitionsmenge D_f und der Wertemenge W_f heißt **umkehrbar**, falls es zu jedem $y \in W_f$ genau ein $x \in D_f$ mit $y = f(x)$ gibt.

Ist eine Funktion umkehrbar, so ist die umgekehrte Zuordnung ebenfalls eine Funktion. Diese heißt **Umkehrfunktion** von f und wird mit f^{-1} bezeichnet.

Es gilt $D_{f^{-1}} = W_f$ und $W_{f^{-1}} = D_f$.

Kriterium für die Umkehrbarkeit

Ist f eine streng monotone Funktion, so ist sie umkehrbar.

Damit ist insbesondere jede differenzierbare Funktion f in einem Intervall I umkehrbar, wenn $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$ gilt.

Zusammenhang zwischen dem Graphen G_f einer Funktion f und dem Graphen $G_{f^{-1}}$ ihrer Umkehrfunktion f^{-1}

Die Graphen G_f und $G_{f^{-1}}$ sind zueinander symmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten.

Bestimmen des Funktionsterms $f^{-1}(x)$

1. Auflösen der Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach x.
2. Variablentausch $x \leftrightarrow y$, wobei nun $y = f^{-1}(x)$ gilt.

Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten

Funktionen der Form $f: x \mapsto a \cdot x^{\frac{p}{q}} = a \cdot \sqrt[q]{x^p}$ $(a \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ heißen **Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten**.

Insbesondere heißt $f: x \mapsto \sqrt{x}$ **(Quadrat-)Wurzelfunktion**.

Für $x \in \mathbb{R}^+$ hat die Funktion $f: x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$ die Umkehrfunktion $f^{-1}: x \mapsto x^{\frac{q}{p}}$.

Ableitungsfunktion und Stammfunktion von Potenzfunktionen

Für Funktionen $f: x \mapsto x^r$ $(r \in \mathbb{Q})$ gilt $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$.

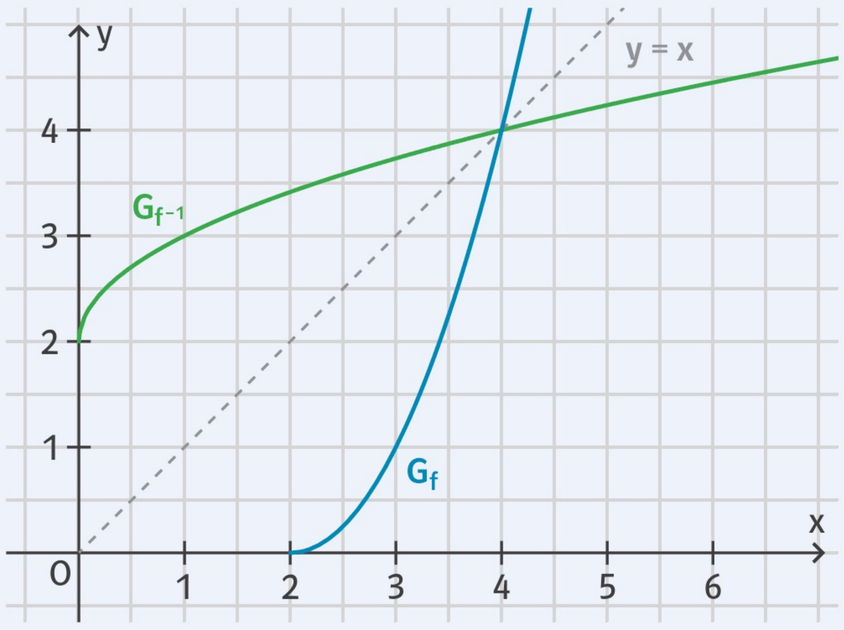
Umgekehrt gilt: Für $f: x \mapsto x^r$ $(r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$ ist $F: x \mapsto \frac{1}{r+1} x^{r+1}$ eine Stammfunktion von f.

Aspekte bei der Untersuchung einer mit der Wurzelfunktion verknüpften Funktion f und ihres Graphen G_f:

- Definitionsmenge von f
- Symmetrieverhalten von G_f
- Nullstellen von f
- Schnittpunkt von G_f mit der y-Achse
- Verhalten von f an den Rändern der Definitionsmenge und gegebenenfalls Asymptoten von G_f
- Extrempunkte von G_f und Monotonieverhalten von f
- Wendepunkte und Krümmungsverhalten von f von G_f

Die Funktion f mit $f(x) = (x-2)^2$ ist auf $D_f = [2; +\infty[$ umkehrbar, denn es gilt $f'(x) = 2x - 4 > 0$ für $x > 2$.

Es gilt $D_{f^{-1}} = W_f = [0; +\infty[$ und $W_{f^{-1}} = D_f = [2; +\infty[$.



1. $y = (x-2)^2 \Leftrightarrow \sqrt{y} = x - 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} + 2$
2. $y = \sqrt{x} + 2$; $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2$

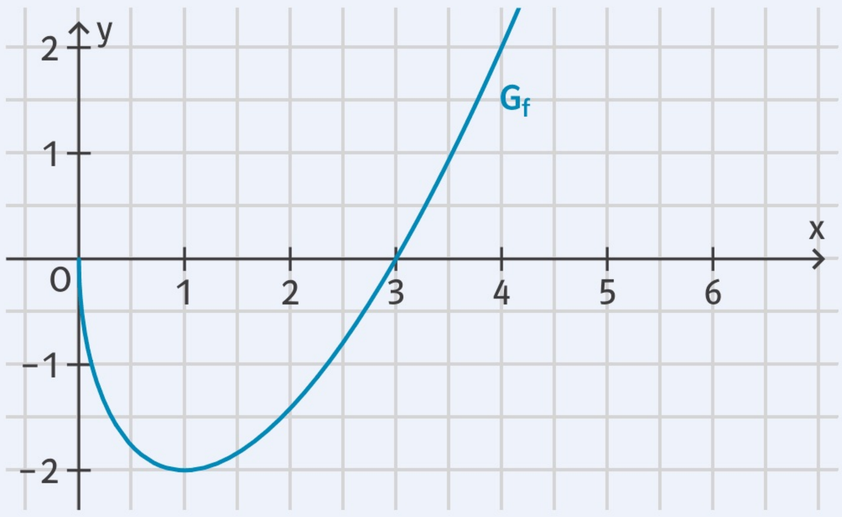
Die Funktion $f: x \mapsto x^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{x^3}$, $x \in \mathbb{R}_0^+$, ist eine Potenzfunktion mit rationalem Exponenten.

Ihre Umkehrfunktion ist $f^{-1}: x \mapsto x^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{x^5}$, $x \in \mathbb{R}_0^+$.

$f(x) = x^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{x^3}$
Ableitungsfunktion: $f'(x) = \frac{3}{5} x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}}$
Mögliche Stammfunktion:
$F(x) = \frac{1}{\frac{3}{5}+1} x^{\frac{3}{5}+1} = \frac{1}{\frac{8}{5}} x^{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8} x^{\frac{8}{5}}$

Die Ergebnisse einer Funktionsuntersuchung lassen sich mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware überprüfen.

$f: x \mapsto (x-3) \cdot \sqrt{x}$, $D_f = [0; +\infty[$

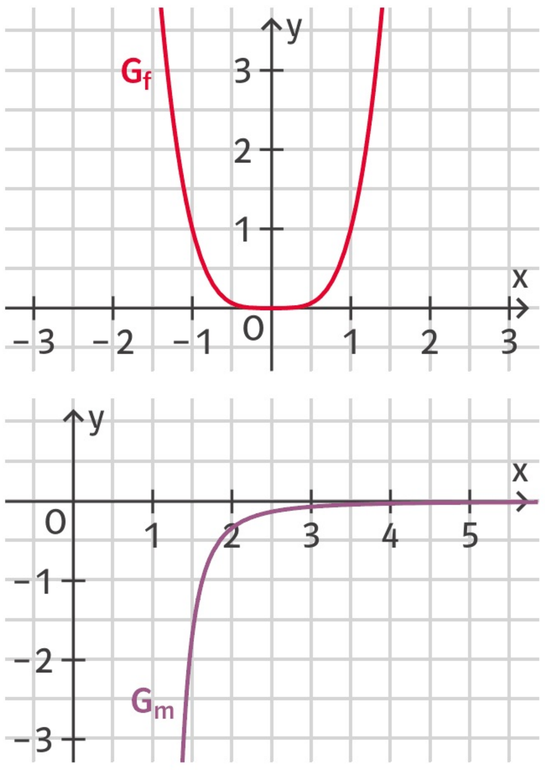


→ Lösungen | Seite 291

1 Gegeben ist die Funktion f mit maximaler Definitionsmenge D. Geben Sie D an und bestimmen Sie einen Term der Ableitungsfunktion f' von f.

a) $f: x \mapsto 3x^{\frac{2}{3}}$ **b)** $f: t \mapsto \frac{5}{\sqrt[5]{t}}$ **c)** $f: z \mapsto \sqrt{1 - z^2}$ **d)** $f: x \mapsto x \cdot \sqrt{9x + 3}$

2 Die sechs Graphen gehören zu Funktionen und deren Ableitungen. Nennen Sie zusammengehörige Paare und beurteilen Sie, welche der Graphen zu umkehrbaren Funktionen gehören können.



3 Zeigen Sie, dass f in dem gegebenen Intervall umkehrbar ist, bestimmen Sie einen Term der Umkehrfunktion f^{-1} und geben Sie $D_{f^{-1}}$ und $W_{f^{-1}}$ an.

a) $f: x \mapsto 2x + 1,\ x \in \mathbb{R}$ **b)** $f: x \mapsto \frac{2}{x - 3} - 1{,}5,\ x \in]3; +\infty[$

c) $f: x \mapsto \sqrt[3]{x} - 2,\ x \in \mathbb{R}_0^+$ **d)** $f: x \mapsto 0{,}5(x - 1)^2 + 2,\ x \in [1; +\infty[$

4 Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion k mit $k(x) = -\sqrt{x - 1} + 2,\ x \geq 1,$ aus dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = \sqrt{x},\ x \geq 0,$ hervorgeht, und ermitteln Sie die Nullstelle sowie die Wertemenge von k.

5 Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, die parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = -\frac{4}{3}x$ ist.

6 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2\sqrt{9 - x^2}$ mit maximaler Definitionsmenge D. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass $f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{9 - x^2}}$ ein Term der Ableitungsfunktion ist.

b) Geben Sie D an, untersuchen Sie G_f auf Symmetrie und ermitteln Sie das Verhalten von f und f' an den Rändern von D. Bestimmen Sie die Nullstellen von f sowie die Lage und Art des Extrempunktes von G_f und skizzieren Sie anschließend G_f.

7 Beurteilen Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

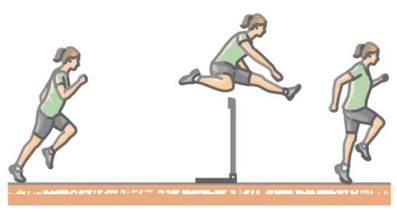
a) Ist der Graph einer Funktion f punktsymmetrisch zum Ursprung, dann ist f umkehrbar.

b) Hat der Graph einer Funktion f eine waagerechte Tangente, dann ist f nicht umkehrbar.

c) Jede lineare Funktion mit der Gleichung $y = mx + t,\ m \neq 0,$ ist umkehrbar.

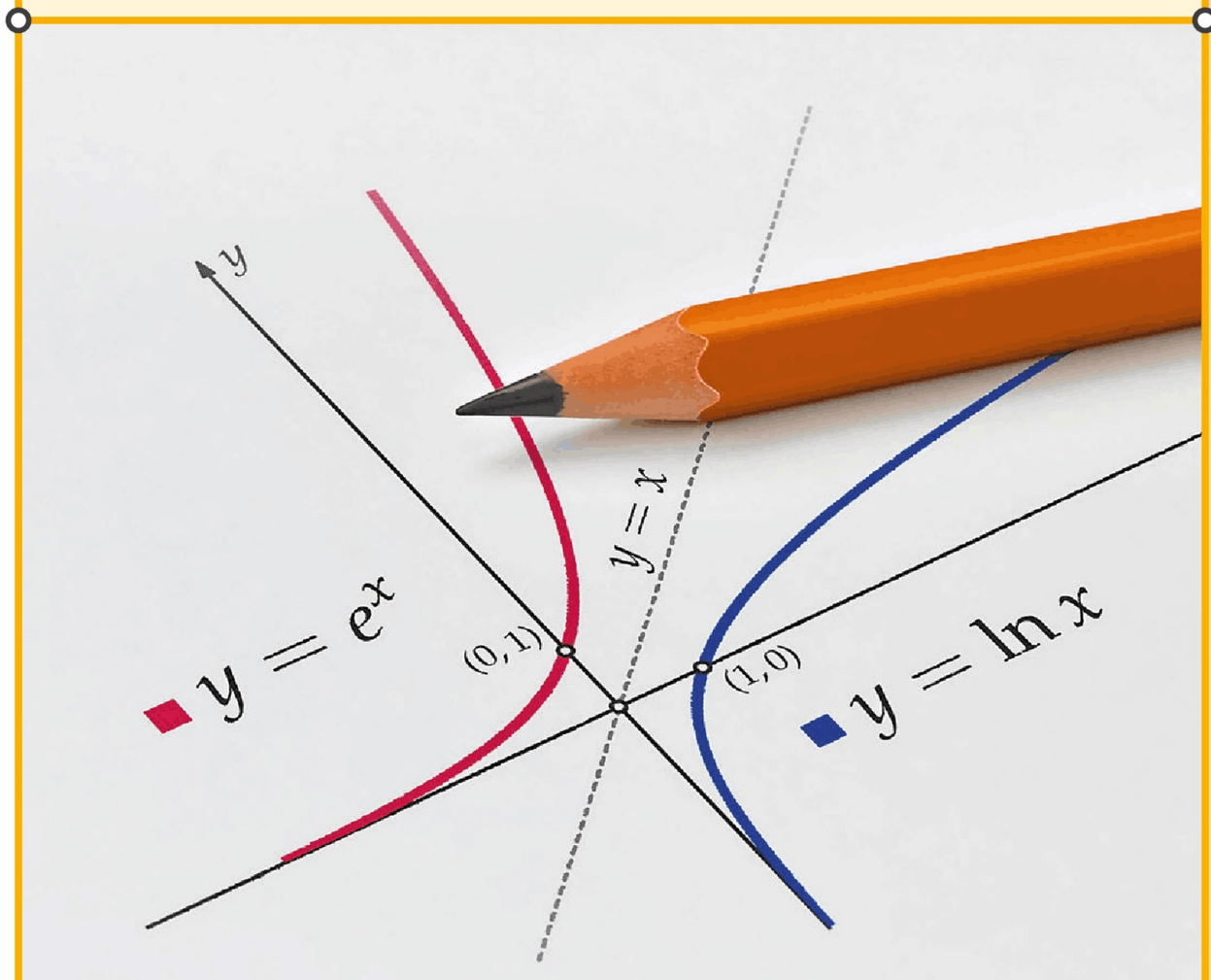
d) Ist eine Funktion f umkehrbar, so ist auch ihre Umkehrfunktion f^{-1} umkehrbar.

8 Beim optimalen Überqueren einer Hürde beschreibt der Fuß des Schwungbeins einer 400-m-Hürdenläuferin näherungsweise eine Kurve, deren höchster Punkt genau über der Hürde liegt. Diese Kurve lässt sich durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(x + 0{,}8)^2(3 - x)}$, $-0{,}8 \leq x \leq 3$, ($f(x)$ und x in Metern) modellieren. Berechnen Sie, wie weit hinter der Hürde die Läuferin aufkommt und wie hoch sich der Fuß über der 76,2 cm hohen Hürde befindet.



VII Natürliche Logarithmusfunktion

Schallquelle	Schallintensitätspegel (in dB)
Fallen einer Feder	0
Ticken einer Uhr	10
Flüstern	20
Ticken eines Weckers	30
Bibliothek-Leseraum	40
Dezente Radiomusik	50
Standgeräusch PKW	60
Staubsauger (1 m)	70
Laute Bahnhofstraße	80
Im vollen Hallenbad	90
Autobahn (50 m)	100
Kettensäge	110
Wasserfall	120
Düsenflugzeug (100 m)	130
Silvesterknaller (am Ohr)	180

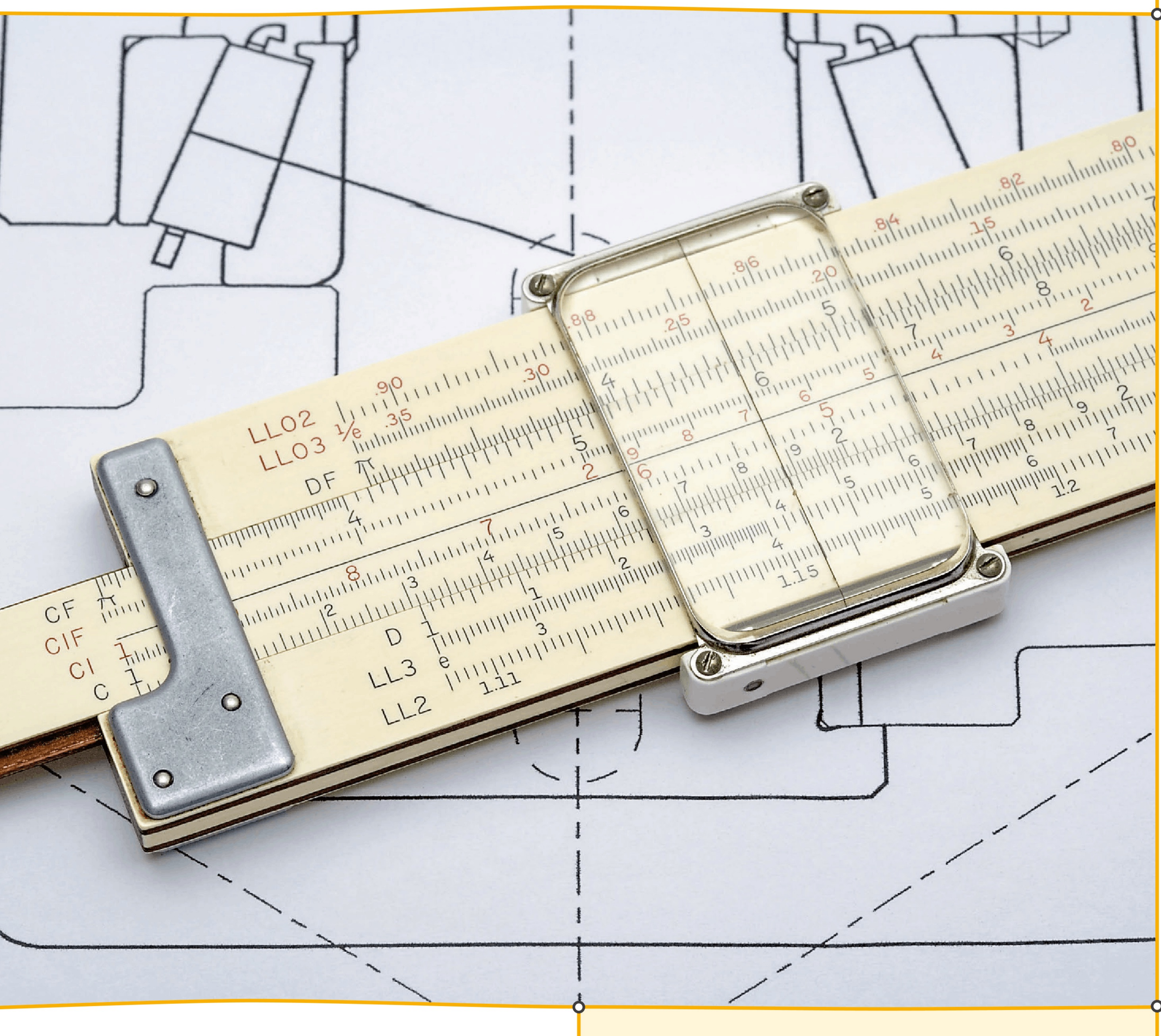


Das können Sie schon

- Eigenschaften der natürlichen Exponentialfunktion benennen und anwenden
- Umkehrfunktionen bilden und untersuchen
- Ableitung und Stammfunktionen der natürlichen Exponentialfunktion bilden
- Ableitungen und Grenzwerte von Verknüpfungen mit der natürlichen Exponentialfunktion bilden

Test

Check-in
zu Kapitel VII
Seite 268

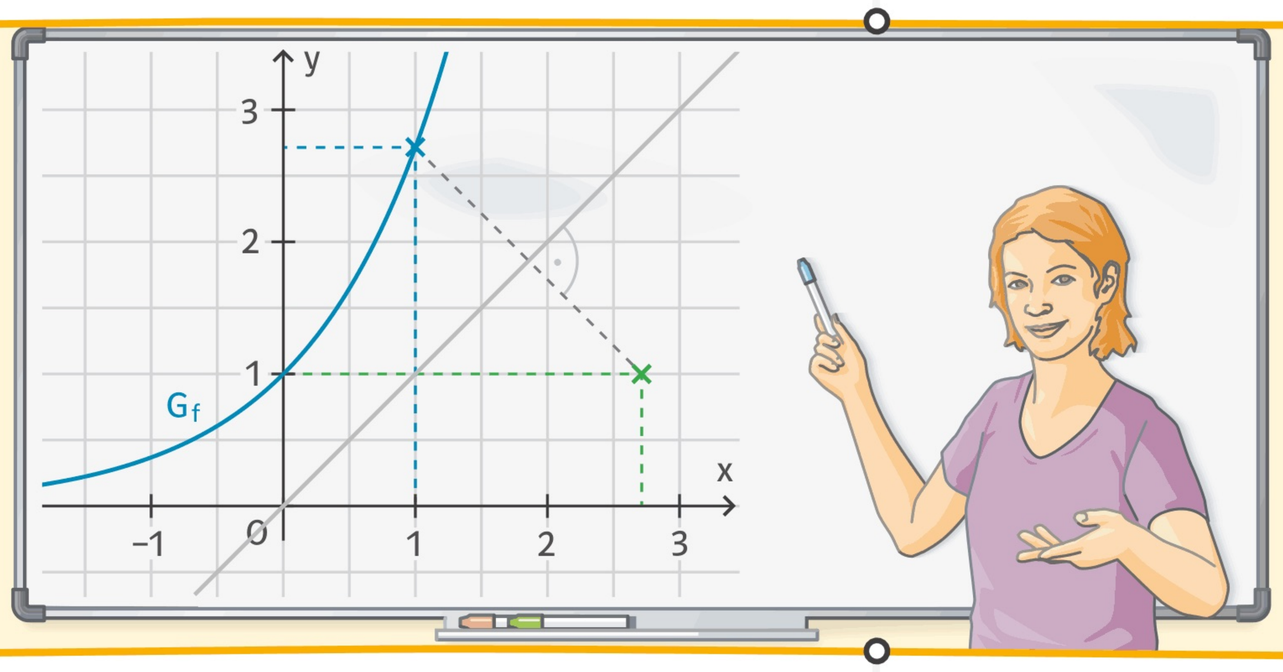


Das können Sie bald

- Die natürliche Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion verstehen
- Ableitung und Stammfunktion der ln-Funktion bilden
- Eigenschaften der ln-Funktion benennen und anwenden sowie Ableitungen und Grenzwerte von Verknüpfungen mit der ln-Funktion bilden
- Rechenregeln für Logarithmen anwenden

1 Die natürliche Logarithmusfunktion und ihre Ableitung

Gegeben ist die natürliche Exponentialfunktion $f: x \mapsto e^x$.
Erläutern Sie anhand der Abbildung, dass die Funktion f umkehrbar ist, und zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1}. Leiten Sie anhand der Zeichnung charakteristische Eigenschaften der Umkehrfunktion her.



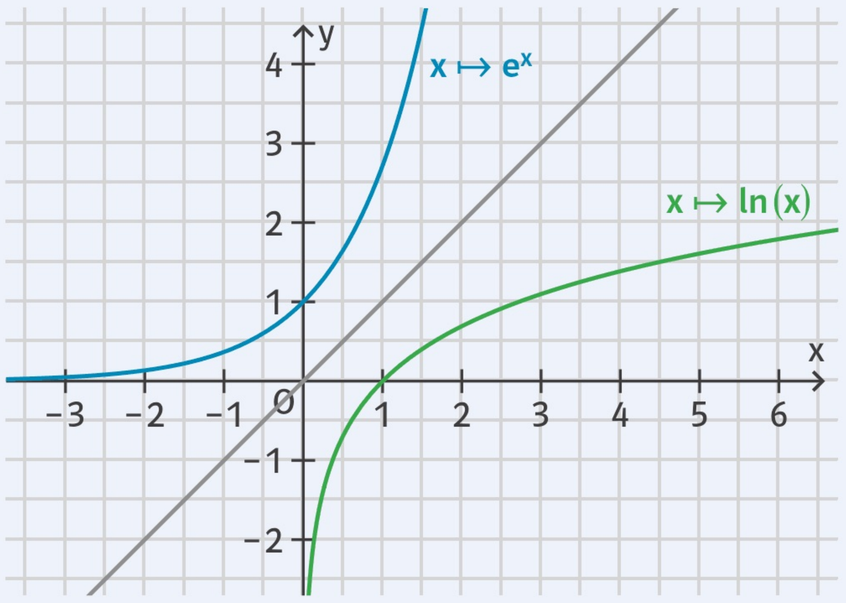
Die natürliche Exponentialfunktion $f: x \mapsto e^x$ mit $D_f = \mathbb{R}$ und $W_f = \mathbb{R}^+$ ist streng monoton zunehmend, da $f'(x) = e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Daher gibt es zu jeder vorgegebenen Zahl $y \in \mathbb{R}^+$ genau eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $e^x = y$. Die natürliche Exponentialfunktion ist also umkehrbar.

Wie bereits in Kapitel II behandelt, ist die Lösung der Exponentialgleichung $e^x = y$ diejenige Zahl x, mit der man e potenzieren muss, um y zu erhalten, d.h. $x = \ln(y)$. Nach Vertauschen von x und y ergibt sich $y = \ln(x)$. Die zu f gehörige Umkehrfunktion lautet daher $f^{-1}: x \mapsto \ln(x)$ mit $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$ und $W_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

Zur Erinnerung:
$e^x = y$
$\Leftrightarrow x = \log_e(y)$
$\Leftrightarrow x = \ln(y)$

Definition: Die Funktion $x \mapsto \ln(x)$ mit $D = \mathbb{R}^+$, die jeder positiven reellen Zahl x den natürlichen Logarithmus von x zuordnet, nennt man **natürliche Logarithmusfunktion** oder auch kurz **ln-Funktion**.

Die natürliche Logarithmusfunktion hat die Wertemenge $\mathbb{R}$. Sie ist die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion.



x	1	e	e^2	$\sqrt{e}$	$-\frac{1}{e}$
$\ln(x)$	0	1	2	$\frac{1}{2}$	–1

Eigenschaften der natürlichen Logarithmusfunktion $f: x \mapsto \ln(x)$

Die Funktion f hat die einzige Nullstelle $x = 1$, weil die Gleichung $\ln(x) = 0$ genau eine Lösung besitzt, nämlich $x = e^0 = 1$. Der Graph von f ist die Spiegelung des Graphen der natürlichen Exponentialfunktion an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten. Man erkennt daran, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton zunehmend ist. Die natürliche Logarithmusfunktion ist umkehrbar, ihre Umkehrfunktion ist die natürliche Exponentialfunktion. Es gilt

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Der Graph von f ist auf ganz $\mathbb{R}$ rechtsgekrümmt, weil der Graph der natürlichen Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ linksgekrümmt ist.

Da $\ln(x)$ nur für $x > 0$ definiert ist, gilt
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = \lim\limits_{x \to 0} \ln(x)$.

Die Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion

Da $\ln(x)$ die Zahl ist, mit der man e potenzieren muss, um x zu erhalten, gilt $e^{\ln(x)} = x$. Auf der linken Seite liegt eine Verkettung vor. Durch Ableiten auf beiden Seiten erhält man mithilfe der Kettenregel für $x \in \mathbb{R}^+$

$\left[e^{\ln(x)}\right]' = (x)' \Leftrightarrow e^{\ln(x)} \cdot \left[\ln(x)\right]' = 1 \Leftrightarrow x \cdot \left[\ln(x)\right]' = 1 \Leftrightarrow \left[\ln(x)\right]' = \frac{1}{x}$.

Zur Erinnerung:
Kettenregel
$f(x) = u(v(x))$
$\Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Damit gilt für $x > 0$: Die natürliche Logarithmusfunkton $x \mapsto \ln(x)$ ist eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{x}$. Um auch für $x < 0$ eine Stammfunktion zu finden, betrachtet man die Funktion $x \mapsto \ln(-x)$. Für ihre Ableitung gilt unter Anwendung der Kettenregel $[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Also ist $x \mapsto \ln(-x)$ für $x < 0$ eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{x}$. Die Fälle $x > 0$ und $x < 0$ können mithilfe der Betragsschreibweise zusammengefasst werden:

Zur Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ konnte man bisher keine Stammfunktion angeben, da $n = -1$ in der Formel $F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ ausgeschlossen ist.

Satz: Die **Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion** $f: x \mapsto \ln(x)$ mit $D_f = \mathbb{R}^+$ ist $\mathbf{f': x \mapsto \frac{1}{x}}$ mit $D_{f'} = \mathbb{R}^+$.
Eine Stammfunktion der Funktion $\mathbf{f: x \mapsto \frac{1}{x}}$ mit $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist die Funktion $\mathbf{F: x \mapsto \ln|x|}$ mit $D_F = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Zur besseren Lesbarkeit schreiben wir $\ln|x|$ anstelle von $\ln(|x|)$.

Rechenregeln für den natürlichen Logarithmus

Es gilt $e^{\ln(b) + \ln(c)} = e^{\ln(b)} \cdot e^{\ln(c)} = b \cdot c$. Daher ist $\ln(b) + \ln(c)$ diejenige Zahl, mit der man e potenzieren muss, um $b \cdot c$ zu erhalten. Das bedeutet $\ln(b \cdot c) = \ln(b) + \ln(c)$.

Außerdem gilt $e^{\ln(b) - \ln(c)} = \frac{e^{\ln(b)}}{e^{\ln(c)}} = \frac{b}{c}$. Man muss also e mit $\ln(b) - \ln(c)$ potenzieren, um $\frac{b}{c}$ zu erhalten, d.h. $\ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln(b) - \ln(c)$.
Darüber hinaus gilt für jedes $r \in \mathbb{R}$: $e^{r \cdot \ln(b)} = \left(e^{\ln(b)}\right)^r = b^r$, also $\ln(b^r) = r \cdot \ln(b)$.

Rechenregeln für den natürlichen Logarithmus

Für $b, c \in \mathbb{R}^+$ gilt:

(1) $\ln(b \cdot c) = \ln(b) + \ln(c)$, Beispiel: $\ln(3 \cdot 4) = \ln(3) + \ln(4)$.

(2) $\ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln(b) - \ln(c)$, Beispiel: $\ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln(3) - \ln(4)$.

(3) $\ln(b^r) = r \cdot \ln(b)$ für alle $r \in \mathbb{R}$. Beispiel: $\ln(3^{-4}) = -4 \cdot \ln(3)$.

Genauso lässt sich für jedes $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$ und $b, c \in \mathbb{R}^+$ zeigen:
$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$,
$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$,
$\log_a(b^r) = r \cdot \log_a(b)$ für $r \in \mathbb{R}$.
Vereinfachend sprechen wir im Weiteren bei den Rechenregeln unabhängig von der Basis von den Rechenregeln für den Logarithmus.

Beispiel 1

Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge von f und einen Term der Ableitung von f unter Verwendung der Rechenregeln für den Logarithmus.

a) $f: x \mapsto \ln(x^3)$ **b)** $f: x \mapsto \ln\left(\frac{3}{x}\right)$

Lösung

a) Die maximale Definitionsmenge der natürlichen Logarithmusfunktion ist $\mathbb{R}^+$ und x^3 ist genau dann positiv, wenn x positiv ist. Daher gilt $D = \mathbb{R}^+$. Aus $f(x) = \ln(x^3) = 3 \cdot \ln(x)$ folgt $f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$ für $x \in \mathbb{R}^+$.

b) Die maximale Definitionsmenge der natürlichen Logarithmusfunktion ist $\mathbb{R}^+$ und $\frac{3}{x}$ ist genau dann positiv, wenn x positiv ist. Daher gilt $D = \mathbb{R}^+$. Aus $\ln\left(\frac{3}{x}\right) = \ln(3) - \ln(x)$ folgt $f'(x) = 0 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}$ für $x \in \mathbb{R}^+$.

Alternative Lösung mit der Kettenregel:
Mit $u(x) = \ln(x)$, $v(x) = x^3$, $u'(x) = \frac{1}{x}$ und $v'(x) = 3x^2$ folgt
$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) = \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 = \frac{3}{x}$
für $x \in \mathbb{R}^+$.

Beispiel 2

Begründen Sie, dass F eine Stammfunktion der Funktion f für $x \neq 0$ ist.

a) $F: x \mapsto \frac{2}{3}\ln|x| + c$

$f: x \mapsto \frac{2}{3x}$

b) $F: x \mapsto x + \ln|x| + c$

$f: x \mapsto \frac{x+1}{x}$

Lösung

a) $x > 0$: $F(x) = \frac{2}{3} \cdot \ln(x) + c$

$\Rightarrow \quad F'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{3x} = f(x)$

$x < 0$: $F(x) = \frac{2}{3}\ln(-x) + c$

$\Rightarrow \quad F'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(-x)} \cdot (-1) = \frac{2}{3x} = f(x)$

b) $x > 0$: $F(x) = x + \ln(x) + c$

$\Rightarrow \quad F'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} = f(x)$

$x < 0$: $F(x) = x + \ln(-x) + c$

$\Rightarrow \quad F'(x) = 1 + \frac{1}{(-x)} \cdot (-1) = \frac{x+1}{x} = f(x)$

Beispiel 3

Beschreiben und begründen Sie, wie der Graph der angegebenen Funktion aus dem der Funktion $x \mapsto \ln(x)$ hervorgeht. Wenden Sie dazu die Rechenregeln für den Logarithmus an.

a) $f: x \mapsto \ln(\sqrt{x})$ **b)** $g: x \mapsto \ln(2 \cdot x)$

Lösung

a) Es gilt $f(x) = \ln(\sqrt{x}) = \ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x)$. Der Graph von f geht also aus dem Graphen von $x \mapsto \ln(x)$ durch Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in y-Richtung hervor.

b) Es gilt $g(x) = \ln(2 \cdot x) = \ln(2) + \ln(x)$. Der Graph von g geht also aus dem Graphen von $x \mapsto \ln(x)$ durch Verschiebung um $\ln(2) = 0{,}69\ldots$ in y-Richtung hervor.

Aufgaben

1 Bestimmen Sie zunächst die maximale Definitionsmenge von f. Ermitteln Sie dann die Ableitung von f, indem Sie gegebenenfalls die Rechenregeln für den Logarithmus anwenden.

a) $f(x) = 2\ln(x)$ **b)** $f(x) = \ln(2x)$ **c)** $f(x) = \ln\left(\frac{x}{3}\right)$ **d)** $f(x) = \ln(x^5)$

e) $f(x) = \ln(x + 4)$ **f)** $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ **g)** $f(x) = \ln\left(\sqrt[3]{x}\right)$ **h)** $f(x) = \ln(-3x)$

2 Gegeben sind die Funktionen

f: $x \mapsto 1 + \ln(x)$, k: $x \mapsto 1 + \ln(x^{-2})$,
g: $x \mapsto x + \ln(x^2)$, u: $x \mapsto \ln(\sqrt{x})$,
h: $x \mapsto x^2 + \ln(x^3)$ und v: $x \mapsto 3\ln(\sqrt{4x})$.

Auf den Kärtchen auf dem Rand sind Terme der zugehörigen Ableitungsfunktionen angegeben. Ordnen Sie die Kärtchen den gegebenen Funktionen zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.

(1) $2x + \frac{3}{x}$ (2) $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x}$ (3) $-\frac{2}{x}$ (4) $\frac{1}{x}$ (5) $1 + \frac{2}{x}$ (6) $\frac{1}{2x}$ (7) $\frac{3}{8x}$

3 Es ist $\ln(3) \approx 1{,}10$ und $\ln(8) \approx 2{,}08$. Berechnen Sie damit unter Anwendung der Rechenregeln für den Logarithmus einen Näherungswert für

a) $\ln(24)$, **b)** $\ln\left(2\frac{2}{3}\right)$, **c)** $\ln(72)$, **d)** $\ln(0{,}375)$,

e) $\ln\left(\frac{1}{3}\right)$, **f)** $\ln(2)$, **g)** $\ln(27)$, **h)** $\ln(8^3)$.

4 **a)** Erläutern Sie sich gegenseitig den gezeigten Lösungsweg der Gleichung $2 \cdot \ln(x) - 3 = 5$.
$2 \cdot \ln(x) - 3 = 5 \Leftrightarrow 2 \cdot \ln(x) = 8 \Leftrightarrow \ln(x) = 4 \Leftrightarrow x = e^4$

b) Erläutern Sie allgemein eine mögliche Strategie zum Lösen von Logarithmusgleichungen. Nennen Sie zwei Beispielgleichungen, bei denen die Strategie an ihre Grenzen stößt.

5 Lösen Sie die Gleichung.

a) $\ln(x) = \frac{1}{2}$ **b)** $3 \cdot \ln(x) - 1 = 1$ **c)** $\frac{2}{\ln(x)} = 5$

d) $\ln(x^2) = 4$ **e)** $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}$ **f)** $\ln\left(\frac{x}{3}\right) = 2$

6 Begründen Sie, dass F eine Stammfunktion von f ist.

a) $F(x) = 0{,}5x^2 - \ln|x|$, $f(x) = x - \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ **b)** $F(x) = \ln|x - 1|$, $f(x) = \frac{1}{x - 1}$ $(x \neq 1)$

7 Geben Sie für $x > 0$ $(x < 0)$ zwei Stammfunktionen von f an.

a) $f: x \mapsto \frac{4}{x}$ **b)** $f: x \mapsto \frac{3}{4x}$ **c)** $f: x \mapsto 1 + \frac{2}{x}$ **d)** $f: x \mapsto 1 - \frac{5}{2x}$

Test 1

→ Lösungen | Seite 292

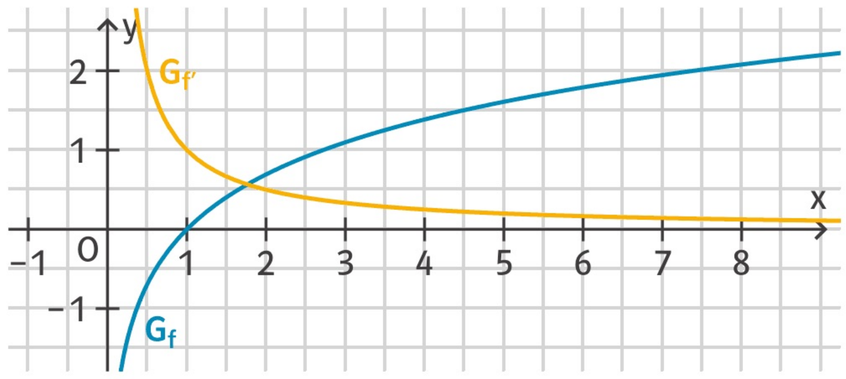
8 Bestimmen Sie zunächst die maximale Definitionsmenge von f. Ermitteln Sie anschließend die Ableitung von f, indem Sie die Rechenregeln für den Logarithmus anwenden.

a) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ **b)** $f(x) = \ln\left(3\sqrt{x}\right)$ **c)** $f(x) = \ln\left(\frac{13}{x}\right)$ **d)** $f(x) = \ln\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)$

9 Gegeben sind die Graphen G_f und $G_{f'}$ der Funktionen f und f' mit $f(x) = \ln(x)$ und $f'(x) = \frac{1}{x}$.
Geben Sie mithilfe der Abbildung an:

a) die Steigung der Tangente an den Graphen G_f an der Stelle $x = 0{,}5$ (1; 2; 4),

b) die Stelle, an der Funktionswert und Wert der Ableitung übereinstimmen.



10 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der natürlichen Logarithmusfunktion $f: x \mapsto \ln(x)$, die

a) den Graphen im Punkt $P(e^2 | 2)$ berührt,

b) von $A(0 | 2)$ aus an den Graphen von f gelegt wird,

c) von $B(0 | n)$ $(n \in \mathbb{N})$ aus an den Graphen von f gelegt wird.

11 Untersuchen Sie, ob die Tangente an den Graphen von $f: x \mapsto \ln(x)$ an der Stelle $x_0 = e$ eine Ursprungsgerade ist. Zeichnen Sie anschließend den Graphen von f und die Tangente in ein Koordinatensystem.

12 **Abiturprüfung 2018 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1**
Geben Sie für die Funktionen f_1 und f_2 jeweils die maximale Definitionsmenge und die Nullstelle an.

$f_1: x \mapsto \frac{2x + 3}{x^2 - 4}$ $\qquad$ $f_2: x \mapsto \ln(x + 2)$

13 **a)** Geben Sie die Gleichung der Funktion an, deren Graph aus dem der natürlichen Logarithmusfunktion hervorgeht durch

(1) Verschiebung um 3 in y-Richtung,
(2) Verschiebung um −3 in x-Richtung,
(3) Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 2,
(4) Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$.

Skizzieren Sie jeweils den Graphen und überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Zeichnen mit einem Funktionenplotter.

b) Stellen Sie sich gegenseitig entsprechende Aufgaben.

14 Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = \ln(k \cdot x)$ mit $k \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^+$.

a) Stellen Sie mit einer dynamischen Mathematiksoftware mithilfe eines Schiebereglers für k die zugehörigen Graphen von f_k dar.

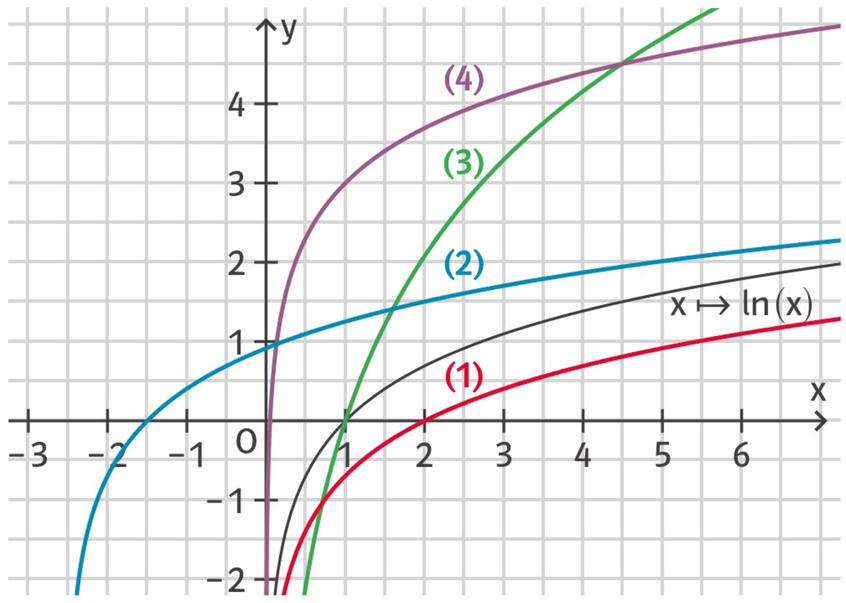
b) Zeigen Sie, dass es für jedes k eine Tangente an den Graphen der Funktion f_k gibt, die durch $A(0 | 2)$ verläuft.

c) Die Normale an den Graphen von f_3 im Punkt P verläuft durch den Ursprung. Bestimmen Sie Näherungswerte für die Koordinaten von P.

Zur Erinnerung:
Eine Normale ist eine zu einer Tangente senkrechte Gerade, die durch den Berührpunkt der Tangente verläuft.

15 Carla behauptet: „$\ln(c\,x) = \ln(-c) + \ln(-x)$ ist eine falsche Umformung." Beurteilen Sie Carlas Aussage.

16 Ermitteln Sie Funktionsterme, die zu den rechts gezeichneten Graphen gehören, und beschreiben Sie, wie sie aus dem Graphen der natürlichen Logarithmusfunktion entstanden sind.



17 Als Maß für die Lautstärke eines Schalls kann man den Schallintensitätspegel L verwenden, der durch $L = 10\lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$ definiert ist. Dieser Zahlenwert wird üblicherweise in dB (Dezibel) angegeben. Dabei ist I die Schallintensität $\left(\text{gemessen in } \frac{W}{m^2}\right)$ und $I_0 = 10^{-12}\frac{W}{m^2}$ die Hörgrenze.
Bestimmen Sie, um wie viel höher die Schallintensität bei normaler Unterhaltung gegenüber dem Flüstern ist.

Einige Lautstärken (in dB):	
Blätterrauschen	10
Flüstern	20
Normale Unterhaltung	40
Starker Verkehrslärm	70
Presslufthammer (in 1 m Entfernung)	120

Zur Erinnerung:
$\lg(x) = \log_{10}(x)$

18 **Abiturprüfung 2021 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1**
Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^{2x+1}$. Zeigen Sie, dass f umkehrbar ist, und ermitteln Sie einen Term der Umkehrfunktion von f.

Test 2

Lösungen | Seite 292

19 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x - \ln(x)$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.
a) Untersuchen Sie f auf Nullstellen und G_f auf Extrempunkte. Zeichnen Sie G_f.
b) Bestimmen Sie diejenigen Punkte, in denen G_f die Steigung $-e$ hat. Entscheiden und begründen Sie, ob es möglich ist, dass G_f die Steigung e hat.
c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an G_f, die durch den Ursprung verläuft.

20 Ordnen Sie den vier Graphen die passenden Funktionsgleichungen zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

Strategie | Seite 257
Ausschlussprinzip

$y = \ln(x + 3)$

$y = \ln(3x)$

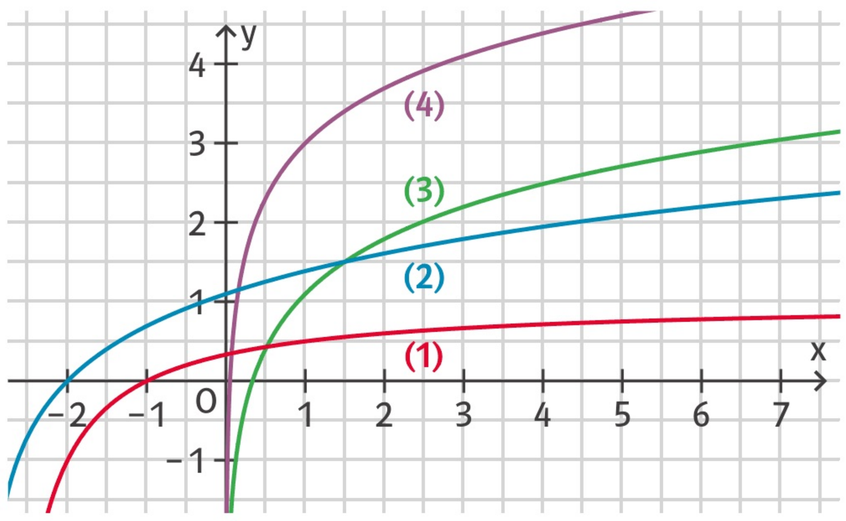
$y = \ln(x) + 3$

$y = 3 \cdot \ln(x)$

$y = \sqrt{x + 1}$

$y = \frac{x+1}{x+3}$

$y = \ln(x) + \ln(3)$



21 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} \ln(x) + 5 & \text{für } x > 0 \\ \ln(-x) + 3 & \text{für } x < 0 \end{cases}$. Entscheiden und begründen Sie, ob f eine Stammfunktion der Funktion $g: x \mapsto \frac{1}{x}$ ist.

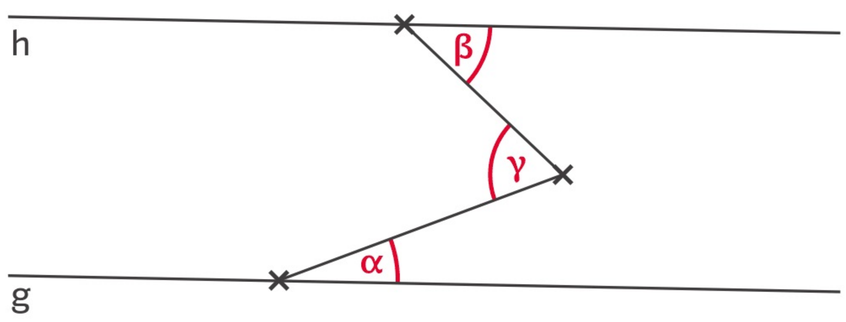
22 Diskutieren Sie, ob Lösungsweg und Ergebnis der abgebildeten Lösung eines Schülers der folgenden Aufgabe korrekt ist. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \ln(x^2)$. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und die Ableitung von f.

Der Definitionsbereich der natürlichen Logarithmusfunktion ist $\mathbb{R}^+$ und x^2 ist genau dann positiv, wenn $x \neq 0$ gilt. Also ist $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Für $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt $\ln(x^2) = 2 \cdot \ln(x)$ und daraus folgt $f'(x) = 2 \cdot [\ln(x)]' = 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$ für $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Grundwissen Test

Lösungen | Seite 293

G 23 Gegeben sind die beiden Geraden g und h. Vervollständigen Sie den folgenden Satz zu einer wahren Aussage und beweisen Sie diese.
Die Geraden g und h sind genau dann parallel, wenn für die Größen α, β und γ der Winkel gilt: …



2 Ableitung und Grenzwerte von Verknüpfungen mit der ln-Funktion

Gegeben sind die Funktionen $g: x \mapsto \sqrt{x}$, $h: x \mapsto \ln(x)$ und $k: x \mapsto x^2 + 1$. Schreiben Sie die Funktionen f_1 bis f_6 jeweils als Verknüpfung von g, h bzw. k.
Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktionen g, h, k und f_3.

$f_1: x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - \ln(x)$

$f_2: x \mapsto (x^2 + 1) \cdot \ln(x)$

$f_3: x \mapsto \ln(x^2 + 1) + \sqrt{x}$

$f_4: x \mapsto \frac{x^2 + 1}{\ln(x)}$

$f_5: x \mapsto (\ln(x))^2 + 1$

$f_6: x \mapsto \ln(x^2 + 1)$

Durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division oder Verkettung lassen sich auch aus der natürlichen Logarithmusfunktion und einer weiteren Funktion neue Funktionen gewinnen.
Für die Ableitung dieser Funktionen gelten die bekannten Ableitungsregeln. Häufig muss dabei die Kettenregel angewendet werden.

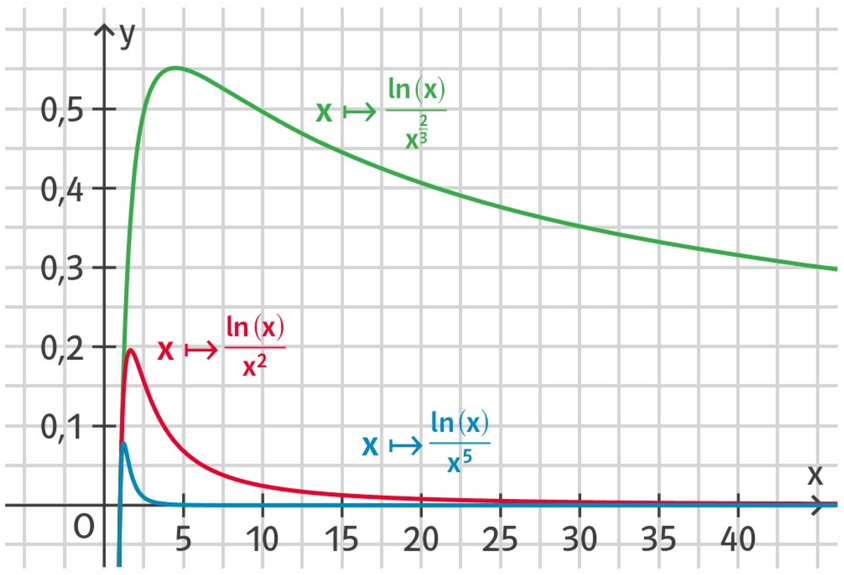
Satz: Ist v eine differenzierbare Funktion mit $v(x) > 0$, so lässt sich die **Verkettung** $\mathbf{f: x \mapsto \ln(v(x))}$ unter Anwendung der Kettenregel wie folgt **ableiten**:

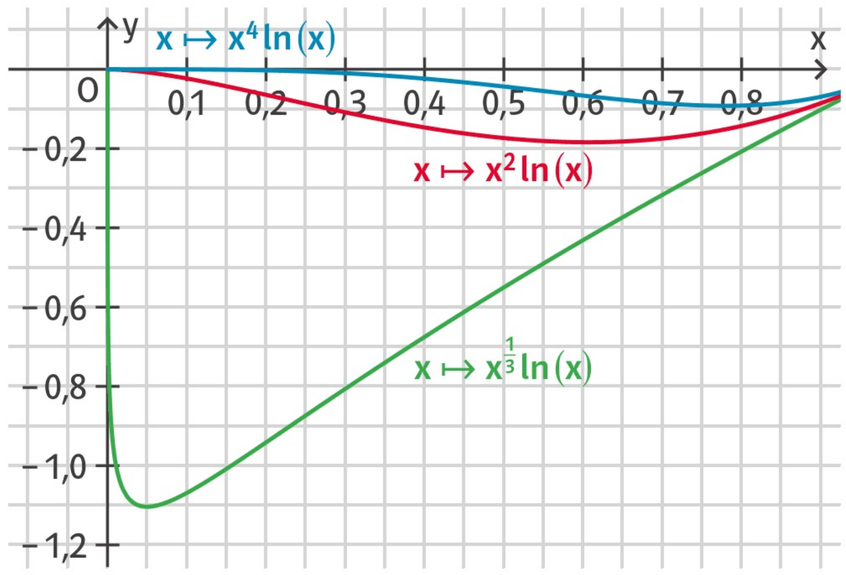
$$\mathbf{f'(x) = \frac{v'(x)}{v(x)}}.$$

Bemerkung:
Die Verkettung $f: x \mapsto \ln(v(x))$ lässt sich nur für diejenigen $x \in D_v$ bilden, für die $v(x) > 0$ ist. Da der Nenner im Term $f'(x) = \frac{v'(x)}{v(x)}$ positiv ist, wird das Vorzeichen von $f'(x)$ nur von $v'(x)$ bestimmt. Das Monotonieverhalten von v überträgt sich also auf das von f.

Grenzverhalten von Verknüpfungen mit der ln-Funktion

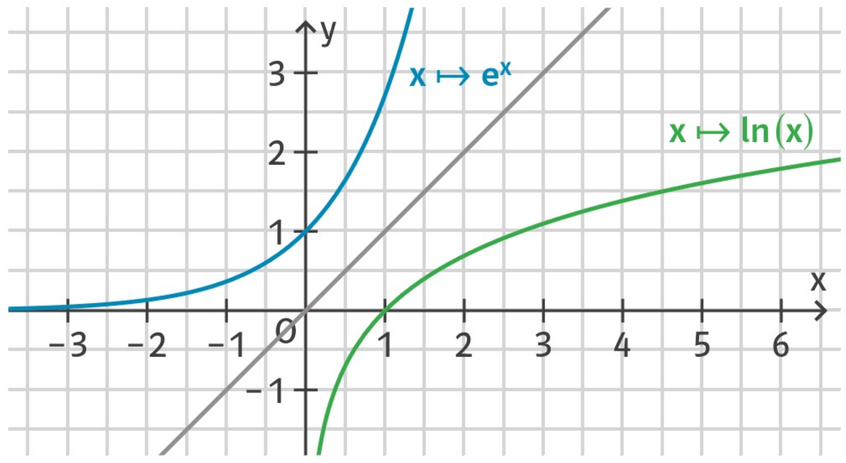
Das Verhalten von Funktionen der Form $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^r}$ $(r \in \mathbb{Q}^+)$ für $x \to +\infty$ und Funktionen der Form $x \mapsto x^r \cdot \ln(x)$ $(r \in \mathbb{Q}^+)$ für $x \to 0$ wird nun untersucht. Die folgenden Abbildungen zeigen für verschiedene Werte von r die Graphen der Funktionen $f_r: x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^r}$ und $g_r: x \mapsto x^r \cdot \ln(x)$.





Im Folgenden wird gezeigt, dass für $r \in \mathbb{Q}^+$ gilt: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^r} = 0$ und $\lim\limits_{x \to 0} (x^r \cdot \ln(x)) = 0$.

Bekanntlich wächst $x \mapsto e^x$ für $x \to +\infty$ „schneller“ als jede Potenzfunktion $x \mapsto x^r$ $(r \in \mathbb{Q}^+)$. Dass die Umkehrfunktion $x \mapsto \ln(x)$ „langsamer“ als jede Potenzfunktion wächst, erkennt man durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten (vgl. Abbildung). In der Tat kann man zeigen, dass für $r \in \mathbb{Q}^+$ gilt: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^r} = 0$.



Um den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} (x^r \cdot \ln(x))$ zu bestimmen, verwendet man $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(1) - \ln(x) = -\ln(x)$ und substituiert $z = \frac{1}{x}$. Damit gilt

$x^r \cdot \ln(x) = x^r \cdot \left(-\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^r} = -\frac{\ln(z)}{z^r}$.

Für $x > 0$ und $x \to 0$ strebt z gegen $+\infty$. Daraus folgt $\lim\limits_{x \to 0} (x^r \cdot \ln(x)) = -\lim\limits_{z \to +\infty} \frac{\ln(z)}{z^r} = 0$.

Satz: Für alle $r \in \mathbb{Q}^+$ gilt $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^r} = 0}$ und $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0} (x^r \cdot \ln(x)) = 0}$.

Bemerkung:

Man kann diesen Satz verallgemeinern.

Ist $p(x)$ ein nicht-konstantes Polynom, so gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{p(x)} = 0$.

Enthält $p(x)$ keinen konstanten Summanden, so gilt $\lim\limits_{x \to 0} (p(x) \cdot \ln(x)) = 0$.

$p(x) = 5$ ist ein konstantes Polynom.
$q(x) = 3x^3 - 17x + 2$ hat den konstanten Summanden 2.

Beispiel 1

Bestimmen Sie einen Term der Ableitung der Funktion f.

a) $f: x \mapsto \frac{2}{3} \cdot \ln(x^2 + 1)$ **b)** $f: x \mapsto x^2 \cdot \ln(3x + 1)$

Lösung

a) Es ist $f(x) = \frac{2}{3} \cdot \ln(v(x))$ mit $v(x) = x^2 + 1$.

Damit folgt $f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{v'(x)}{v(x)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1}$.

b) $f'(x) = 2x \cdot \ln(3x + 1) + x^2 \cdot \frac{3}{3x + 1}$

Beispiel 2

a) Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x^{\frac{3}{5}} \cdot \ln\left(\frac{x}{3}\right)$. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f für $x \to 0$.

b) Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion g für $x \to +\infty$.

Lösung

a) $f(x) = x^{\frac{3}{5}} \cdot \ln(x) - x^{\frac{3}{5}} \cdot \ln(3)$. Es gilt $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^{\frac{3}{5}} \cdot \ln(x)\right) = 0$, da die Potenzfunktion dominiert, und $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^{\frac{3}{5}} \cdot \ln(3)\right) = 0$, also $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$, da die Potenzfunktion dominiert.

Aufgaben

1 Bestimmen Sie einen Term der Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = 3\ln\left(\frac{1}{3} \cdot x\right)$ **b)** $f(x) = \ln\left(\frac{x}{2} + 1\right)$ **c)** $f(x) = \ln(x^3 - 2x)$ **d)** $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

→ Strategie | Seite 260 Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

2 Bestimmen Sie diejenige Funktion, zu der F eine Stammfunktion ist.

a) $F: x \mapsto \ln(x^2)$ **b)** $F: x \mapsto (\ln(x))^2$

3 Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit einer geeigneten Mathematiksoftware.

→ Strategie | Seite 260 Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

a) $f(x) = 8 \cdot \frac{\ln(x)}{x}$ **b)** $f(x) = 5x^3 \cdot \ln(x)$ **c)** $f(x) = \frac{1}{x}(1 + \ln(x))$ **d)** $f(x) = \frac{\ln(x^2)}{x}$

4 Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion f und einen Term ihrer Ableitung.

a) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln(x)$ **b)** $f(x) = x \cdot \ln(x + 1)$ **c)** $f(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right)$ **d)** $f(x) = \ln\left(\frac{5}{x - 1}\right)$

5 **Abiturprüfung 2021 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, daraus Teilaufgabe 2 b)**

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h: x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$. Begründen Sie, dass die Wertemenge von h das Intervall $]-\infty; 0]$ ist.

6 Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit einer geeigneten Mathematiksoftware.

a) $f(x) = (x^2 + 3x)\ln(x)$ **b)** $f(x) = \frac{\ln(x)}{-2x + 3x^3}$ **c)** $f(x) = \ln(x^2)(-x^2 + 3x^4)$

d) $f(x) = \frac{\ln(x^3)}{3x^3 - 2x^6}$ **e)** $f(x) = (2x^2 + x + 1)\ln(x^2)$ **f)** $f(x) = \frac{\ln(x)}{3x + 4}$

Test 1

Lösungen | Seite 293

7 Bestimmen Sie einen Term der Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = \ln\left(\frac{x^3}{3} - 3\right)$ **b)** $f(x) = \frac{x}{2} \cdot \ln(3x)$

8 **a)** Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion $f: x \mapsto (2x^3 - x)\cdot\ln(x^2)$ für $x \to 0,\ x > 0$.

b) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion $g: x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^4 - 2x^3 + x}$ für $x \to +\infty$.

9 **a)** Sind die folgenden Grenzwerte richtig bestimmt? Begründen Sie Ihre Entscheidung und überprüfen Sie diese mit einem Funktionenplotter.

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{2x} \cdot \ln(x)\right) = -\infty$ (2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x} \cdot \ln(x)\right) = +\infty$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x+1}{\ln(x)} = 0$ (4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{\ln(x)} = 0$

b) Stellen Sie sich gegenseitig entsprechende Aufgaben.

10 Gegeben sind die Funktionen $f: x \mapsto \sqrt{x}$ und $g: x \mapsto \ln(x)$. Aus den Funktionen f und g wird eine neue Funktion h gebildet. Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge von h und untersuchen Sie das Verhalten von h für $x \to 0$ und für $x \to +\infty$. Überprüfen Sie Ihre Antwort mit einem Funktionenplotter.

a) $h(x) = f(x) + g(x)$ **b)** $h(x) = f(x)\cdot g(x)$ **c)** $h(x) = f(x) - g(x)$

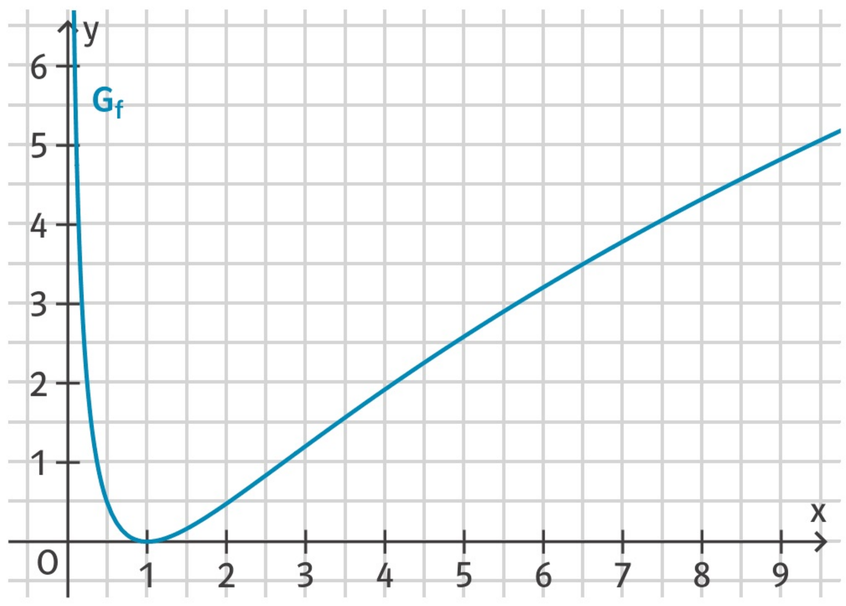
d) $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ **e)** $h(x) = g(f(x))$ **f)** $h(x) = f(g(x))$

11 Der abgebildete Graph gehört zur Funktion $f: x \mapsto (\ln(x))^2$ mit $D_f = \mathbb{R}^+$.

a) Begründen Sie, dass bei der Nullstelle zugleich ein lokales Minimum der Funktion f vorliegt.

b) Bestimmen Sie Gleichungen der beiden Geraden durch den Ursprung, die Tangenten an den Graphen von f sind.

c) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = x\cdot(\ln(x))^2 - 2x\cdot\ln(x) + 2x$ eine Stammfunktion von f ist.



12 Beurteilen Sie, welche der Funktionen eine Stammfunktion der natürlichen Logarithmusfunktion ist.

(1) $F: x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x^2)$ (2) $F: x \mapsto (\ln(x))^2$ (3) $F: x \mapsto \ln(x)(\ln(x) + x)$ (4) $F: x \mapsto x\cdot\ln(x) - x$

13 **Abiturprüfung 2020 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 1**

Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \ln(2 - x^2)$ mit maximaler Definitionsmenge D_g.

a) Skizzieren Sie die Parabel mit der Gleichung $y = 2 - x^2$ in einem Koordinatensystem und geben Sie D_g an.

b) Ermitteln Sie den Term der Ableitungsfunktion g' von g.

14 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \ln(x) \cdot x^{\frac{1}{100}}$.

a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

b) Zeichnen Sie den Graphen von f mit einer geeigneten Mathematiksoftware und betrachten Sie ihn nahe 0 in unterschiedlichen Zoomstufen.

c) Bestimmen Sie für $k = 1; 2; 3; \ldots; 20$ mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware Näherungswerte für $f\left(\frac{1}{10^k}\right)$.

d) Diskutieren Sie, ob sich die Ergebnisse aus den Teilaufgaben a), b) und c) widersprechen.

15 Wenn man eine Masse von 14 g in der Hand hält, so muss eine Masse von mindestens 1 g hinzukommen, damit man einen Belastungsunterschied empfindet. Bei anfänglich 28 g empfindet man erst bei einer zusätzlichen Masse von 2 g einen Belastungsunterschied, bei anfänglich 56 g erst bei einer zusätzlichen Masse von 4 g usw. (vgl. psycho-physisches Grundgesetz von Weber-Fechner).

a) Bestimmen Sie, welche zusätzliche Masse bei anfänglich 112 g (224 g; 448 g) mindestens notwendig ist, um einen Belastungsunterschied wahrzunehmen.

b) Nach dem Vorangegangenen ist der Empfindungsunterschied beim Übergang von 28 g zu 30 g ebenso groß wie z. B. beim Übergang von 56 g zu 60 g. Eine unserem Empfinden angepasste Messskala sollte daher jeder Masse m eine Maßzahl $f(m)$ so zuordnen, dass z. B. $f(30) - f(28) = f(60) - f(56)$ gilt. Geben Sie eine solche Zuordnung f an.

Test 2

Lösungen | Seite 293

16 Bestimmen Sie einen Term der Ableitung der Funktion f.

a) $f: x \mapsto \sin(x)\ln(x^2)$ **b)** $f: x \mapsto \frac{\ln(x)}{\cos(x)}$

17 **a)** Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion $f: x \mapsto \frac{\ln(x^2)}{x^{-2}}$ für $x \to 0,\ x > 0$.

b) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion $g: x \mapsto \frac{\ln(x) + \frac{x}{2}}{x^{\frac{5}{2}}}$ für $x \to +\infty$.

18 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x^x$ mit $D = \mathbb{R}^+$.

a) Zeigen Sie, dass $x^x = e^{x \cdot \ln(x)}$ gilt.

b) Zeichnen Sie mit einem Funktionenplotter den Graphen von f und bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

c) Bestimmen Sie einen Term der Ableitung von f.

19 Es ist g eine differenzierbare Funktion, die auf einem Intervall I definiert ist und nur positive Funktionswerte annimmt. Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = -\ln(g(x))$.

a) Bestimmen Sie $f'(x)$. Geben Sie einen Term der Funktion f mit $f'(x) = \tan(x)$ an $\left(D_f = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

b) Angenommen, es ist $g'(x) > 0$ für alle $x \in I$. Dann ist g auf I umkehrbar mit der Umkehrfunktion g^{-1}. Zeigen Sie, dass f ebenfalls umkehrbar ist, und bestimmen Sie einen Term von f^{-1}.

Tangensfunktion:
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ mit
$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\ldots -\frac{3}{2}\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi \ldots\right\}$.

Grundwissen Test

Lösungen | Seite 293

G 20 Nennen Sie alle Gleichungstypen, die Sie bislang kennengelernt haben (lineare Gleichung, quadratische Gleichung, Potenzgleichung …), und geben Sie jeweils eine Beispielgleichung dazu an.

3 Untersuchung von Verknüpfungen mit der ln-Funktion

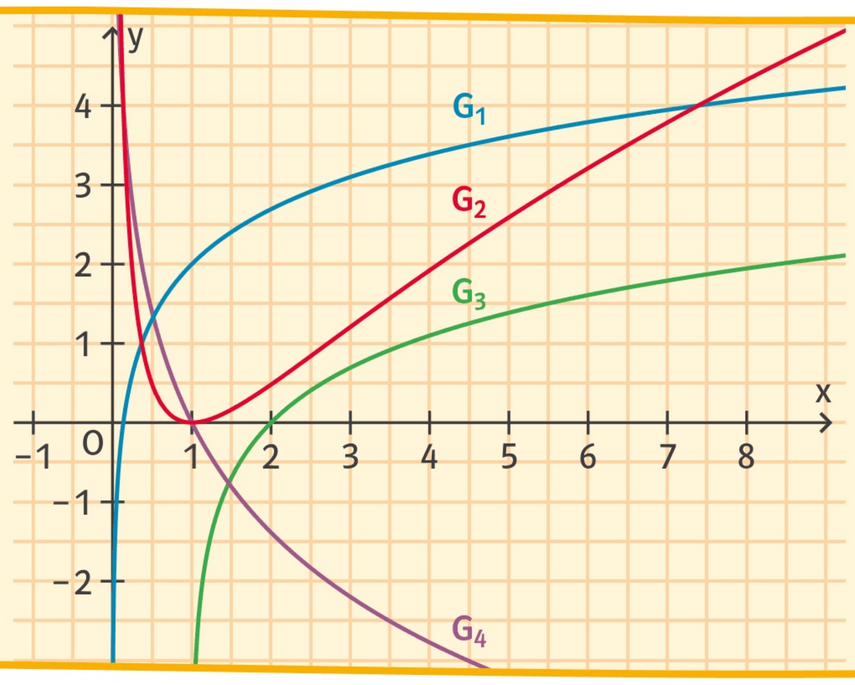
Welcher abgebildete Graph könnte zu welcher Funktion gehören? Ordnen Sie anhand eines oder mehrerer Merkmale zu.

$f: x \mapsto \ln(x-1)$

$g: x \mapsto \ln(x)+2$

$h: x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$k: x \mapsto (\ln(x))^2$



Mithilfe der bisherigen Erkenntnisse über die natürliche Logarithmusfunktion lassen sich Verknüpfungen mit dieser eingehender untersuchen. Dies wird anhand des Beispiels $f: x \mapsto x^3 \cdot \ln(x^2)$ erläutert.

Definitionsmenge

Da $x \mapsto x^3$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt und die natürliche Logarithmusfunktion auf $\mathbb{R}^+$ definiert ist, gilt $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Symmetrieverhalten

Es gilt $f(-x) = (-x)^3 \cdot \ln((-x)^2) = -x^3 \cdot \ln(x^2) = -f(x)$. Also ist der Graph von f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

Nullstellen

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 \cdot \ln(x^2) = 0$

$\Leftrightarrow x^3 = 0$ oder $\ln(x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 1$ oder $x = -1$.

Da $0 \notin D_f$ ist, besitzt f die beiden Nullstellen 1 und −1.

Zur Erinnerung:
Die ln-Funktion wird genau dann null, wenn das Argument gleich 1 ist.

Verhalten an den Rändern der Definitionsmenge

Für $x \to +\infty$ strebt sowohl x^3 als auch $\ln(x^2)$ gegen $+\infty$. Also gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Aufgrund der Punktsymmetrie des Graphen folgt $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Für $x > 0$ gilt $f(x) = x^3 \cdot \ln(x^2) = 2x^3 \cdot \ln(x)$, also $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$, da die Potenzfunktion dominiert.

Aus Symmetriegründen gilt auch $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = 0$ und damit $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Extrempunkte und Monotonieverhalten

$f'(x) = 3x^2 \cdot \ln(x^2) + x^3 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = 3x^2 \cdot \ln(x^2) + 2x^2 = x^2 \cdot (3\ln(x^2) + 2)$

Also gilt $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$ oder $3\ln(x^2) + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $\ln(x^2) = -\frac{2}{3}$.

Weiter gilt $\ln(x^2) = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 = e^{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = \sqrt{e^{-\frac{2}{3}}}$ oder $x = -\sqrt{e^{-\frac{2}{3}}} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{3}}$ oder $x = -e^{-\frac{1}{3}}$.

Da $0 \notin D_f$ ist, besitzt f' die Nullstellen $e^{-\frac{1}{3}}$ und $-e^{-\frac{1}{3}}$. Das rechts dargestellte Monotonieverhalten erhält man durch Untersuchung des Vorzeichens des Terms $3\ln(x^2) + 2$.

Damit besitzt f an der Stelle $-e^{-\frac{1}{3}}$ ein Maximum und an der Stelle $e^{-\frac{1}{3}}$ ein Minimum.

Aus $f\left(-e^{-\frac{1}{3}}\right) = -e^{-1} \cdot \ln\left(e^{-\frac{2}{3}}\right) = -e^{-1} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3e}$ und $f\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = -\frac{2}{3e}$ erhält man den Hochpunkt $H\left(-e^{-\frac{1}{3}} \middle| \frac{2}{3e}\right)$ und den Tiefpunkt $T\left(e^{-\frac{1}{3}} \middle| -\frac{2}{3e}\right)$.

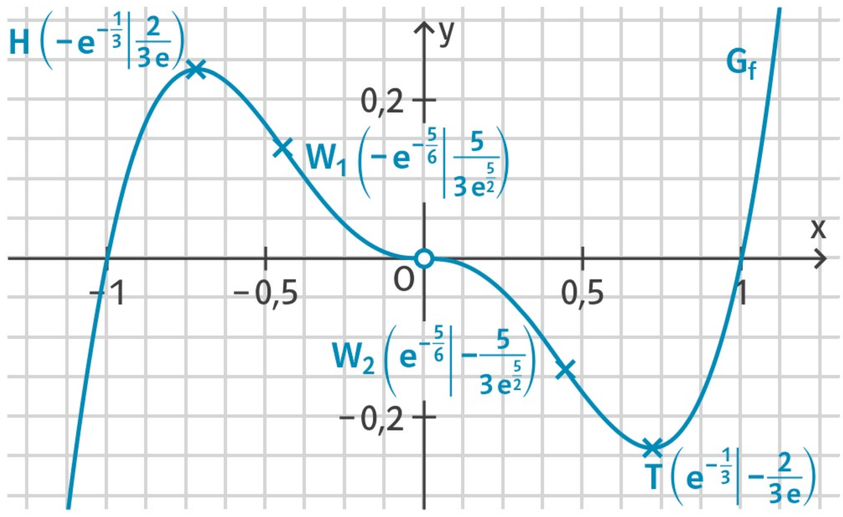
Wendepunkte

$f''(x) = 6x \cdot \ln(x^2) + 10x = 2x \cdot (3\ln(x^2) + 5)$,

$f''(x) = 0 \iff x = 0$ oder $x = e^{-\frac{5}{6}}$ oder $x = -e^{-\frac{5}{6}}$.

Es gilt $0 \notin D_f$. Da das Vorzeichen von f'' an den Stellen $-e^{-\frac{5}{6}}$ und $e^{-\frac{5}{6}}$ wechselt, besitzt f diese beiden Wendestellen. Mit $f\left(-e^{-\frac{5}{6}}\right) = \frac{5}{3e^{\frac{5}{2}}}$ und $f\left(e^{-\frac{5}{6}}\right) = -\frac{5}{3e^{\frac{5}{2}}}$ erhält man die Wendepunkte $W_1\left(-e^{-\frac{5}{6}} \middle| \frac{5}{3e^{\frac{5}{2}}}\right)$ und $W_2\left(e^{-\frac{5}{6}} \middle| -\frac{5}{3e^{\frac{5}{2}}}\right)$.

Graph



Zusammenfassend kann man folgende Eckpunkte einer Funktionsuntersuchung festhalten.

Aspekte bei der Untersuchung einer Funktion f und ihres Graphen G_f:

- Definitionsmenge von f
- Symmetrieverhalten von G_f
- Nullstellen von f
- Schnittpunkt von G_f mit der y-Achse
- Verhalten von f an den Rändern der Definitionsmenge
- Asymptoten von G_f
- Extrempunkte von G_f und Monotonieverhalten von f
- Wendepunkte und Krümmungsverhalten von G_f

Beispiel 1

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{4}{x^2} \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right)$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge von f.

b) Ermitteln Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f.

c) Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

d) Bestimmen Sie die Lage und Art aller Extrempunkte von G_f.

e) Skizzieren Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse.

Lösung

a) $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ ist genau dann definiert, wenn $\frac{1}{x} > 0$ gilt, und $\frac{4}{x^2}$ ist genau dann definiert, wenn $x \neq 0$ gilt. Man erhält $D = \mathbb{R}^+$.

b) $f(x) = \frac{4}{x^2} \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{4}{x^2} \cdot (\ln(1) - \ln(x)) = -4 \cdot \frac{\ln(x)}{x^2}$. Wegen $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-4 \cdot \frac{\ln(x)}{x^2}\right) = 0$ (Potenzfunktion dominiert) und $\lim\limits_{x \to 0} \left(-4 \cdot \frac{\overbrace{\ln(x)}^{\to -\infty}}{\underbrace{x^2}_{\to 0}}\right) = +\infty$ (= $+\infty$) hat G_f die Asymptoten mit den Gleichungen $y = 0$ und $x = 0$.

c) Es gilt $f(x) = 0 \iff \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \iff \frac{1}{x} = 1 \iff x = 1$.

d) $f'(x) = -4\left[-2x^{-3}\ln(x) + x^{-2} \cdot \frac{1}{x}\right]$

$= \frac{4}{x^3} \cdot [2\ln(x) - 1]$

$f'(x) = 0 \iff 2\ln(x) - 1 = 0$

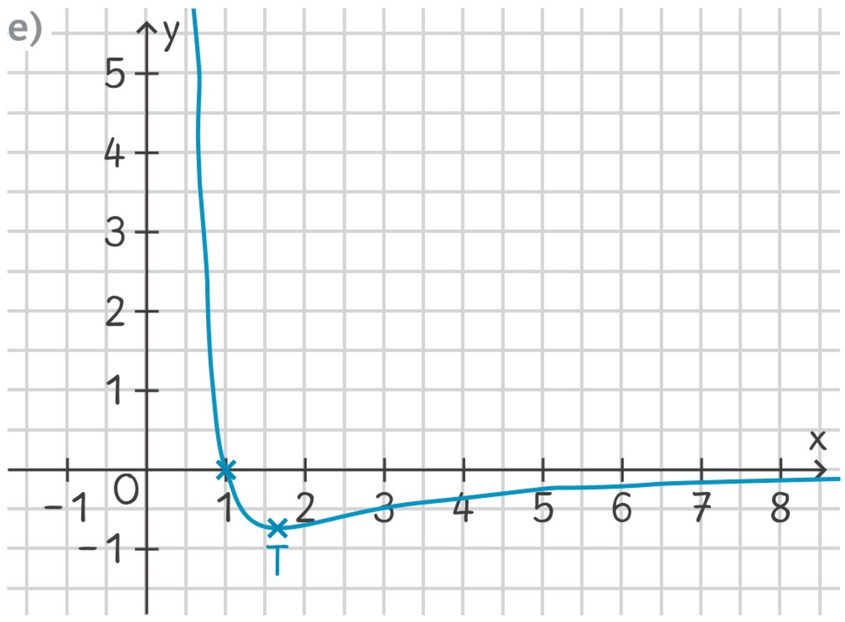
$\iff \ln(x) = \frac{1}{2} \iff x = \sqrt{e}$

Monotonieverhalten:

	$f'(x): < 0$	$= 0$	> 0
		$\sqrt{e}$	
G_f:	↘	T	↗

Daher gibt es genau einen Tiefpunkt. Mit $f\left(\sqrt{e}\right) = -\frac{2}{e}$ erhält man $T\left(\sqrt{e} \middle| -\frac{2}{e}\right)$.

e)



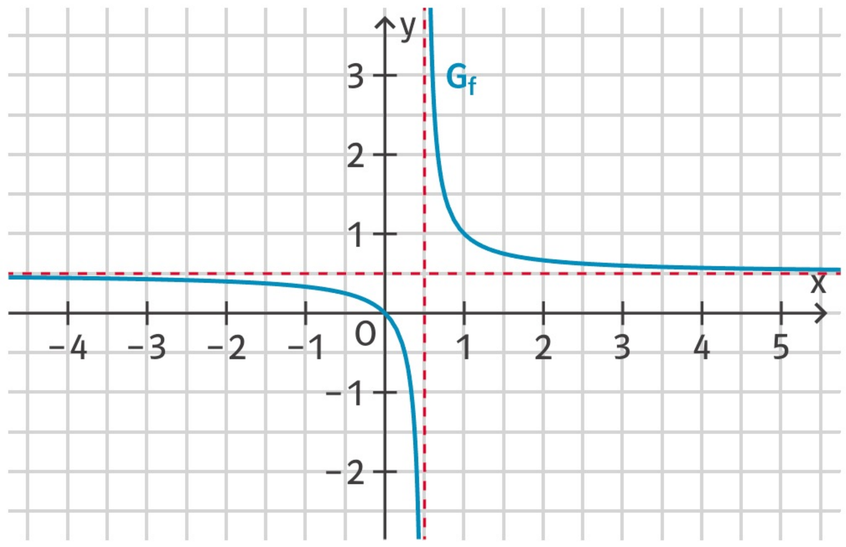
Zum Ableiten ist es günstig umzuformen:

$f(x) = -4 \cdot \frac{\ln(x)}{x^2}$

$= -4 \cdot x^{-2} \cdot \ln(x)$.

Beispiel 2

Der abgebildete Graph gehört zu einer gebrochen-rationalen Funktion f. Die Funktion g ist durch $g(x) = \ln(f(x))$ festgelegt.



a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge von g an.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen von g.

c) Ermitteln Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen G_g von g.

d) Erläutern Sie das Monotonieverhalten von g und skizzieren Sie G_g.

Lösung

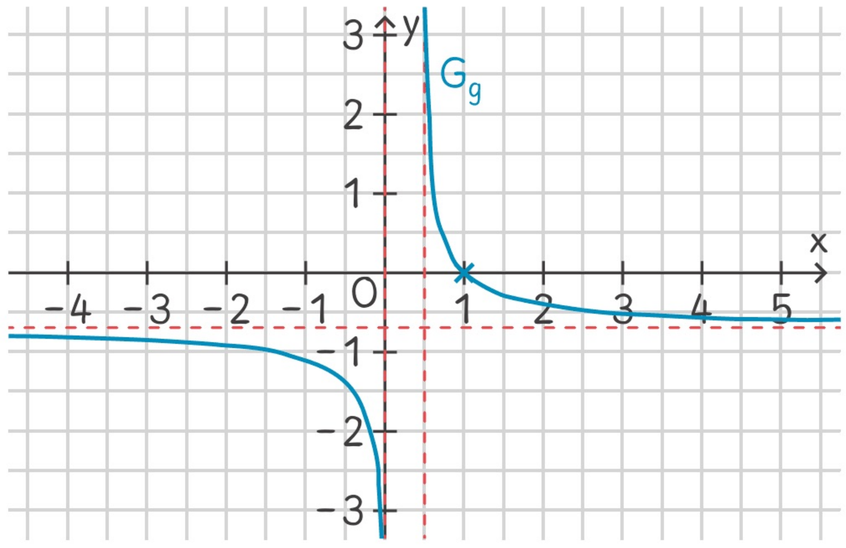
a) Die Funktion g ist genau dann definiert, wenn $f(x) > 0$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $x < 0$ oder $x > \frac{1}{2}$ gilt. Man erhält $D = \mathbb{R}\setminus[0; 0{,}5]$.

b) $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

c) Der Graph der Funktion $x \mapsto \ln(x)$ besitzt die senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = 0$.
Wegen $f(0) = 0$ besitzt auch G_g eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = 0$.
Die Gerade mit der Gleichung $x = 0{,}5$ ist senkrechte Asymptote von G_f.
Wegen $\lim\limits_{\substack{x \to 0{,}5 \\ x > 0{,}5}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0{,}5 \\ x > 0{,}5}} \ln(f(x)) = +\infty$ ist auch diese Gerade senkrechte Asymptote von G_g.
Da die Gerade mit der Gleichung $y = 0{,}5$ waagerechte Asymptote von G_f ist, gilt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0{,}5$ und damit $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = \ln(0{,}5)$. Die Gerade mit der Gleichung $y = \ln(0{,}5)$ ist also waagerechte Asymptote des Graphen von g.

$\ln(0{,}5) \approx -0{,}69$

d) Die innere Funktion f ist in $]-\infty; 0[$ und $]0{,}5; +\infty[$ streng monoton abnehmend. Mit größer werdenden x-Werten wird $f(x)$ also kleiner. Die äußere Funktion $x \mapsto \ln(x)$ ist streng monoton zunehmend. Mit größer werdenden x-Werten wird $\ln(x)$ also größer. Mit größer werdenden x-Werten wird daher mit $f(x)$ auch $g(x) = \ln(f(x))$ kleiner.
Daher ist g in den Intervallen $]-\infty; 0[$ und $]0{,}5; +\infty[$ streng monoton abnehmend.



Aufgaben

1 Beschreiben Sie, wie die Graphen der Funktionen g, h, i und j aus dem Graphen der Funktion $f: x \mapsto \ln(x)$ hervorgehen, und skizzieren Sie diese Graphen.
$g: x \mapsto 2\ln(x)$ $h: x \mapsto \ln(x + 2)$ $i: x \mapsto \ln(x) - 3$ $j: x \mapsto \ln(x - 1) + 4$

2 Gegeben sind die Funktionen $f: x \mapsto \ln(2x - 1)$, $h: x \mapsto x \cdot \ln(x)$ und $g: x \mapsto 5x^2 \cdot \ln(x)$.
a) Untersuchen Sie die Funktionen auf Null- und Extremstellen.
b) Bestimmen Sie die Gleichungen aller Asymptoten der Graphen der Funktionen.
c) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse.

3 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \ln(x^2)$. Zeigen Sie mithilfe der Ableitung, dass f auf $\mathbb{R}^+$ umkehrbar ist, und bestimmen Sie einen Term der Umkehrfunktion f^{-1}.

4 Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge und die Nullstellen von f sowie die Art und Lage der Extrempunkte des Graphen von f. Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mit einer geeigneten Mathematiksoftware.
a) $f: x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$ **b)** $f: x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$

5 **Abiturprüfung 2020 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1**

Gegeben ist die Funktion $h: x \mapsto x \cdot \ln(x^2)$ mit maximalem Definitionsbereich D_h.

a) Geben Sie D_h an und zeigen Sie, dass für den Term der Ableitungsfunktion h' von h gilt: $h'(x) = \ln(x^2) + 2$.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des im II. Quadranten liegenden Hochpunkts des Graphen von h.

Test 1

→ Lösungen | Seite 293

6 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \ln(2x - x^2)$.

a) Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge und die Nullstellen von f.

b) Untersuchen Sie die Funktion f auf Extremstellen.

c) Bestimmen Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f.

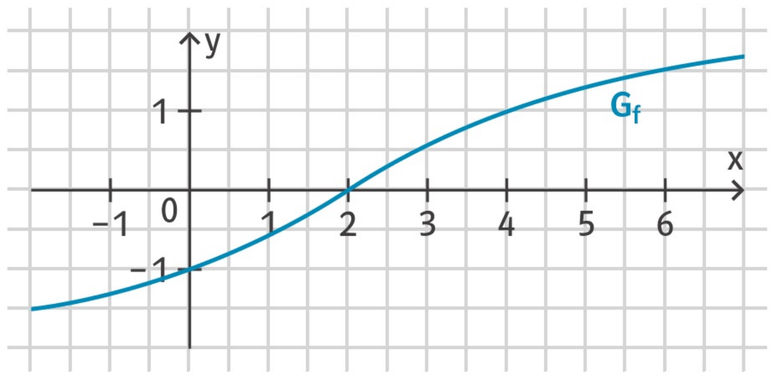
d) Skizzieren Sie den Graphen von f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse.

→ Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

7 **Abiturprüfung 2022 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 3**

a) Gegeben ist die Funktion $h: x \mapsto \ln(2x - 3)$ mit Definitionsmenge $D_h = \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$. Geben Sie die Nullstelle von h sowie einen Term der ersten Ableitungsfunktion von h an.

b) Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f besitzt die Nullstelle $x = 2$, außerdem gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f.
Betrachtet wird die Funktion $g: x \mapsto \ln(f(x))$ mit maximaler Definitionsmenge D_g.
Geben Sie D_g an und ermitteln Sie mithilfe der Abbildung diejenige Stelle x, für die $g'(x) = f'(x)$ gilt.



8 Ordnen Sie jedem der abgebildeten Graphen eine der gegebenen Funktionen zu und begründen Sie Ihre Entscheidungen.

→ Strategie | Seite 257
Ausschlussprinzip

$f: x \mapsto 2 \cdot \ln(1 + x^2)$

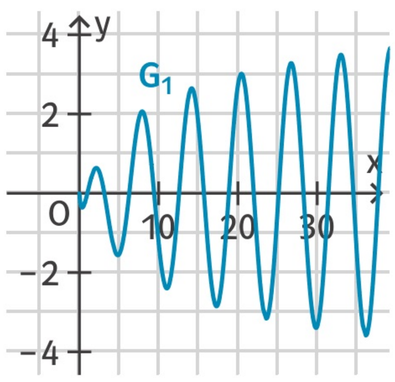
$g: x \mapsto \ln(x) \cdot \cos(x)$

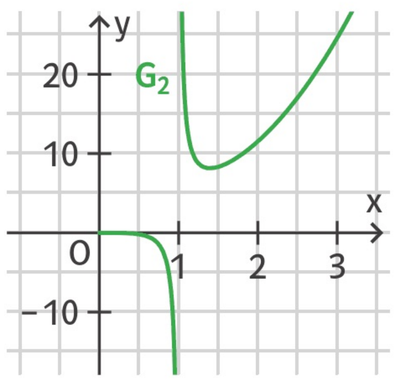
$k: x \mapsto \frac{x^3}{\ln(x)}$

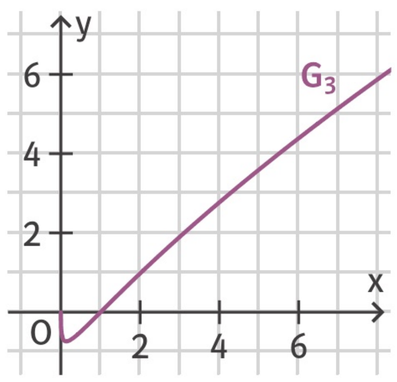
$p: x \mapsto \frac{\ln(x)}{x - 1}$

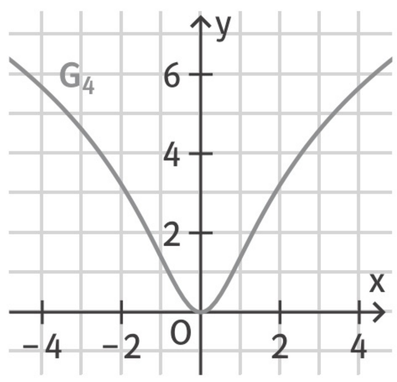
$u: x \mapsto \ln(x) \cdot \sin(x)$

$r: x \mapsto \sqrt{x} \cdot \ln(x)$









9 **Abiturprüfung 2019 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1**

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 2 - \ln(x - 1)$ mit maximalem Definitionsbereich D_f. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass $D_f =]1; +\infty[$ ist, und geben Sie das Verhalten von f an den Grenzen des Definitionsbereichs an.

b) Berechnen Sie die Nullstelle von f.

c) Beschreiben Sie, wie G_f schrittweise aus dem Graphen der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion $x \mapsto \ln x$ hervorgeht. Erklären Sie damit das Monotonieverhalten von G_f.

d) Zeigen Sie, dass $F: x \mapsto 3x - (x - 1) \cdot \ln(x - 1)$ mit Definitionsbereich $D_F =]1; +\infty[$ eine Stammfunktion von f ist, und bestimmen Sie den Term der Stammfunktion von f, die bei $x = 2$ eine Nullstelle hat.

10 Untersuchen Sie die Graphen der Funktionenschar auf senkrechte und waagerechte Asymptoten und untersuchen Sie die Funktionenschar auf Extremstellen. Zeichnen Sie mit einer geeigneten Mathematiksoftware die Graphen von f_t mithilfe eines Schiebereglers. Beschreiben Sie die Abhängigkeit der Graphen vom Wert des Parameters.

a) $f_t: x \mapsto \ln(x + t) - x \quad (t < 0)$ **b)** $f_t: x \mapsto t \cdot (\ln(x + t))^2 \quad (t > 0)$ **c)** $f_t: x \mapsto \frac{\ln(x)}{t \cdot x} \quad (0 < t \leq 1)$

11 Gegeben ist die Funktionenschar $f_{a,b}$ mit $f_{a,b}(x) = \frac{1}{x - a} + b$. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von $g: x \mapsto \ln(f_{a,b}(x))$ für die angegebenen Werte von a und b.

a) $a = 2$ und $b = 1$ **b)** $a = 1$ und $b = 2$ **c)** $a = -3$ und $b = 3$ **d)** $a = \frac{1}{2}$ und $b = -1$

12 Gegeben ist eine differenzierbare Funktion u mit $D = \mathbb{R}$. Beurteilen Sie, welche der Aussagen für f wahr sind.

(1) Jede Nullstelle von u ist auch eine Nullstelle von f.
(2) An jeder Extremstelle von u besitzt die Ableitung von f eine Nullstelle.
(3) Jede doppelte Nullstelle von u ist eine Nullstelle der Ableitung von f.

a) $f: x \mapsto u(x) + \ln(x)$ **b)** $f: x \mapsto u(x) \cdot \ln(x)$ **c)** $f: x \mapsto \frac{u(x)}{\ln(x)}$

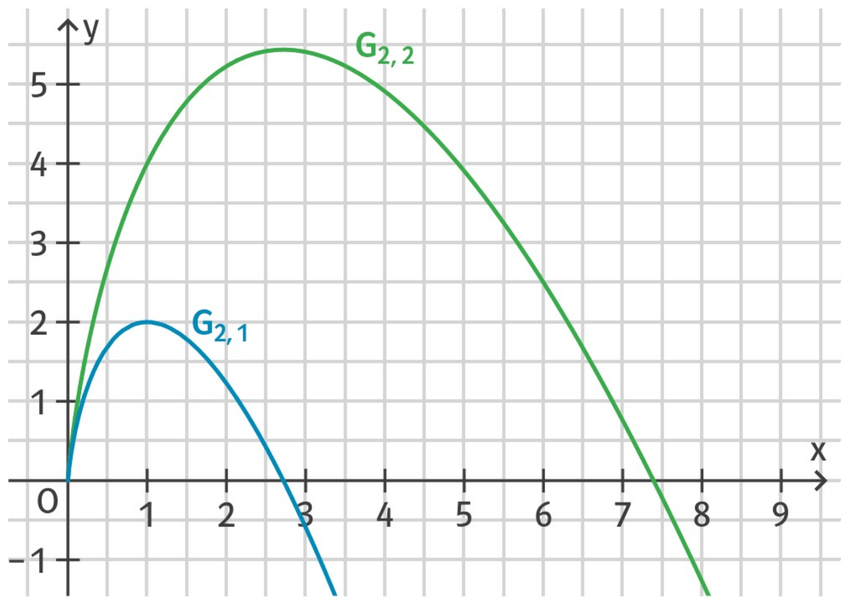
d) $f: x \mapsto \frac{\ln(x)}{u(x)}$ **e)** $f: x \mapsto \ln(u(x))$ **f)** $f: x \mapsto u(\ln(x))$

→ Strategie | Seite 258
Betrachten von etwas Gegenteiligem

13 Abgebildet sind die Graphen $G_{a,b}$ der Funktionenschar $f_{a,b}: x \mapsto a\,x(b - \ln(x))$ für $a = 2$ und $b = 1$ sowie $a = 2$ und $b = 2$.

a) Bestimmen Sie die Werte von a und b so, dass $G_{a,b}$ die x-Achse unter einem Winkel von 135° schneidet. Zeigen Sie, dass diese Eigenschaft ausschließlich vom Parameter a abhängt. Interpretieren Sie dieses Ergebnis.

b) Ermitteln Sie die Extremstellen der Funktionenschar in Abhängigkeit von b.



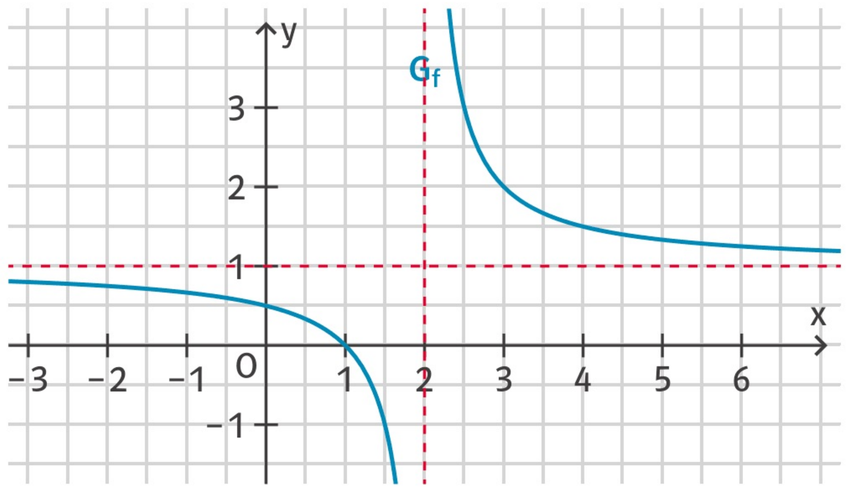
→ Strategie | Seite 259
Aufstellen und Lösen eines Gleichungssystems

Test 2

→ Lösungen | Seite 294

14 **a)** Der abgebildete Graph gehört zu einer gebrochen-rationalen Funktion f. Bestimmen Sie für die Funktion $h: x \mapsto \ln(f(x))$ die maximale Definitionsmenge und das Monotonieverhalten.

b) Ermitteln Sie einen Term einer gebrochen-rationalen Funktion k, für die $\mathbb{R} \setminus [-1; 0]$ die maximale Definitionsmenge von $g: x \mapsto \ln(k(x))$ ist.



→ Strategie | Seite 256
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

15 Man kann zeigen, dass folgende unendliche Summendarstellung für $x \in]-1; 1]$ gilt:

$\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \pm \ldots$

a) Berechnen Sie mit dieser Summendarstellung $\ln(1{,}5)$ und $\ln(0{,}5)$ auf drei Dezimalen genau.

b) Diskutieren Sie, ob sich diese Summendarstellung mit den bekannten Ableitungen von natürlichem Logarithmus und ganzrationalen Funktionen in Einklang bringen lässt.

Grundwissen Test

→ Lösungen | Seite 294

G 16 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x^2 - 4x + 3$. Bestimmen Sie die Nullstellen von f und die Koordinaten des Scheitelpunktes des Graphen von f.

Wiederholen

1 Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge von f. Ermitteln Sie dann die Ableitung von f, indem Sie gegebenenfalls zunächst die Rechenregeln für den Logarithmus anwenden.

a) $f(x) = 5\ln(x)$ **b)** $f(x) = \ln(x + 1)$ **c)** $f(x) = \ln(0{,}5x)$ **d)** $f(x) = \ln(x^7)$

e) $f(x) = \ln(x + x)$ **f)** $f(x) = \ln\left(\frac{3}{x}\right)$ **g)** $f(x) = \ln\left(\sqrt[5]{x}\right)$ **h)** $f(x) = \ln(-2x)$

2 Lösen Sie die Gleichung.

a) $\ln(x) = 3$ **b)** $7 \cdot \ln(x) - 2 = 7$ **c)** $\ln\left(\frac{x}{5}\right) - 1 = \frac{4}{3}$

3 **Abiturprüfung 2012 (Bayern), Analysis, Aufgabengruppe II, Teil 1, Aufgabe 3**

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $h: x \mapsto -\ln x + 3$.

a) Geben Sie an, wie der Graph von h schrittweise aus dem Graphen der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion $x \mapsto \ln x$ hervorgeht.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von h im Punkt $(1\,|\,h(1))$.

4 Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion f und ihre Ableitung.

a) $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$ **b)** $f(x) = (x - 1) \cdot \ln(x + 1)$ **c)** $f(x) = \ln\left(\sqrt[3]{x}\right)$ **d)** $f(x) = \ln\left(\frac{3}{x - 2}\right)$

5 Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit einer geeigneten Mathematiksoftware.

a) $f(x) = (2x^3 + 3x^2)\ln(x)$ **b)** $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^{12}}$ **c)** $f(x) = \ln(x^2)(3 - x)$

Vertiefen

6 Beschreiben Sie, wie die Graphen der Funktionen g, h und i aus dem Graphen der Funktion $f: x \mapsto \ln(x)$ hervorgehen, und skizzieren Sie diese Graphen.

$g: x \mapsto \ln(x^2)$ $h: x \mapsto \ln(x^2) - 1$ $i: x \mapsto \ln((x - 1)^2)$

7 **Abiturprüfung 2011 (Bayern), Analysis, Aufgabengruppe I, Teil 1, Aufgabe 2**

Zeigen Sie, dass $F: x \mapsto \frac{1}{4}x^2 \cdot (2\ln x - 1)$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$ eine Stammfunktion der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion $f: x \mapsto x \cdot \ln x$ ist.

Bestimmen Sie einen Term derjenigen Stammfunktion von f, die in $x = 1$ eine Nullstelle hat.

8 **Abiturprüfung 2016 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 1**

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ mit maximalem Definitionsbereich D.

a) Geben Sie D sowie die Nullstelle von f an und bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

b) Ermitteln Sie die x-Koordinate des Punkts, in dem der Graph von f eine waagrechte Tangente hat.

9 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 2\left(x - \frac{1}{2}\ln(x)\right)$ mit maximalem Definitionsbereich D.

a) Bestimmen Sie D und das Verhalten von f an den Rändern von D.

b) Bestimmen Sie die Lage und Art aller Extrempunkte des Graphen von f.

Vernetzen

10 **Abiturprüfung 2016 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1**

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \sqrt{1 - \ln x}$ mit maximaler Definitionsmenge D.

a) Bestimmen Sie D.

b) Bestimmen Sie den Wert $x \in D$ mit $f(x) = 2$.

11 Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktion f und erläutern Sie damit, dass f keine Nullstellen hat.

a) $f: x \mapsto 2x - e^x$ **b)** $f: x \mapsto x + 0{,}5e^{-x}$ **c)** $f: x \mapsto e^x + e^{-x}$ **d)** $f: x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$

12 Welcher der unten abgebildeten Graphen gehört zu welcher Funktion? Begründen Sie.

→ Strategie | Seite 257
Ausschlussprinzip

$f: x \mapsto 2 \cdot \ln(1 + x^2)$

$g: x \mapsto \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 3}$

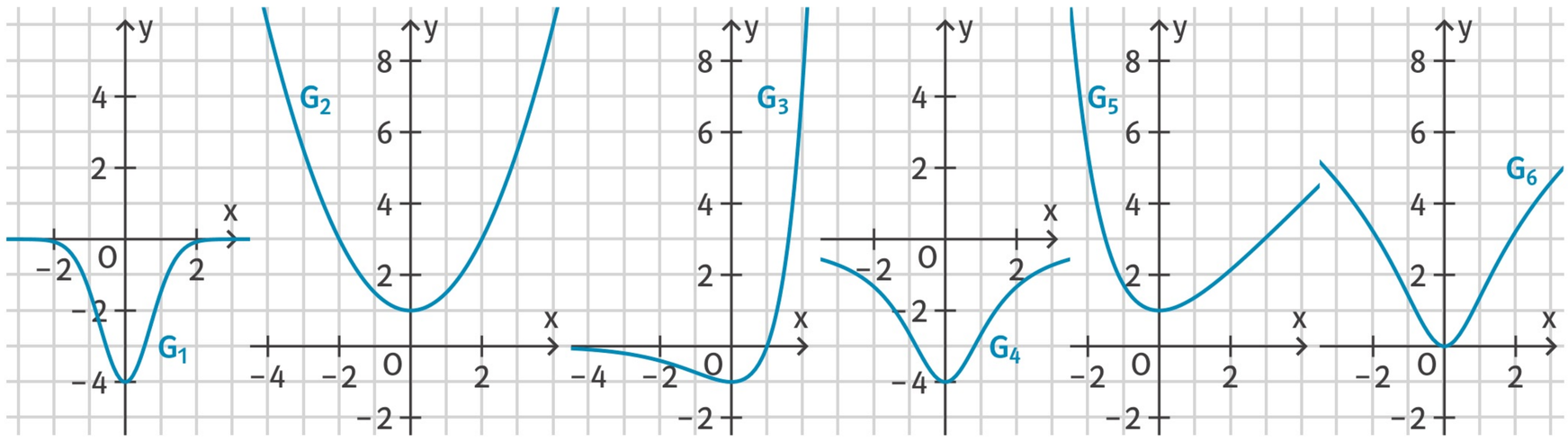
$h: x \mapsto (x - 1) \cdot e^x$

$k: x \mapsto -\frac{8}{x^2 + 2}$

$p: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + 1$

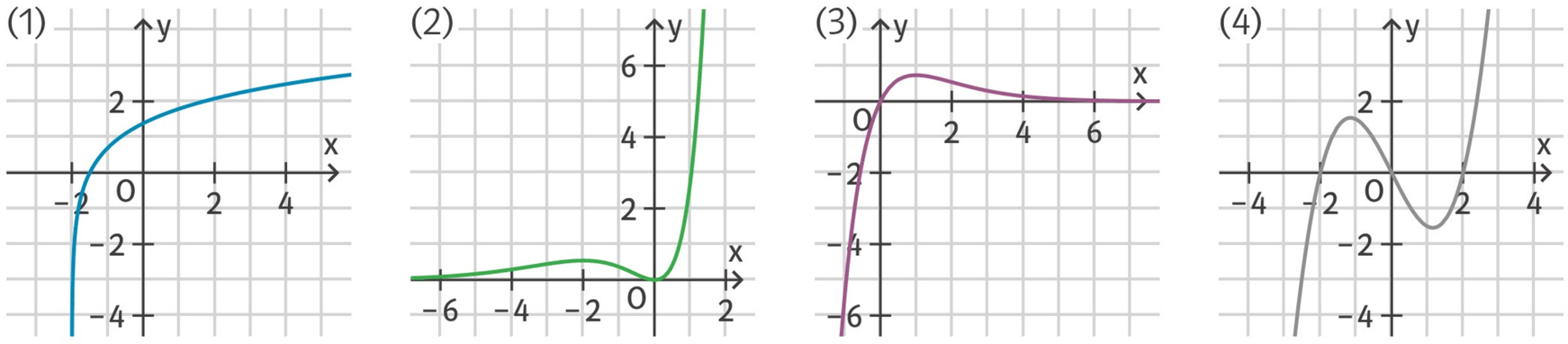
$u: x \mapsto x + e^{-x}$

$v: x \mapsto -4e^{-x^2}$



13 Die Abbildungen zeigen die Graphen der Funktionen $f: x \mapsto 2x \cdot e^{-x}$, $g: x \mapsto \ln(2x + 4)$, $h: x \mapsto x^2 \cdot e^x$ und $k: x \mapsto \frac{1}{2}(x^3 - 4x)$.

Ordnen Sie jeder Funktion einen Graphen zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.



14 Bilden Sie aus einer Exponential- bzw. Logarithmusfunktion zur Basis e und einer weiteren Funktion eine zusammengesetzte Funktion, deren Graph

a) die x-Achse bei $x = 3$ $(x = -3)$ schneidet,

b) die Asymptote mit der Gleichung $y = 2$ $(y = -3)$ hat,

c) die Asymptote mit der Gleichung $x = -2$ $(x = 3)$ hat,

d) symmetrisch zur y-Achse ist.

→ Strategie | Seite 256
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

15 Gegeben sind die Funktionen $f: x \mapsto \ln(x)$ und $g: x \mapsto \frac{e}{x}$ für $x > 0$.

a) Zeichnen Sie die Graphen G_f und G_g in ein gemeinsames Koordinatensystem.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion h mit $h(x) = f(x) - g(x)$ streng monoton zunehmend ist. Folgern Sie daraus, dass $x_0 = e$ die einzige Schnittstelle der beiden Graphen ist.

c) Zeigen Sie, dass $F: x \mapsto x \cdot (\ln(x) - 1)$ eine Stammfunktion von f ist.

16 Der Graph der Funktion $f: x \mapsto \ln(ax^2 + bx)$ soll im Punkt $P(1 \mid \ln(2))$ eine waagerechte Tangente haben.

a) Bestimmen Sie die Werte der Koeffizienten a und b.

b) Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge von f und Gleichungen aller Asymptoten von G_f.

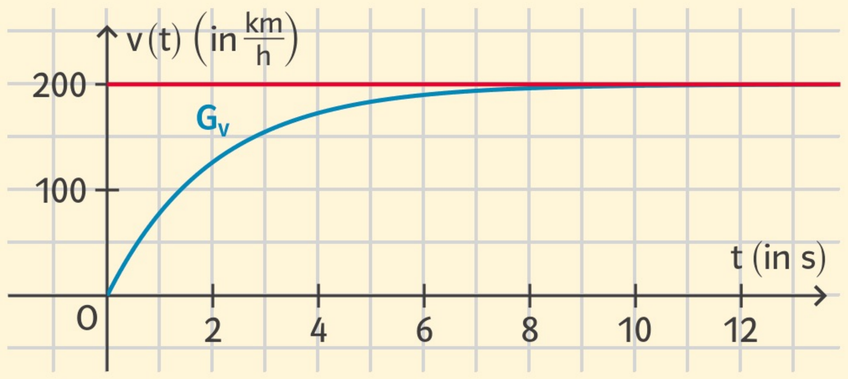
c) Entscheiden und begründen Sie, ob P ein Hoch- oder ein Tiefpunkt von G_f ist.

Beschränktes Wachstum

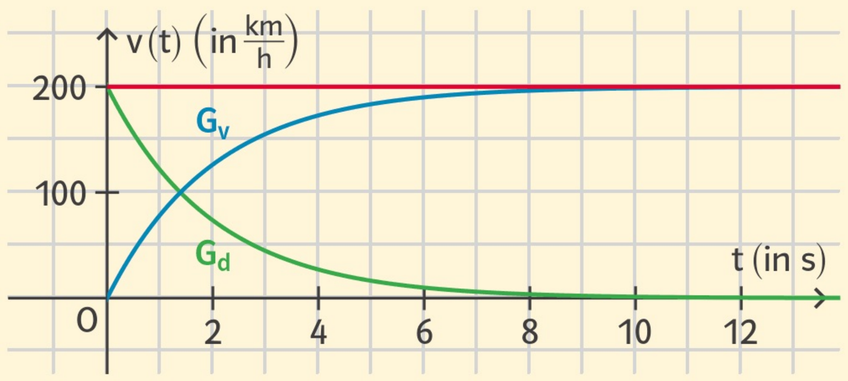
Wenn eine Fallschirmspringerin ihren Fallschirm noch nicht geöffnet hat, so wird sie nicht beliebig schnell, obwohl die Schwerkraft ständig auf sie wirkt. Aufgrund des Luftwiderstands nähert sich ihre Fallgeschwindigkeit einer bestimmten Höchstgeschwindigkeit an.

Wie kann man mithilfe von Exponentialfunktionen den Geschwindigkeitsverlauf beim Fallschirmsprung modellieren?

Die Höchstgeschwindigkeit hängt von der Körperhaltung ab. Mit der oben abgebildeten Körperhaltung erreichen Fallschirmspringer eine Endgeschwindigkeit von ca. $200\,\frac{km}{h}$. Der abgebildete Graph zeigt einen möglichen Geschwindigkeitsverlauf nach dem Sprung aus dem Flugzeug.



Da sich die Geschwindigkeit $v(t)$ für $t \to +\infty$ dem Wert $S = 200$ annähert, strebt die Differenz $d(t) = S - v(t)$ für $t \to +\infty$ gegen 0 (vgl. Abbildung).
Diesen Verlauf kann man mit einem Funktionsterm der Form $d(t) = c \cdot e^{-kt}$ $(k > 0)$ modellieren. Somit ist $v(t) = S - c \cdot e^{-kt}$.



Nun muss man noch die Werte der Konstanten S, c und k dem Verlauf anpassen.
Es ist $S = 200$. Man nennt S die **Wachstumsschranke**. Da zu Beginn der Anfangswert $v(0) = S - c = 0$ ist, ist auch $c = 200$. In der Abbildung liest man $v(2) \approx 125$ ab.
Aus $200 - 200 \cdot e^{-k \cdot 2} = 125$ folgt $k = -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{3}{8}\right) \approx 0{,}5$. Somit ist $v(t) = 200 - 200 \cdot e^{-0{,}5 \cdot t}$.

Ergebnis:
Der angegebene Geschwindigkeitsverlauf wird durch eine Funktion v der Form $v(t) = 200 - 200 \cdot e^{-0{,}5 \cdot t}$ beschrieben.
Allgemein gilt: Wenn das Wachstum eines Bestands durch einen Funktionsterm der Form $f(t) = S - c \cdot e^{-kt}$ $(k > 0)$ beschrieben wird, so spricht man von **beschränktem Wachstum.**
Da e^{-kt} für $t \to +\infty$ gegen 0 strebt, strebt $f(t)$ langfristig gegen die Schranke S.

Bei einer Tropfinfusion werden dem Blut eines Patienten pro Minute 3 ml eines Medikaments zugeführt. Zu Beginn hat der Patient 20 ml des Medikaments im Blut. Die momentane Ausscheidungsrate des Medikaments über die Niere beträgt 4 % pro Minute des gerade im Körper vorhandenen Medikaments.
Kann die Medikamentenmenge durch beschränktes Wachstum beschrieben werden?
Wie groß ist in diesem Fall die Wachstumsschranke?

Hier ist die Schranke zunächst nicht erkennbar. Es gibt stattdessen Informationen über die Änderungsrate $M'(t)$ der Medikamentenmenge $M(t)$. Diese Änderungsrate besteht aus einer konstanten Zuflussrate von +3 und einer zu $M(t)$ proportionalen Abnahme $-0{,}04 \cdot M(t)$.
Somit gilt $M'(t) = 3 - 0{,}04 \cdot M(t)$. Diese Gleichung nennt man eine **Differentialgleichung (DGL)**.
Gesucht ist eine Lösung der DGL, d.h. eine Funktion M mit $M'(t) = 3 - 0{,}04 \cdot M(t)$.

Eine Gleichung für eine gesuchte Funktion (hier M) heißt Differentialgleichung , wenn auch die Ableitung vorkommt.

Eine Differentialgleichung dieser Form löst man mit dem Ansatz $M(t) = S - c \cdot e^{-kt}$.
Damit ist $M'(t) = kc \cdot e^{-kt}$. Setzt man dies in die DGL $M'(t) = 3 - 0{,}04 \cdot M(t)$ ein, so folgt
$kc \cdot e^{-kt} = 3 - 0{,}04 \cdot (S - c \cdot e^{-kt}) \Leftrightarrow kc \cdot e^{-kt} = \underbrace{3 - 0{,}04 \cdot S}_{0} + \underbrace{0{,}04 \cdot c \cdot e^{-kt}}_{kc \cdot e^{-kt}}$.

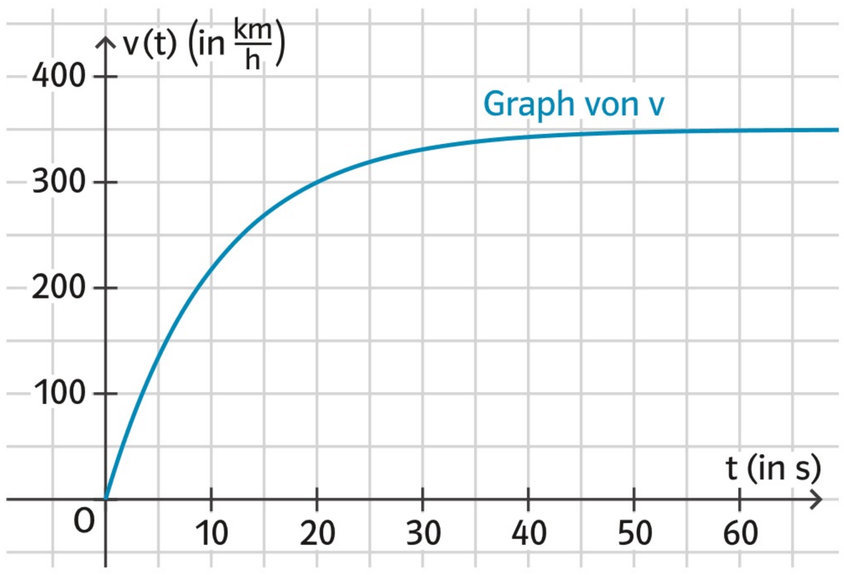
Es ergibt sich $3 - 0{,}04 \cdot S = 0$ und $k = 0{,}04$. Somit ist $S = \frac{3}{0{,}04} = 75$.
Den Wert von c erhält man aus $M(0) = 20$. Da $M(0) = S - c$ und $S = 75$ ist, folgt $c = 55$.
Somit ist die Funktion M mit $M(t) = 75 - 55 \cdot e^{-0{,}04t}$ eine Lösung der DGL, die die Infusion beschreibt. Da der Verlauf der Medikamentenmenge in dieser Situation eindeutig bestimmt ist, muss die Medikamentenmenge zum Zeitpunkt t den Wert $M(t) = 75 - 55 \cdot e^{-0{,}04t}$ haben. Langfristig hat der Patient 75 ml Medikament im Blut.

Ergebnis:
Auch die Medikamentenmenge bei einer Tropfinfusion kann durch beschränktes Wachstum beschrieben werden. Im Beispiel hat der Patient langfristig 75 ml Medikament im Blut.

1 Die Höhe eines Baums wird durch $h(t) = 60 - 59 \cdot e^{-0{,}33t}$ (t in Jahren, $h(t)$ in m) beschrieben. Geben Sie die Höhe des Baums zu Beobachtungsbeginn an und geben Sie die Höhe an, die der Baum langfristig erreicht.

2 In einem See, der für 100 Karpfen Platz bietet, werden 40 Karpfen ausgesetzt. Nach fünf Monaten sind es bereits 80 Karpfen. Man nimmt an, dass beschränktes Wachstum für die Karpfenanzahl $z(t)$ vorliegt (t in Monaten). Bestimmen Sie $z(t)$ und berechnen Sie, wann man 90 Karpfen erwartet.

3 Die Abbildung zeigt den Geschwindigkeitsverlauf eines Rennwagens nach dem Start. Bestimmen Sie einen möglichen Term für $v(t)$.



4 In ein biologisches Klärbecken, in dem sich anfangs 400 l Abwasser befinden, laufen pro Minute 90 l Abwasser ein und es fließen 6 % des vorhandenen Abwassers als geklärtes Wasser ab.
a) Geben Sie eine DGL an, die die Abwassermenge $a(t)$ im Klärbecken beschreibt (t in Minuten, $a(t)$ in l).
b) Geben Sie einen Term für die Abwassermenge $a(t)$ im Klärbecken an.
c) Berechnen Sie, wie hoch der konstante Abwasserzufluss bei unverändertem Abfluss höchstens sein dürfte, wenn nur maximal 1200 Liter Abwasser in das Klärbecken passen.

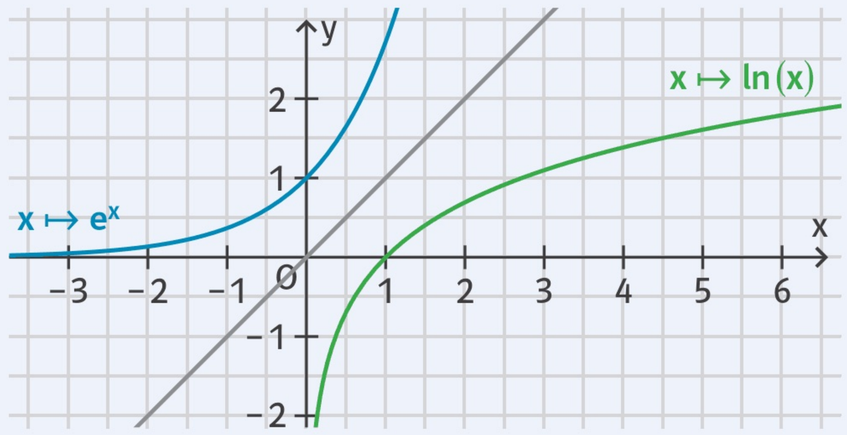
5 Ein Glas Orangensaft hat die Temperatur 20 °C. Es wird im Winter bei 2 °C Außentemperatur zum Zeitpunkt $t = 0$ auf den Balkon gestellt. Dadurch nimmt die Temperatur $T(t)$ (t in min, $T(t)$ in °C) des Orangensafts ab. Zu Beginn ist die momentane Abkühlungssrate $T'(0) = -3{,}6° \frac{C}{min}$.
Für $T(t)$ gilt die Differentialgleichung $T'(t) = k \cdot (S - T(t))$ (Newton'sches Abkühlungsgesetz). Hierbei steht $S = 2$ für die Endtemperatur von +2 °C. Bestimmen Sie den Wert von k und geben Sie die Funktion T an, die den Temperaturverlauf beschreibt.

Rückblick

Natürliche Logarithmusfunktion

Die Funktion $x \mapsto \ln(x)$ mit $D = \mathbb{R}^+$, die jeder positiven reellen Zahl x den natürlichen Logarithmus von x zuordnet, nennt man **natürliche Logarithmusfunktion** oder auch kurz **ln-Funktion**.

Die natürliche Logarithmusfunktion hat die Wertemenge $\mathbb{R}$. Sie ist die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion.



Rechenregeln für den natürlichen Logarithmus

Für $b, c \in \mathbb{R}^+$ gilt:

(1) $\ln(b \cdot c) = \ln(b) + \ln(c)$,

(2) $\ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln(b) - \ln(c)$,

(3) $\ln(b^r) = r \cdot \ln(b)$ für alle $r \in \mathbb{R}$.

$ln(3 \cdot 4) = ln(3) + ln(4)$

$ln\left(\frac{3}{4}\right) = ln(3) - ln(4)$

$ln(3^{-4}) = (-4) \cdot ln(3)$

Ableitung und Stammfunktion der ln-Funktion

Die **Ableitung** der natürlichen Logarithmusfunktion $f: x \mapsto \ln(x)$ mit $D_f = \mathbb{R}^+$ ist $\mathbf{f': x \mapsto \frac{1}{x}}$ mit $D_{f'} = \mathbb{R}^+$.

$f(x) = ln(x^4) = 4 \cdot ln(x) \Rightarrow f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{x} = \frac{4}{x} \quad (x > 0)$

$f(x) = ln\left(\frac{4}{x}\right) = ln(4) - ln(x) \Rightarrow f'(x) = 0 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}$

Eine **Stammfunktion** der Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ mit $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist die Funktion $\mathbf{F: x \mapsto \ln|x|}$ mit $D_F = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

$f(x) = \frac{3}{x} + 2 \Rightarrow F(x) = 3\,ln|x| + 2x$

$f(x) = 4x - 5x^{-1} \Rightarrow F(x) = 2x^2 - 5\,ln|x|$

Ableitung von Verknüpfungen mit der ln-Funktion

Ist v eine differenzierbare Funktion mit $v(x) > 0$, so lässt sich die **Verkettung** $\mathbf{f: x \mapsto \ln(v(x))}$ unter Anwendung der Kettenregel wie folgt **ableiten**:

$\mathbf{f'(x) = \frac{v'(x)}{v(x)}}$.

$f(x) = ln(x^2 + 1)$ *mit* $v(x) = x^2 + 1 > 0$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

Grenzwerte von Verknüpfungen mit der ln-Funktion

Für alle $r \in \mathbb{Q}^+$ gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^r} = 0$ und $\lim\limits_{x \to 0} (x^r \cdot \ln(x)) = 0$.

$f(x) = \frac{ln(x)}{\sqrt{x^3}} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{\sqrt{x^3}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x^{\frac{3}{2}}} = 0$

$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \cdot ln\left(\frac{x}{3}\right) \Rightarrow f(x) = x^{\frac{3}{2}} \cdot ln(x) - x^{\frac{3}{2}} \cdot ln(3)$

$\lim\limits_{x \to 0} \left(x^{\frac{3}{2}} \cdot ln(x)\right) = 0, \quad \lim\limits_{x \to 0} \left(x^{\frac{3}{2}} \cdot ln(3)\right) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

Untersuchung von Verknüpfungen mit der ln-Funktion

- Definitionsmenge von f
- Symmetrieverhalten von G_f
- Nullstellen von f
- Schnittpunkt von G_f mit der y-Achse
- Verhalten von f an den Rändern der Definitionsmenge
- Asymptoten von G_f
- Extrempunkte von G_f und Monotonieverhalten von f
- Wendepunkte und Krümmungsverhalten von G_f

$f(x) = x^2 \cdot ln(x); \; D = \mathbb{R}^+$

Keine Symmetrie erkennbar.

$f'(x) = 2x \cdot ln(x) + x$

$f''(x) = 2\,ln(x) + 3$

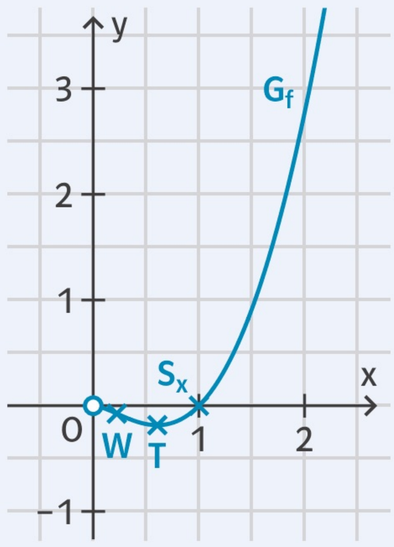
$f'''(x) = \frac{2}{x}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$S_x(1\,|\,0); \; T\left(\frac{1}{\sqrt{e}} \,\middle|\, -\frac{1}{2e}\right)$

$W\left(e^{-\frac{3}{2}} \,\middle|\, -\frac{3}{2e^3}\right)$



→ Lösungen | Seite 294

1 Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge und die Ableitung von f.

a) $f: x \mapsto 2\ln(x+1)$ **b)** $f: x \mapsto \ln(x^2-3)$ **c)** $f: x \mapsto x^3 \cdot \ln(2x-5)$ **d)** $f: x \mapsto \frac{\ln(3x+5)}{x^2+x+1}$

2 Beschreiben Sie, wie die Graphen der Funktionen g, h, i und j aus dem Graphen der Funktion $f: x \mapsto \ln(x)$ hervorgehen, und skizzieren Sie diese Graphen.

$g: x \mapsto -3\ln(x)$ $h: x \mapsto \ln(x-1)$ $i: x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x)+2$ $j: x \mapsto 2\ln(x+3)+2$

3 Geben Sie für $x > 0$ $(x < 0)$ zwei Stammfunktionen von f an.

a) $f: x \mapsto \frac{7}{x}$ **b)** $f: x \mapsto -\frac{2}{x}+3$ **c)** $f: x \mapsto \frac{3}{-6x}$ **d)** $f: x \mapsto x+\frac{1}{2x}$

4 Lösen Sie die Gleichung.

a) $\ln(x) = 5$ **b)** $2 \cdot \ln(x) - 6 = -3$ **c)** $\frac{1}{2\ln(x)} = 3$

d) $\ln(x^2) = 7$ **e)** $\ln(2\sqrt{x}) = \frac{1}{3}$ **f)** $\ln\left(\frac{x}{5}\right) = 1$

5 Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit einer geeigneten Mathematiksoftware.

a) $f(x) = x^5\ln(x)$ **b)** $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2+1}$ **c)** $f(x) = \ln(x^3)(x^3+2x^6)$

6 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \ln\left(5x - \frac{1}{2}x^2\right)$.

a) Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge und die Nullstellen von f.
b) Untersuchen Sie die Funktion f auf Extremstellen.
c) Bestimmen Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f.
d) Skizzieren Sie den Graphen von f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse.

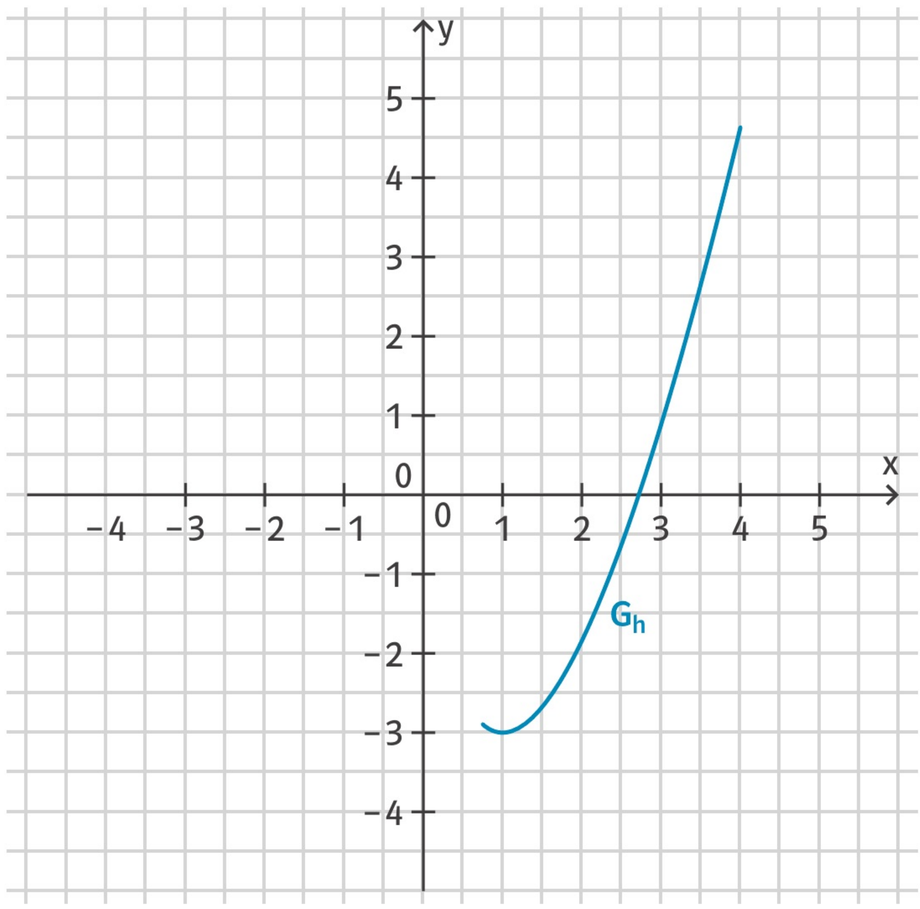
7 **Abiturprüfung 2017 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, daraus Teilaufgaben 1a) bis d)**

Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $h: x \mapsto 3x \cdot (-1 + \ln x)$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_h von h im Bereich $0{,}75 \leq x \leq 4$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_h im Punkt $(e\,|\,0)$ und berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet.
(zur Kontrolle: $h'(x) = 3 \cdot \ln x$)

b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von G_h. Geben Sie den Grenzwert von h für $x \to +\infty$ an und begründen Sie, dass $[-3; +\infty[$ die Wertemenge von h ist.

c) Geben Sie für die Funktion h und deren Ableitungsfunktion h' jeweils das Verhalten für $x \to 0$ an und zeichnen Sie G_h im Bereich $0 < x < 0{,}75$ in die Abbildung ein.

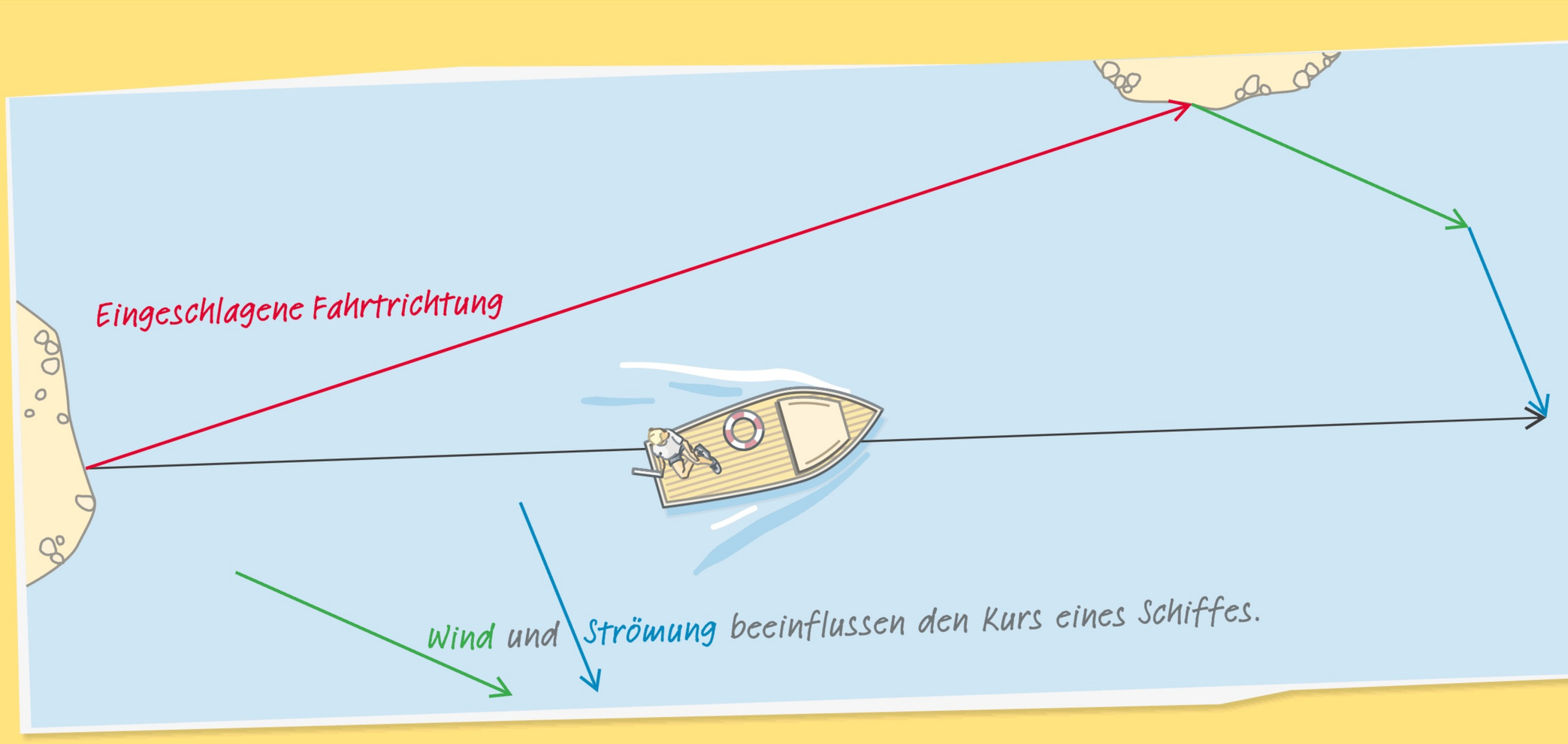


Die Funktion $h^*: \mapsto h(x)$ mit Definitionsmenge $[1; +\infty[$ unterscheidet sich von der Funktion h nur hinsichtlich der Definitionsmenge. Im Gegensatz zu h ist die Funktion h^* umkehrbar.

d) Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Umkehrfunktion von h^* an. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S des Graphen von h^* und der Geraden mit der Gleichung $y = x$. *(Teilergebnis: x-Koordinate des Schnittpunkts: $e^{\frac{4}{3}}$)*

Hinweis zu Aufgabe 7c): Übertragen Sie zunächst G_h in Ihr Heft und ergänzen Sie in dieser Zeichnung G_h.

VIII Grundlagen der Koordinatengeometrie im Raum



Das können Sie schon

- Die Lage von Punkten und geometrischen Formen im Zweidimensionalen mit Koordinaten beschreiben
- Abstände und Streckenlängen im zweidimensionalen Koordinatensystem berechnen
- Definitionen und Eigenschaften von ebenen Figuren (Dreiecke, Vierecke …) und von dreidimensionalen Körpern (Quader, Pyramiden …) benennen und damit arbeiten

Test

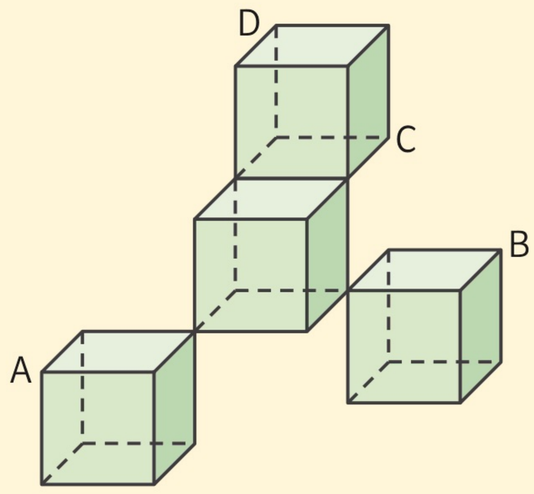
→ Check-in zu Kapitel VIII Seite 269

Das können Sie bald

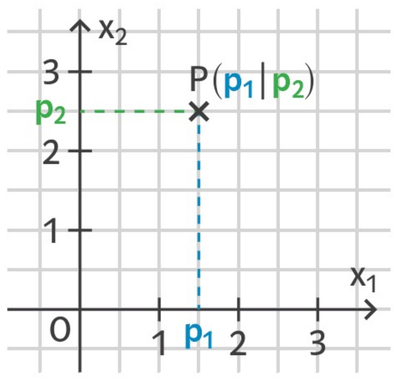
- Die Lage von Punkten und geometrischen Formen im Dreidimensionalen mit Koordinaten beschreiben
- Abstände und Streckenlängen im dreidimensionalen Koordinatensystem berechnen
- Geometrische Sachverhalte mit Vektoren beschreiben
- Mit Vektoren rechnen (z. B. S-Multiplikation, Skalarprodukt und Vektorprodukt) sowie Flächeninhalte und Volumina mithilfe von Vektoren bestimmen

1 Das dreidimensionale Koordinatensystem

Die Abbildung zeigt eine Figur aus vier gleich großen Würfeln mit Kantenlänge 1.
Wie kann man die gegenseitige Lage der Eckpunkte A, B, C und D im Raum beschreiben? Welche Vereinbarungen wären sinnvoll, um die Lage allein durch die Angabe von Zahlen beschreiben zu können?

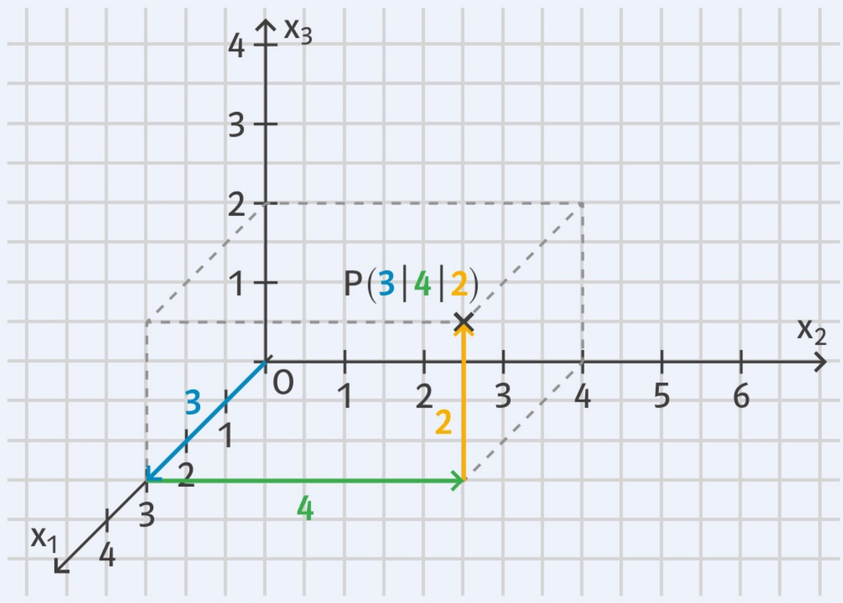


Das bisher verwendete Koordinatensystem hat zwei zueinander senkrechte Achsen. Es ermöglicht, die Lage von Punkten in der Ebene durch Zahlenpaare anzugeben. In der analytischen Geometrie werden die Achsen mit x_1 und x_2 oder mit x und y bezeichnet. Auch zur Bezeichnung der Koordinaten von Punkten verwendet man Indizes, z. B. $P(p_1|p_2)$. Entsprechend gilt im Raum:

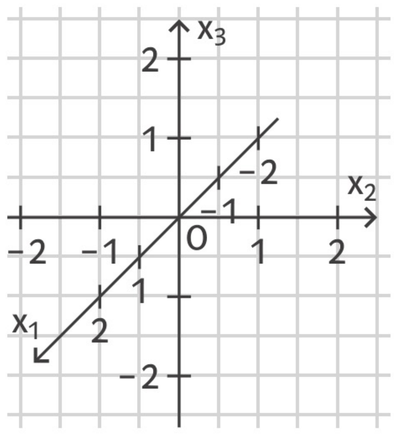


Ein Koordinatensystem, bei dem die Achsen zueinander senkrecht stehen, nennt man ein **kartesisches Koordinatensystem**.

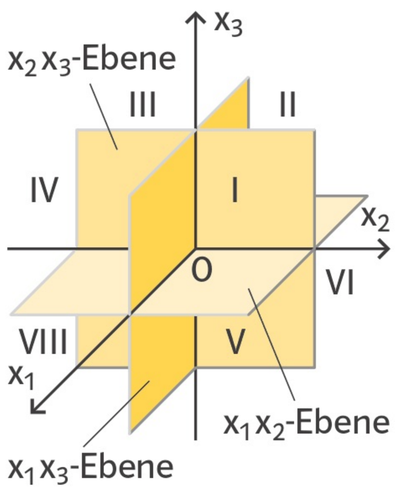
Zur Beschreibung der Lage von Punkten im Raum benötigt man ein **dreidimensionales Koordinatensystem**. Dessen paarweise aufeinander senkrecht stehende Achsen werden mit x_1, x_2 und x_3 oder x, y und z bezeichnet.
Die Koordinaten eines Punktes P werden als **Zahlentripel** $(p_1|p_2|p_3)$ angegeben.
Man schreibt $P(p_1|p_2|p_3)$, z. B. $P(3|4|2)$.
Durch diese Festlegungen wird jedem Punkt im Raum genau ein Zahlentripel zugeordnet und umgekehrt.



Das Schrägbild eines räumlichen Koordinatensystems zeichnet man zweckmäßigerweise wie in der nebenstehenden Abbildung auf kariertes Papier: die x_1-Achse nach vorne, die x_2-Achse nach rechts und die x_3-Achse nach oben. Entsprechen auf der x_2- und der x_3-Achse zwei Kästchen einer Längeneinheit, dann wählt man üblicherweise auf der x_1-Achse eine Kästchendiagonale als Längeneinheit.



Die drei Koordinatenebenen zerlegen den Raum in acht **Oktanten**:



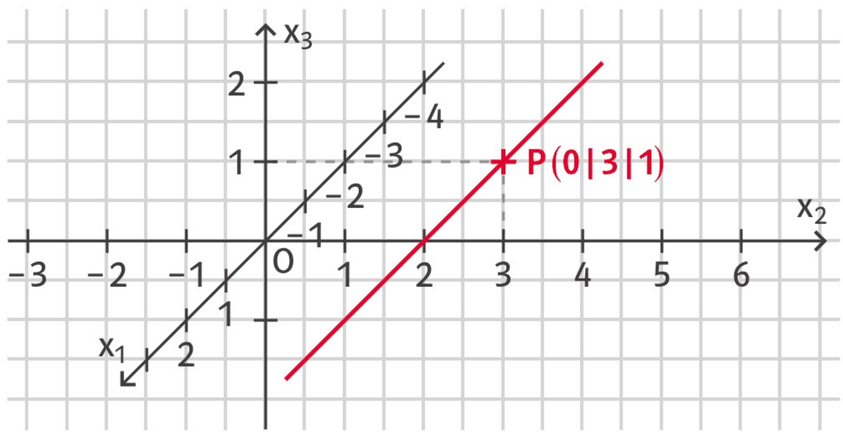
Koordinaten besonderer Punkte im Koordinatensystem:
Punkte auf der x_1-Achse: $P(p_1|0|0)$.
Punkte auf der x_2-Achse: $P(0|p_2|0)$.
Punkte auf der x_3-Achse: $P(0|0|p_3)$.
Punkte in der x_1x_2-Ebene: $P(p_1|p_2|0)$.
Punkte in der x_1x_3-Ebene: $P(p_1|0|p_3)$.
Punkte in der x_2x_3-Ebene: $P(0|p_2|p_3)$.

Beispiel 1

Beschreiben Sie anhand einer Zeichnung die Lage aller Punkte im Koordinatensystem, die durch ein Zahlentripel der Form $(p_1|3|1)$ mit $p_1 \in \mathbb{R}$ dargestellt werden.

Lösung

Die Punkte liegen auf einer Parallelen zur x_1-Achse durch den Punkt $P(0|3|1)$.

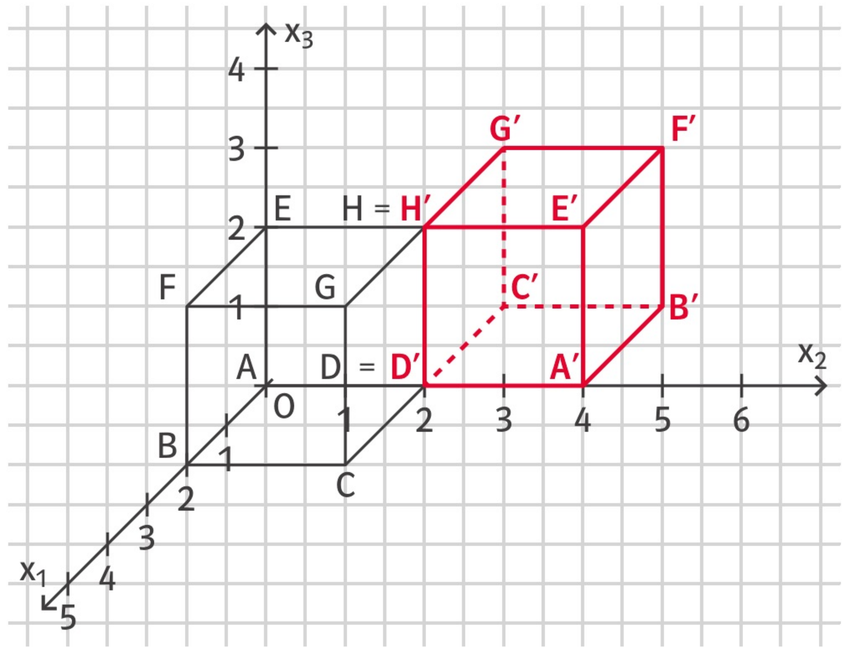


Beispiel 2

Ein Würfel ABCDEFGH hat die Eckpunkte $A(0|0|0)$, $B(2|0|0)$, $C(2|2|0)$ und $E(0|0|2)$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte.

b) Der Würfel ABCDEFGH wird an der Geraden durch die Punkte D und H gespiegelt. Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte des gespiegelten Würfels.
Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie mit einer geeigneten Mathematiksoftware den Würfel zeichnen und die Spiegelung durchführen.



Lösung

a) Der Eckpunkt D entsteht durch eine Verschiebung von A um 2 in x_2-Richtung. Man erhält $D(0|2|0)$.
Der Eckpunkt F entsteht durch eine Verschiebung von B um 2 in x_3-Richtung. Man erhält $F(2|0|2)$.
Entsprechend erhält man die Eckpunkte $G(2|2|2)$ und $H(0|2|2)$.

b) Die Eckpunkte D und H liegen auf der Spiegelgeraden. Also gilt $D' = D$ und $H' = H$.
Die Spiegelachse ist senkrecht zur x_1x_2-Ebene; die Punkte D und A liegen auf der x_2-Achse.
Daher erhält man A′ durch Verschiebung von A um 4 in x_2-Richtung. Man erhält $A'(0|4|0)$.
Entsprechend erhält man die Spiegelpunkte $C'(-2|2|0)$, $E'(0|4|2)$, und $G'(-2|2|2)$.
Die verbleibenden Punkte $B'(-2|4|0)$ und $F'(-2|4|2)$ bestimmt man, indem man ausnutzt, dass das Spiegelbild wieder ein Würfel ist.

Aufgaben

1 **a)** Zeichnen Sie die Punkte $A(2|3|4)$, $B(-2|0|1)$, $C(3|-1|0)$ und $D(0|0|-3)$ in ein Koordinatensystem.

b) Zeichnen Sie die an der x_1x_2-Ebene gespiegelten Punkte und geben Sie deren Koordinaten an.

c) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.

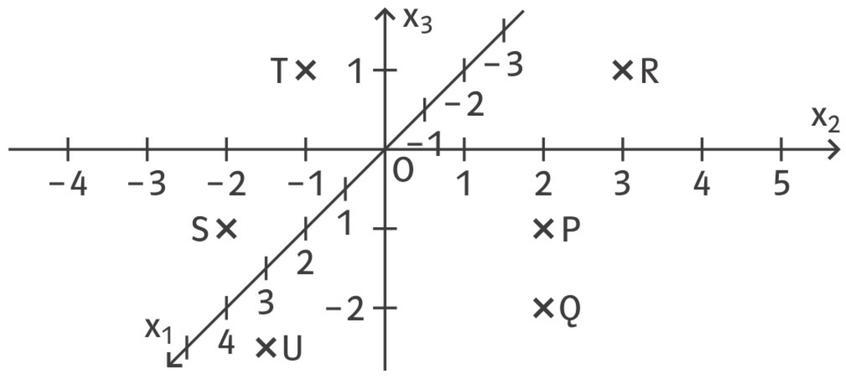
2 Geben Sie die Lage aller Punkte im dreidimensionalen Koordinatensystem an, deren

a) x_1-Koordinate (x_2-Koordinate, x_3-Koordinate) null ist,

b) x_2-Koordinate und x_3-Koordinate null sind,

c) x_1- und x_2-Koordinate eins sind.

3 In der Abbildung befinden sich die Punkte P und Q in der x_1x_2-Ebene, die Punkte R und S in der x_2x_3-Ebene und die Punkte T und U in der x_1x_3-Ebene. Bestimmen Sie arbeitsteilig die Koordinaten dieser Punkte. Beschreiben Sie sich gegenseitig Ihr Vorgehen.



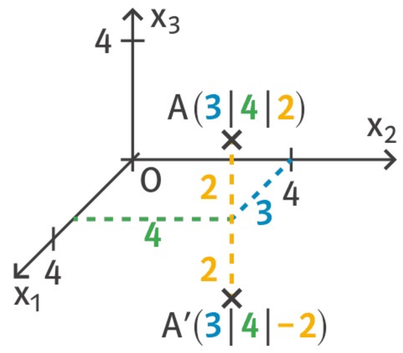
Ohne Angabe der Ebene, in der die Punkte liegen, könnte man ihre Koordinaten nicht angeben.

4 Gegeben sind die Punkte $A(2|0|0)$, $B(-1|2|-1)$, $C(-2|3|4)$ und $D(3|4|-2)$.

a) Bestimmen Sie arbeitsteilig die Koordinaten der Bildpunkte von A, B, C und D bei Spiegelung an der x_1x_2-Ebene (an der x_2x_3-Ebene, an der x_1x_3-Ebene, am Ursprung) und beschreiben Sie sich gegenseitig Ihr Vorgehen.

b) Stellen Sie sich gegenseitig ähnliche Aufgaben und kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mit einer geeigneten Mathematiksoftware.

Spiegelung eines Punktes an der x_1x_2-Ebene:



5 Legen Sie im Klassenzimmer ein Koordinatensystem fest und schätzen Sie Koordinaten von markanten Punkten oder Gegenständen in Ihrem Klassenzimmer.
Überprüfen Sie gegenseitig Ihre Schätzungen bzw. lassen Sie die anderen Gruppen zu gefundenen Koordinaten die entsprechenden Punkte/Gegenstände bestimmen.

6 Ein Quader ABCDEFGH hat die Eckpunkte $A(0|0|0)$, $B(0|-2|0)$, $D(3|0|0)$ und $E(0|0|1)$.

a) Zeichnen Sie diesen Quader in ein dreidimensionales Koordinatensystem und geben Sie die Koordinaten der restlichen Eckpunkte an.

b) Zeichnen Sie den an der x_2-Achse gespiegelten Quader und geben Sie die Koordinaten seiner Eckpunkte an.

c) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.

7 **a)** Beschreiben Sie anhand einer Zeichnung die Lage aller Punkte im Koordinatensystem,
(1) die durch ein Zahlentripel der Form $(5|y|1)$ mit $y \in \mathbb{R}$ dargestellt werden,
(2) die durch ein Zahlentripel der Form $(x|4|1)$ mit $x \in \mathbb{R}$ dargestellt werden,
(3) die durch ein Zahlentripel der Form $(1|z|z)$ mit $z \in \mathbb{R}$ dargestellt werden.

b) Stellen Sie sich gegenseitig ähnliche Aufgaben.

Test 1

Lösungen | Seite 295

8 Ein Würfel ABCDEFGH hat die Eckpunkte $A(0|0|0)$, $B(0|-4|0)$, $D(4|0|0)$ und $E(0|0|4)$.

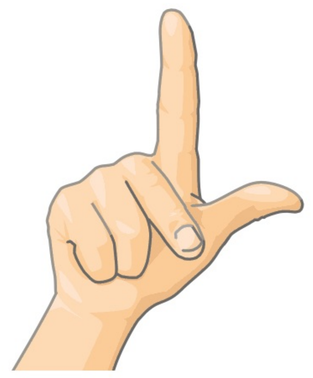
a) Zeichnen Sie diesen Würfel in ein dreidimensionales Koordinatensystem und geben Sie die Koordinaten der restlichen Eckpunkte an.

b) Zeichnen Sie den an der x_1-Achse gespiegelten Würfel und geben Sie die Koordinaten seiner Eckpunkte an.

c) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.

9 Von einem Würfel ABCDEFGH mit zu den Koordinatenebenen parallelen Seitenflächen sind zwei Eckpunkte gegeben. Ermitteln Sie die Koordinaten der restlichen Eckpunkte und zeichnen Sie den Würfel mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware in ein dreidimensionales Koordinatensystem. Markieren Sie eventuell vorhandene Schnittpunkte der Koordinatenachsen mit den Würfelflächen und geben Sie deren Koordinaten an. Geben Sie Intervalle an, in denen die x_1-, x_2- und x_3-Koordinaten von Punkten liegen, die sich im Inneren des Würfels befinden.

a) $B(5|6|1)$ und $H(1|2|5)$ **b)** $B(3|3|-3)$ und $H(-2|-2|2)$ **c)** $D(-2|-2|-3)$ und $F(3|3|2)$



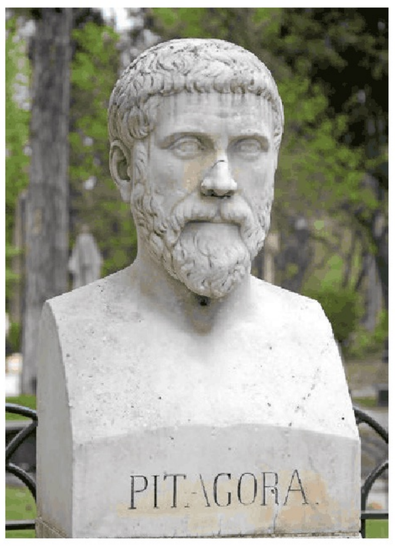
Üblicherweise werden die Koordinatenachsen so orientiert, dass sie ein Rechtssystem bilden **(Rechte-Hand-Regel)**.

10 **a)** Führen Sie mit einigen selbst gewählten Beispielpunkten eine Spiegelung am Koordinatenursprung durch. Beschreiben Sie, wie man anhand der Koordinaten erkennen kann, ob zwei gegebene Punkte symmetrisch zum Ursprung liegen.

b) Führen Sie mit einigen selbst gewählten Beispielpunkten eine Spiegelung an der x_1x_2-Ebene durch. Beschreiben Sie, wie man anhand der Koordinaten erkennen kann, ob zwei gegebene Punkte symmetrisch zur x_1x_2-Ebene liegen.

c) Führen Sie mit einigen selbst gewählten Beispielpunkten eine Spiegelung an der x_3-Achse durch. Beschreiben Sie, wie man anhand der Koordinaten erkennen kann, ob zwei gegebene Punkte symmetrisch zur x_3-Achse liegen.

d) Gegeben sind ein Dreieck ABC und das gespiegelte Dreieck A'B'C' mit $A(1|2|3)$, $B(-3|0|4)$ und $C(0|0|-3)$ sowie $A'(-1|-2|3)$, $B'(3|0|4)$ und $C'(0|0|-3)$.
Geben Sie an, woran gespiegelt wurde. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.



Pythagoras von Samos (etwa 570 – 510 v. Chr.), griechischer Mathematiker und Philosoph

11 Gegeben sind die Eckpunkte $A(0|0|0)$, $B(2|0|0)$, $C(2|2|0)$ und $D(0|2|0)$ der quadratischen Grundfläche einer geraden Pyramide ABCDS. Gegeben ist zudem die Länge $|\overline{AS}| = \sqrt{7}$. Bestimmen Sie die Koordinaten der Spitze S durch eine Rechnung.

12 Von einem Quader ABCDEFGH mit zu den Koordinatenebenen parallelen Seitenflächen sind die Punkte $C(-2|3|-2{,}5)$ und $E(3|-2|0{,}5)$ gegeben.

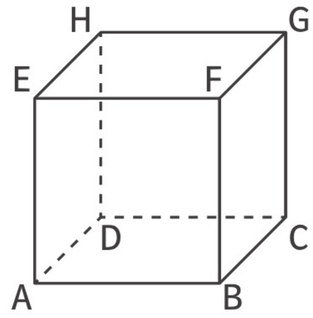
a) Stellen Sie die Punkte mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware dar und bestimmen Sie die Kantenlängen des Quaders. Beschreiben Sie Ihre dabei gemachten Überlegungen.

b) Geben Sie die Koordinaten der übrigen Eckpunkte des Quaders an und zeichnen Sie ihn mit einer geeigneten Mathematiksoftware. Markieren Sie die eventuell vorhandenen Schnittpunkte der Koordinatenachsen mit den Seitenflächen des Quaders.

13 **Abiturprüfung 2016 (Bayern), Geometrie, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1**

Betrachtet wird der abgebildete Würfel ABCDEFGH.

Die Eckpunkte D, E, F und H dieses Würfels besitzen in einem kartesischen Koordinatensystem die folgenden Koordinaten:
$D(0|0|-2)$, $E(2|0|0)$, $F(2|2|0)$ und $H(0|0|0)$.



a) Zeichnen Sie in die Abbildung die Koordinatenachsen ein und bezeichnen Sie diese. Geben Sie die Koordinaten des Punkts A an.

b) Der Punkt P liegt auf der Kante $\overline{FB}$ des Würfels und hat vom Punkt H den Abstand 3. Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts P.

Hinweis zu Aufgabe 13 a): Übertragen Sie zunächst den Würfel in Ihr Heft und ergänzen Sie in dieser Zeichnung die Koordinatenachsen.

Test 2

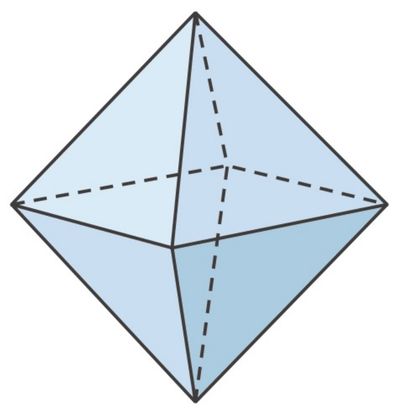
→ Lösungen | Seite 296

14 Von einem Oktaeder ABCDEF sind die Koordinaten folgender Eckpunkte gegeben:
$A(0|0|0)$, $B(0|4|0)$, $C(-4|4|0)$ und $D(-4|0|0)$.

a) Zeichnen Sie die gegebenen Punkte in ein dreidimensionales Koordinatensystem und geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes des Vierecks ABCD an.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte E und F durch Rechnung. Nutzen Sie hierfür die Symmetrieeigenschaften des Oktaeders.

c) Zeichnen Sie das vollständige Oktaeder ABCDEF und das an der x_3-Achse gespiegelte Oktaeder A′B′C′D′E′F′.



Die acht Seitenflächen eines Oktaeders sind zueinander kongruente gleichseitige Dreiecke.

15 **a)** Zeichnen Sie die Punkte $A(3|5)$ und $B(5|3)$ in ein zweidimensionales Koordinatensystem. Beschreiben Sie die gegenseitige Lage zweier beliebiger Punkte, bei denen die Koordinaten vertauscht sind.

b) Beschreiben Sie die gegenseitige Lage der Punkte $A(3|5|2)$ und $B(5|3|2)$ in einem dreidimensionalen Koordinatensystem.

c) Beschreiben Sie die gegenseitige Lage beliebiger Punkte der Form $A(x|y|z)$ und $B(y|x|z)$ mit $x, y, z \in \mathbb{R}$ in einem dreidimensionalen Koordinatensystem.

16 Von einem Würfel ABCDEFGH sind die Eckpunkte $A(8|2|0)$, $B(8|6|3)$ und $D(3|2|0)$ gegeben.

a) Zeichnen Sie die gegebenen Punkte mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.

b) Geben Sie diejenigen Würfelflächen an, die parallel zu einer der Koordinatenebenen liegen. Erläutern Sie, wie man die Parallelität anhand der Koordinaten der Eckpunkte erkennen kann.

c) Da es sich um einen Würfel handelt, sind die Längen der Kanten AB und AD gleich. Bestätigen Sie dies durch eine Rechnung.

d) Ermitteln Sie die Koordinaten von E mit einer geeigneten Mathematiksoftware und bestätigen Sie das Ergebnis durch eine Rechnung.

e) Ermitteln Sie die Koordinaten der restlichen Eckpunkte und zeichnen Sie den Würfel mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.

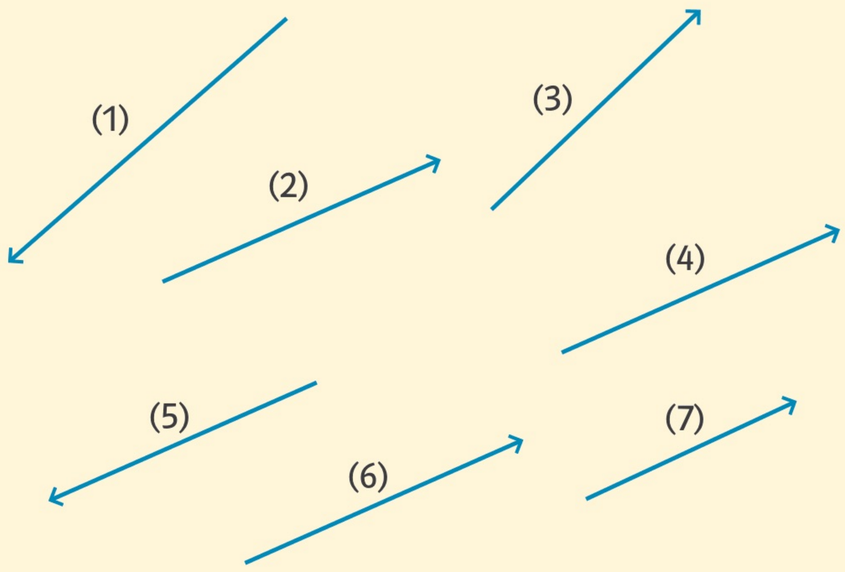
Grundwissen Test

→ Lösungen | Seite 296

G 17 **a)** Bestimmen Sie 40 % von 60 % von 48 kg.

b) Bestimmen Sie 2 % von 5 %.

2 Vektoren und Beträge von Vektoren

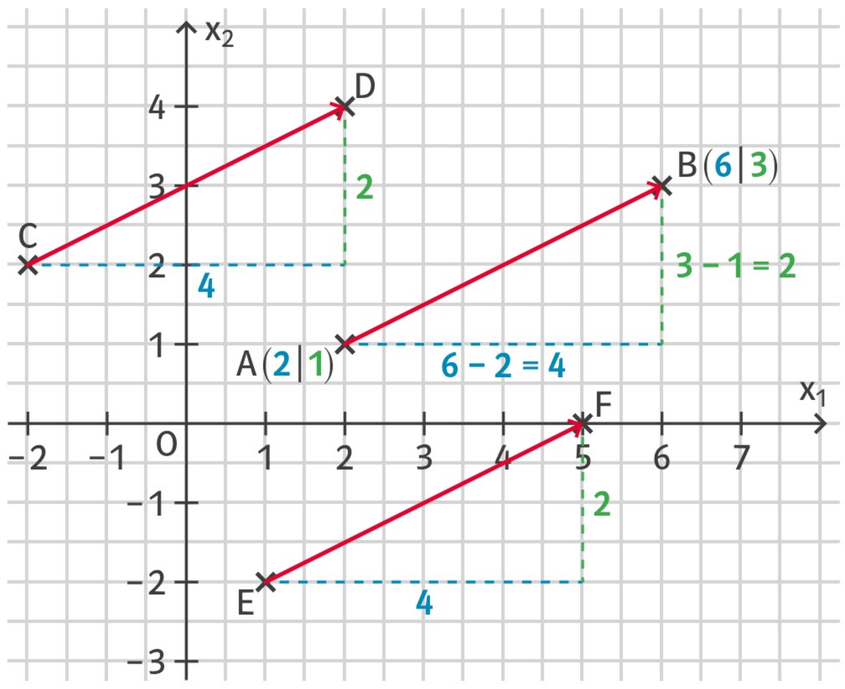


Beschreiben Sie Unterschiede und Gemeinsamkeiten der Pfeile.

Im Koordinatensystem betrachtet man nicht nur Punkte, sondern auch Verbindungen zwischen ihnen, z. B. Pfeile. Man bezeichnet den Pfeil mit Ausgangspunkt A und Spitze B mit $\overrightarrow{AB}$.

Um vom Ausgangspunkt $A(2|1)$ zur Spitze $B(6|3)$ zu gelangen, geht man
$6 - 2 = 4$ Einheiten in x_1-Richtung und
$3 - 1 = 2$ Einheiten in x_2-Richtung.

Um von der Koordinatendarstellung von Punkten in Zeilenschreibweise zu unterscheiden, schreibt man
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und bezeichnet diese Spaltenschreibweise $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ als **Koordinatendarstellung** des Pfeils $\overrightarrow{AB}$.

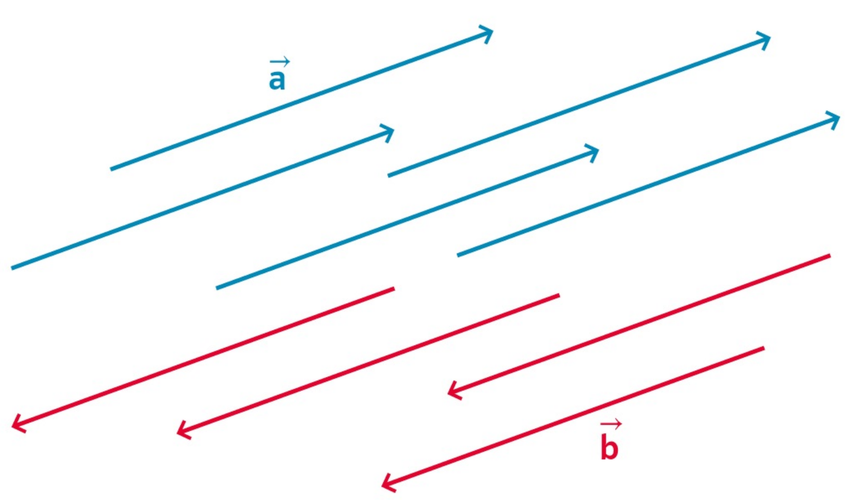


Die Pfeile $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{EF}$ haben alle die gleiche Koordinatendarstellung $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, denn es gilt
$\begin{pmatrix} 6-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-(-2) \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 0-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Die Pfeile sind parallel, gleich lang und gleich gerichtet.
Wegen dieser gemeinsamen Eigenschaft führt man einen neuen Begriff ein.

Definition: Die Menge aller zueinander paralleler, gleich langer und gleich gerichteter Pfeile bezeichnet man als **Vektor**. Jeder einzelne Pfeil ist ein **Repräsentant** des Vektors.
Vektoren werden häufig mit kleinen Buchstaben und einem Pfeil darüber bezeichnet, z. B. $\vec{a}$, $\vec{b}$ oder $\vec{v}$.

vehere (lat.): ziehen, schieben,
vector (lat.): Träger, Fahrer

Sind die Repräsentanten zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zueinander parallel und gleich lang, aber entgegengesetzt gerichtet, so heißt $\vec{b}$ ein **Gegenvektor** zu $\vec{a}$ (und $\vec{a}$ Gegenvektor zu $\vec{b}$).
Man schreibt $\vec{b} = -\vec{a}$ bzw. $\vec{a} = -\vec{b}$.



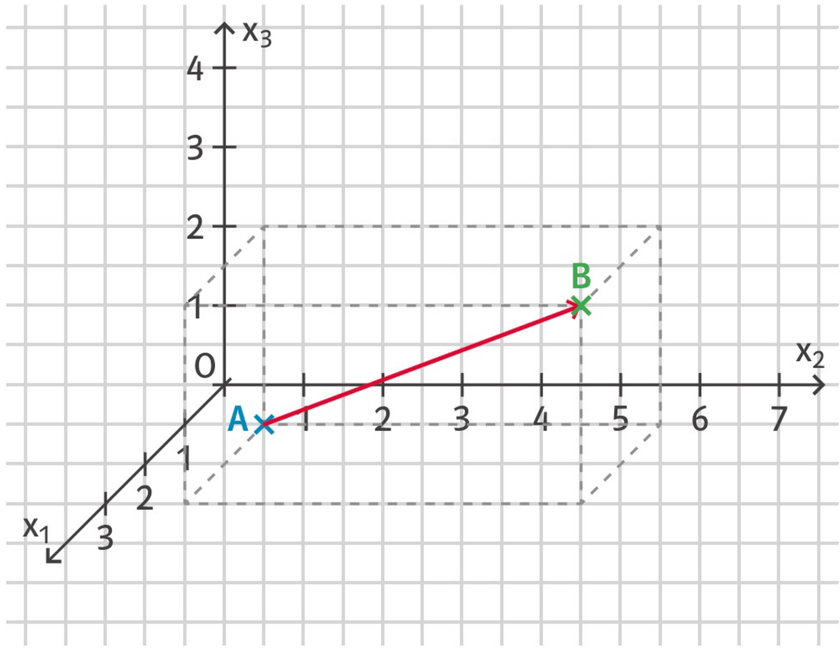
Derjenige Vektor, bei dem Ausgangspunkt und Spitze zusammenfallen, heißt **Nullvektor**.
Er wird mit $\vec{0}$ bezeichnet.

Zur Beschreibung von Pfeilen im dreidimensionalen Koordinatensystem benötigt man Zahlentripel.

Um vom Ausgangspunkt $A(2|1{,}5|0{,}5)$ des Pfeils $\overrightarrow{AB}$ zur Spitze $B(4|6{,}5|3)$ zu gelangen, muss man

$4 - 2 = 2$ Einheiten in x_1-Richtung,
$6{,}5 - 1{,}5 = 5$ Einheiten in x_2-Richtung und
$3 - 0{,}5 = 2{,}5$ Einheiten in x_3-Richtung gehen.

Man schreibt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8{,}5 & -1{,}5 \\ 3 & -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ und bezeichnet $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ als Koordinatendarstellung des Pfeils $\overrightarrow{AB}$.



Bemerkung:
Vektoren werden in der Physik zur Beschreibung von Größen verwendet, zu deren eindeutiger Bestimmung auch die Angabe der Richtung nötig ist. Ein Beispiel für eine solche Größe ist die Geschwindigkeit.

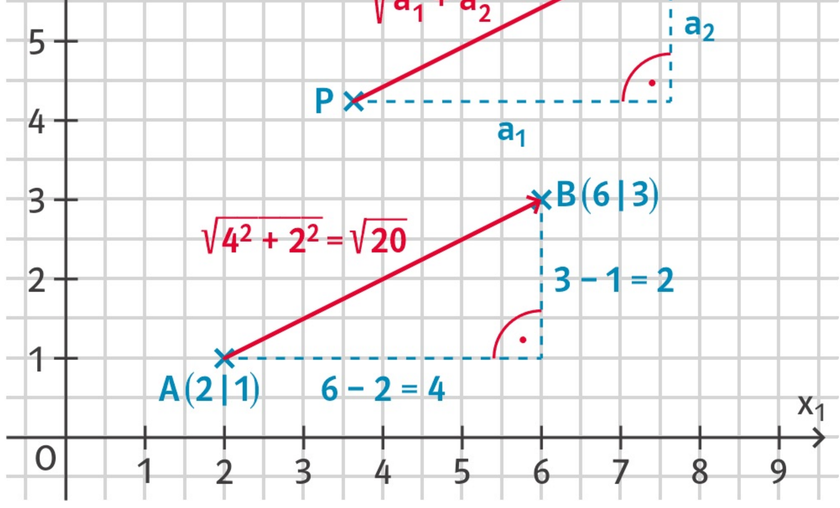
Wie im Zweidimensionalen haben alle zu $\overrightarrow{AB}$ parallelen, gleich langen und gleich gerichteten Pfeile dieselbe Koordinatendarstellung; sie repräsentieren alle denselben Vektor. Deswegen bezeichnet $\overrightarrow{AB}$ nicht nur den Verbindungspfeil der Punkte A und B, sondern auch den Vektor, der durch diesen Pfeil repräsentiert wird.

Ein **Vektor in der Ebene bzw. im Raum** wird durch die Angabe von zwei bzw. drei Koordinaten vollständig beschrieben. Man schreibt z. B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ oder $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3{,}7 \end{pmatrix}$.

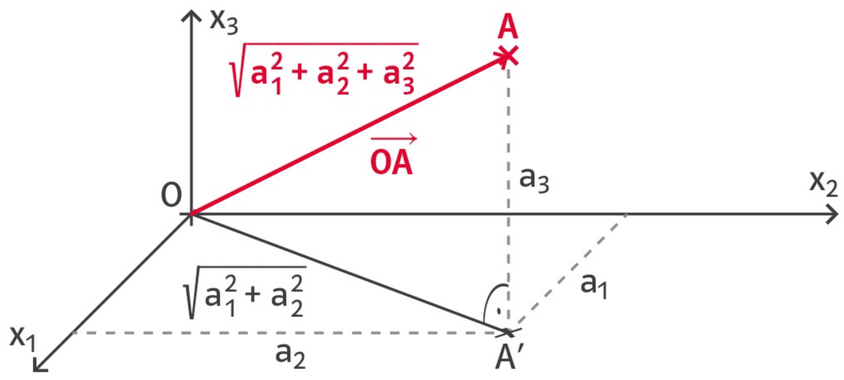
Allgemein erhält man die Koordinatendarstellung eines Vektors $\overrightarrow{AB}$ aus den Koordinaten von A und B durch $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$ im zweidimensionalen bzw. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$ im dreidimensionalen Koordinatensystem.

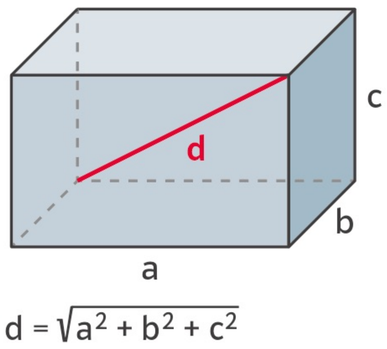
Für einen Punkt B bezeichnet man den Pfeil vom Koordinatenursprung O zum Punkt B als einen Repräsentanten des **Ortsvektors von B**; mit anderen Worten: Der Vektor $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ bzw. $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ist der **Ortsvektor des Punktes B**.

Die Länge eines Pfeils im zweidimensionalen Koordinatensystem kann man mit dem Satz des Pythagoras berechnen.
Im Beispiel gilt für die Länge $|\overrightarrow{AB}|$ des Pfeils $\overrightarrow{AB}$:
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} \approx 4{,}47$.
Für einen beliebigen Pfeil $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ gilt allgemein $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.
Man nennt diese Länge auch den **Betrag des Vektors**.



Mit dem Satz des Pythagoras kann man auch im Dreidimensionalen den Betrag des Vektors $\overrightarrow{OA}$ berechnen. Es gilt $|\overrightarrow{OA'}|^2 = a_1^2 + a_2^2$.
Man erhält $|\overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OA'}|^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.
Also gilt $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.





$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Entsprechend definiert man den Betrag eines Vektors allgemein:

Definition: Unter dem **Betrag eines Vektors** $\vec{a}$ versteht man die Länge eines zu $\vec{a}$ gehörenden Repräsentanten. Der Betrag von $\vec{a}$ wird mit $|\vec{a}|$ bezeichnet.

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ gilt $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ bzw. für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ gilt $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Beispiel 1

Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BA}$ haben stets denselben Betrag. Bestätigen Sie dies rechnerisch für $A(3|4|-7)$ und $B(3|-4|2)$.

Lösung

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-3 \\ -4-4 \\ 2-(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 3-3 \\ 4-(-4) \\ -7-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0^2 + (-8)^2 + 9^2} = \sqrt{0 + 64 + 81} = \sqrt{145}$$

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{0^2 + 8^2 + (-9)^2} = \sqrt{0 + 64 + 81} = \sqrt{145}$$

$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$, aber $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$ und $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Beispiel 2

Das Viereck ABCD ist durch die Punkte $A(1|1|-2)$, $B(6|0|-2)$, $C(8|5|-2)$ und $D(3|6|-2)$ gegeben. Begründen Sie, dass das Viereck ein Parallelogramm ist. Berechnen Sie die Längen seiner Diagonalen und geben Sie das Ergebnis auf zwei Dezimalen genau an.

Immer wenn von einem Viereck die Rede ist, wird vorausgesetzt, dass die vier Eckpunkte in einer Ebene liegen.

Lösung

Es gilt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}$. Da die Gegenseiten gleich lang und parallel sind, ist ABCD ein Parallelogramm.

Die Diagonalen des Vierecks ABCD sind $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$. Es gilt für die Längen

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{7^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{65} \approx 8{,}06$ und $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{45} \approx 6{,}71$.

Aufgaben

1 Bestimmen Sie die Koordinaten der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BA}$ und ihre Beträge für

a) $A(1|3)$ und $B(-2|5)$,
b) $A(1|0|1)$ und $B(3|4|1)$,
c) $A(4|2|0)$ und $B(3|3|3)$,
d) $A(-1|2|3)$ und $B(2|-2|4)$.

2 Gegeben sind die Punkte $A(-2|-2|-1)$, $B(3|0|-1)$, $C(2|4|-1)$ und $D(-3|2|-1)$.

a) Zeichnen Sie das Viereck ABCD mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.
b) Geben Sie Koordinaten der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{DC}$ an. Bestimmen Sie die Art des Vierecks. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.
c) Berechnen Sie die Längen der Diagonalen von ABCD. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware.

3 Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

a) $A(1|-5)$, $B(0|3)$, $C(-8|2)$
b) $A(-1|7)$, $B(8|-3)$, $C(-5|-6)$
c) $A(1|-2|2)$, $B(3|2|1)$, $C(3|0|3)$
d) $A(7|0|-1)$, $B(5|-3|-1)$, $C(4|0|1)$

Test 1

→ Lösungen | Seite 296

4 Zeichnen Sie das Viereck ABCD mit $A(-2|-3|2)$, $B(1|1|3)$, $C(1|2|5)$ und $D(-2|-2|4)$ in ein dreidimensionales Koordinatensystem. Begründen Sie durch eine Rechnung, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist, und bestimmen Sie seine Diagonalenlängen.

5 Bestimmen Sie alle möglichen Werte für die fehlende Koordinate p so, dass der Punkt $P(5|0|p)$ vom Punkt $Q(4|-2|5)$ den Abstand 3 hat.

→ Strategie | Seite 259
Aufstellen und Lösen einer Gleichung

6 Gegeben ist das Dreieck ABC mit den Eckpunkten $A(0|1|0)$, $B(2|0|2)$ und $C(-1|3|2)$.

a) Zeichnen Sie das Dreieck ABC in ein dreidimensionales Koordinatensystem.

b) Prüfen Sie durch eine Rechnung, ob das Dreieck rechtwinklig ist.

7 **a)** Bestimmen Sie alle möglichen Werte für die fehlende Koordinate b in $B(2|b)$ so, dass das Dreieck OAB mit $A(4|0)$ gleichseitig ist.

b) Bestimmen Sie alle möglichen Werte für die fehlende Koordinate b in $B(0|b)$ so, dass das Dreieck OAB mit $A(4|0)$ rechtwinklig ist.

→ Strategie | Seite 256
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

8 Gegeben sind beliebige Punkte A, B und C.

a) Begründen Sie, dass im Allgemeinen $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| \neq |\overrightarrow{AC}|$ gilt. Beschreiben Sie, welche Lage die Punkte A, B und C haben müssen, damit $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}|$ gilt.

b) Begründen Sie, dass stets $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| \geq |\overrightarrow{AC}|$ gilt.

9 Geben Sie eine Gleichung an, die die Koordinaten des Punktes $X(x_1|x_2|x_3)$ erfüllen müssen, damit der Punkt X vom Punkt $M(4|1|-1)$ den Abstand 3 hat. Geben Sie drei Lösungen dieser Gleichung an.

10 Ein Punkt A wird durch einen Vektor $\vec{a}$ auf A_1 und durch den Gegenvektor zu $\vec{a}$ auf A_2 verschoben. Weiterhin wird A durch einen Vektor $\vec{b}$ auf den Punkt B verschoben. Beschreiben Sie, wie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gewählt werden müssen, damit das Dreieck A_1A_2B gleichschenklig (gleichseitig) ist.

Test 2

→ Lösungen | Seite 296

11 Skizzieren Sie das Dreieck mit den Eckpunkten $P(-2|-1|7)$, $Q(3|1|7)$ und $R(-1|3|7)$. Ergänzen Sie das Dreieck anhand Ihrer Skizze auf jede mögliche Weise zu einem Parallelogramm und geben Sie die Koordinaten des jeweiligen 4. Eckpunktes an. Überprüfen Sie Ihre zeichnerischen Ergebnisse durch eine Rechnung.

Beachten Sie, dass das Dreieck in einer zur x_1x_2-Ebene parallelen Ebene liegt.

12 **a)** Begründen Sie durch eine Rechnung, dass alle Dreiecke ABC_k mit $A(3|2|1)$, $B(5|5|7)$ und $C_k(4 + 3k|3{,}5 + 2k|4 - 2k)$ gleichschenklig sind.

b) Bestimmen Sie die Werte von k, für die sich ein gleichseitiges Dreieck ergibt.

c) Zeichnen Sie die Situation für einige Werte von k mit einer geeigneten Mathematiksoftware in ein Koordinatensystem und beschreiben Sie die Lage aller Punkte C_k.

Grundwissen Test

→ Lösungen | Seite 297

G 13 Geben Sie zunächst an, um welchen Gleichungstyp es sich handelt (bzw. auf welchen Gleichungstyp die vorliegende Gleichung zurückgeführt werden kann), und lösen Sie anschließend die Gleichung.

a) $2 + 3e^{2x+1} = 8$ **b)** $\frac{5}{4x^2} - 3 = 3 - \frac{1}{x^2}$ **c)** $3x^4 + 2x^3 = x^2$ **d)** $\sqrt{9 + x^2} = 4$

e) $8x + 6 = 2x^2$ **f)** $(1 - 2t)^4 = 16$ **g)** $4x - 5x^{-1} = -1$ **h)** $\sin(2x) + 2 = 3$

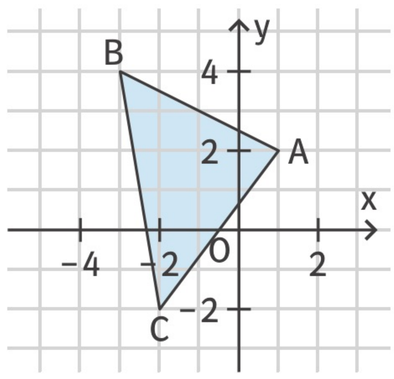
G 14 In einem zweidimensionalen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1|2)$, $B(-3|4)$ und $C(-2|-2)$ gegeben.

a) Spiegeln Sie das Dreieck ABC an der x-Achse. Sie erhalten $A_1B_1C_1$.

b) Spiegeln Sie $A_1B_1C_1$ an der y-Achse. Sie erhalten $A_2B_2C_2$.

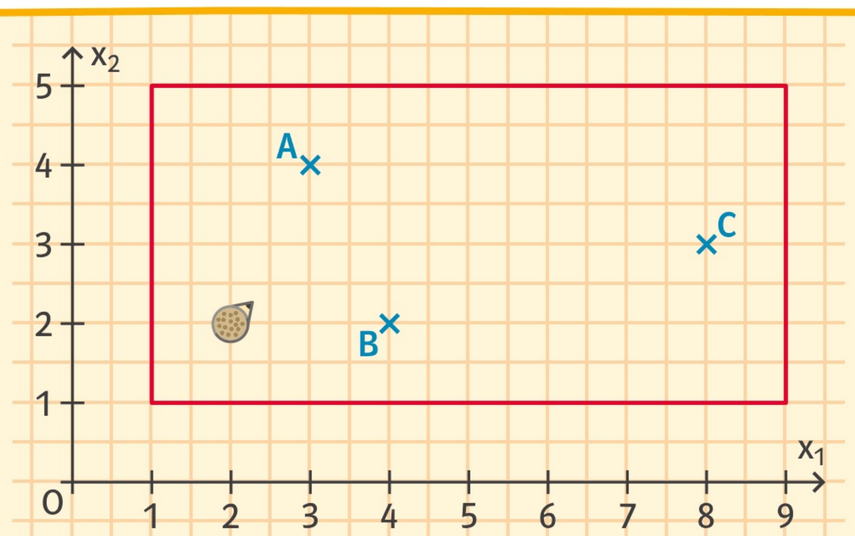
c) Spiegeln Sie ABC am Koordinatenursprung. Sie erhalten $A_3B_3C_3$.

d) Vergleichen Sie $A_2B_2C_2$ und $A_3B_3C_3$. Erklären Sie Ihre Beobachtung.

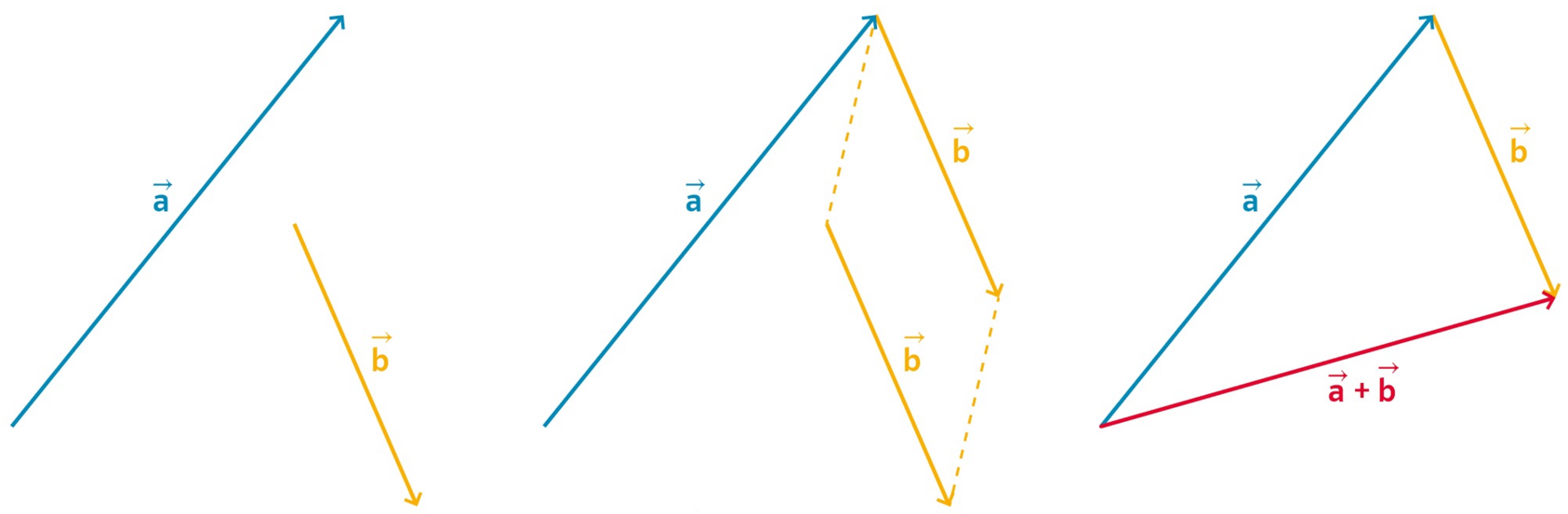


3 Addition und Subtraktion von Vektoren

Der computergesteuerte „Igel“ kann jede Position innerhalb des umrandeten Feldes erreichen. Die Anweisung dazu heißt: „Gehe a Einheiten in x_1-Richtung und b Einheiten in x_2-Richtung.“
Geben Sie die Anweisungen für die Bewegungen von A nach B, von B nach C und von A nach C an. Vergleichen Sie diese Anweisungen.



Vektoren können auch addiert und subtrahiert werden.
Zwei **Vektoren** $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden **addiert**, indem geeignete Repräsentanten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aneinandergefügt werden.



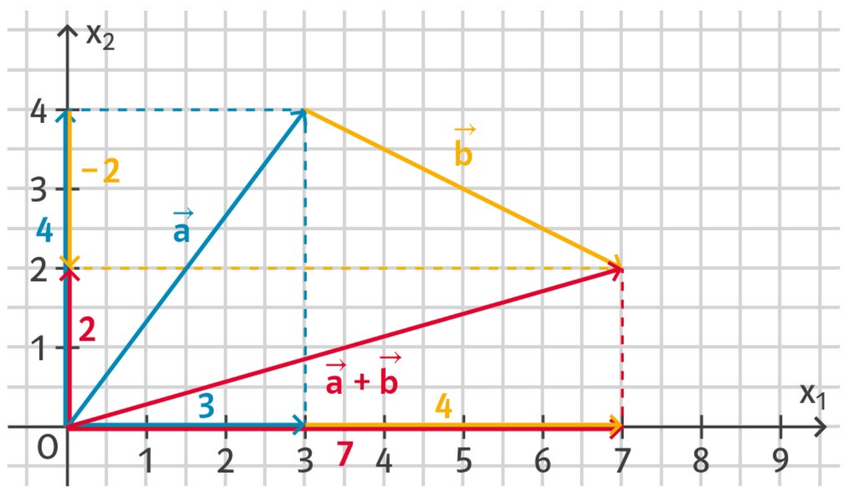
Ein Repräsentant des Summenvektors $\vec{a} + \vec{b}$ geht dann vom Ausgangspunkt eines Repräsentanten von $\vec{a}$ zur Spitze des an diesen angefügten Repräsentanten von $\vec{b}$.

Sind die Koordinaten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bekannt, so kann man die Koordinaten von $\vec{a} + \vec{b}$ wie im Bild veranschaulicht berechnen.

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ gilt

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 4 \\ 4 + (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

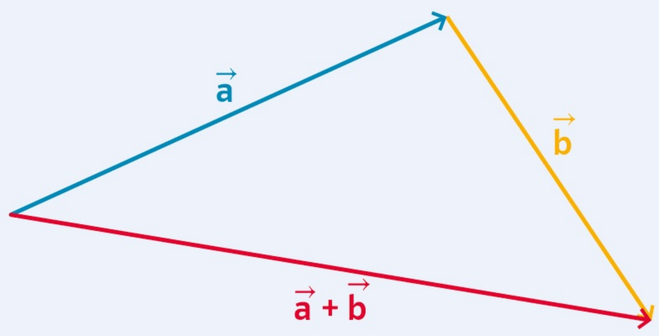
Analog geht man im dreidimensionalen Koordinatensystem vor:



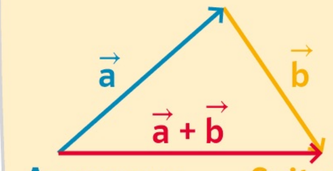
Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ gilt $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 1 \\ -3 + 2 \\ 1 + (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Bei der **Addition von Vektoren** $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erhält man einen Repräsentanten des Summenvektors $\vec{a} + \vec{b}$, indem man, wie in der Abbildung veranschaulicht, Repräsentanten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aneinanderfügt.
Für den Summenvektor gilt

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}.$$

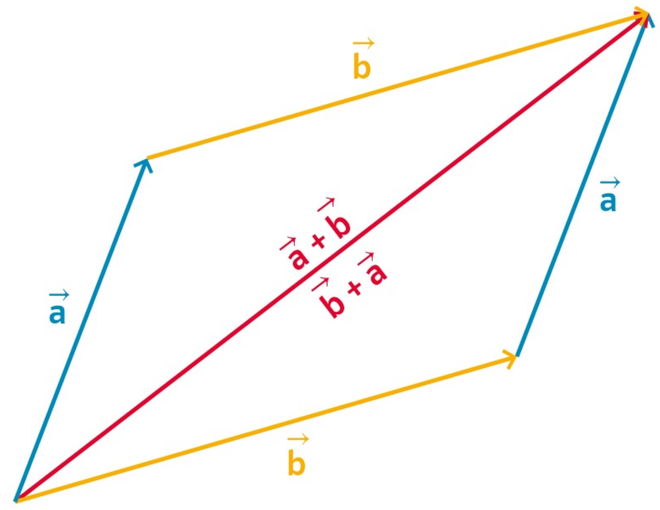


Merke:
Summenvektor $\vec{a} + \vec{b}$:
Vom Ausgangspunkt von $\vec{a}$ zur Spitze von $\vec{b}$



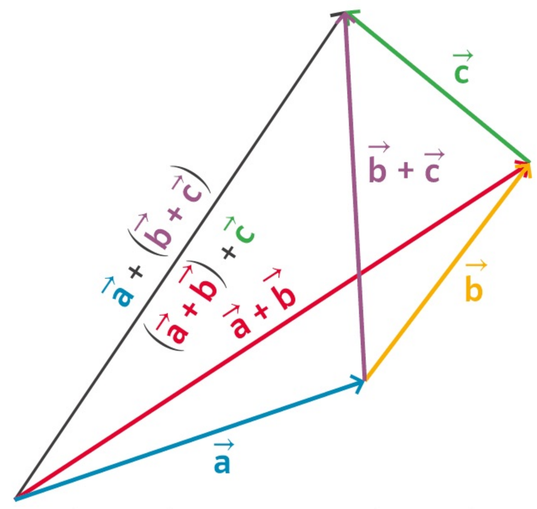
Für die Vektoraddition gelten die gleichen **Rechengesetze** wie für die Addition von Zahlen:

Kommutativgesetz der Addition



$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Assoziativgesetz der Addition

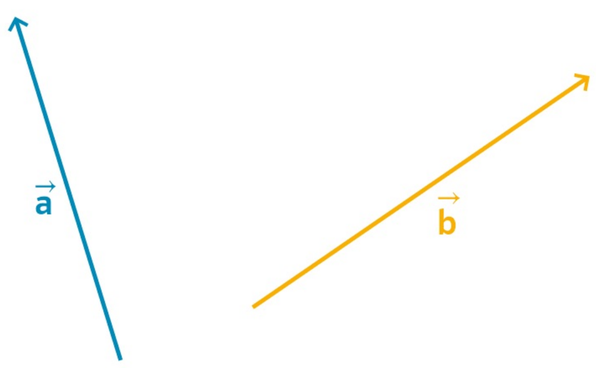


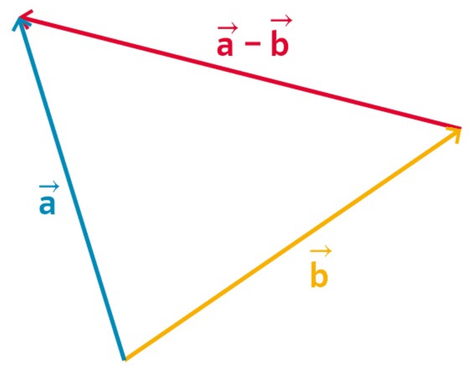
$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

Die Differenz $\vec{a} - \vec{b}$ ist definiert als die Summe aus $\vec{a}$ und dem Gegenvektor von $\vec{b}$, also $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Damit gilt $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Um sich die Differenz $\vec{a} - \vec{b}$ für beliebige Vektoren zu veranschaulichen, beachtet man die Gleichheit $\vec{b} + (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}$. Also ist $\vec{a} - \vec{b}$ der Vektor, der zu $\vec{b}$ addiert $\vec{a}$ ergibt.

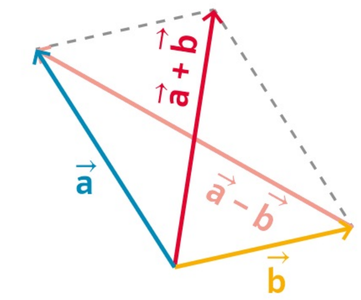
Für eine Veranschaulichung ist es hilfreich, Repräsentanten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ so zu wählen, dass sie denselben Ausgangspunkt besitzen. Ein Repräsentant von $\vec{a} - \vec{b}$ verläuft dann von der Spitze dieses Repräsentanten von $\vec{b}$ zur Spitze dieses Repräsentanten von $\vec{a}$.

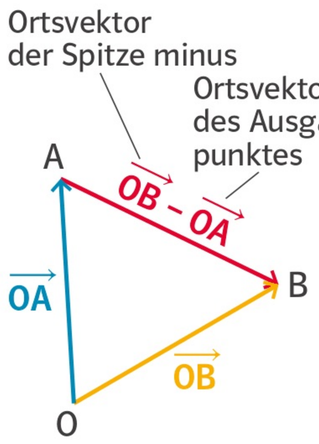




Ist ein Vektor durch die Punkte A und B gegeben, so gilt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (vgl. Randspalte).

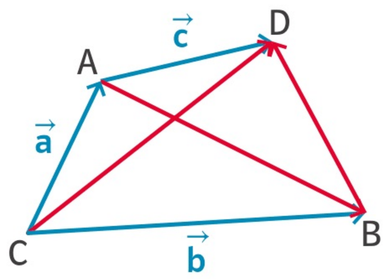
Bei der **Parallelogrammkonstruktion** lassen sich Addition und Subtraktion veranschaulichen:





Beispiel 1

Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{BD}$ sowie ihre Gegenvektoren durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.



Lösung

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ $\qquad -\overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$

$\overrightarrow{CD} = \vec{a} + \vec{c}$; $-\overrightarrow{CD} = -\vec{a} - \vec{c}$; $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \vec{c} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; $-\overrightarrow{BD} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

Beispiel 2

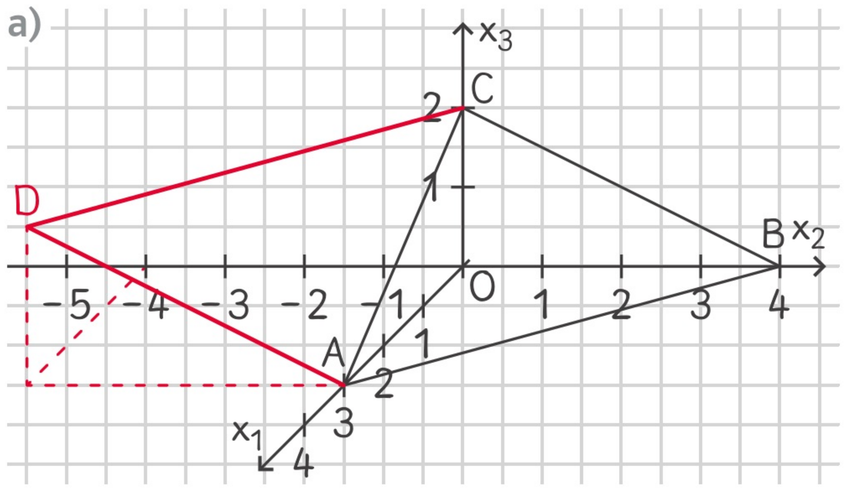
Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(3|0|0)$, $B(0|4|0)$ und $C(0|0|2)$.

a) Zeichnen Sie das Dreieck in ein dreidimensionales Koordinatensystem und ergänzen Sie es zu einem Parallelogramm ABCD.

b) Berechnen Sie die Koordinaten von D.

Lösung

a)



b) Es gilt

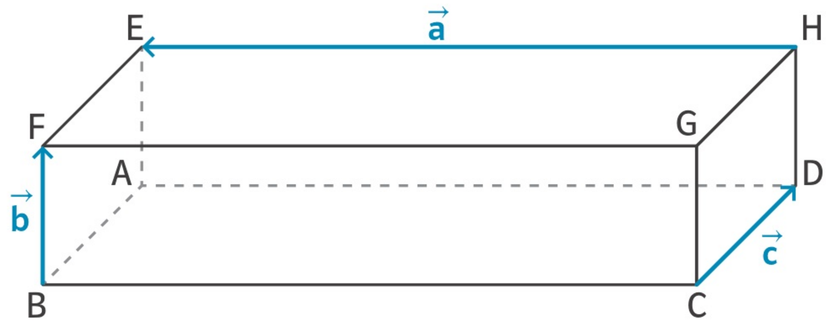
$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$, also

$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3-0 \\ 0-4 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und somit

$D(3|-4|2)$.

Aufgaben

1 Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{AG}$ und $\overrightarrow{CE}$ durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.



2 Drücken Sie durch einen einzigen Vektor aus.

a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ **b)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$ **c)** $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{RQ}$ **d)** $\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{RQ}$

e) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS}$ **f)** $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{QP}$ **g)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}$ **h)** $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{RS} - \overrightarrow{PR}$

→ Strategie | Seite 256
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

3 Zeichnen Sie fünf Punkte A, B, C, D und P in Ihr Heft. Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ und ihre Gegenvektoren durch die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{PA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{PB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{PC}$ und $\vec{d} = \overrightarrow{PD}$ aus. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse untereinander.

4 Berechnen Sie die Koordinaten des Ergebnisvektors und seinen Betrag.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right]$

5 Der Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ verschiebt A auf B. Berechnen Sie die Koordinaten des fehlenden Punktes.

a) A(2|−1|3) **b)** A(17|11|31) **c)** B(−17|11|31) **d)** B(33|−71|−181)

Test 1

→ Lösungen | Seite 297

6 Berechnen Sie für A(2|−1|5), B(3|0|3), C(−2|7|1) und D(4|4|4) die Koordinaten des Vektors

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, **b)** $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$, **c)** $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB}$, **d)** $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$.

7 **a)** Gegeben sind die Punkte A(2|−1|1), B(3|4|−2) und C(0|0|4). Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes D so, dass ABCD ein Parallelogramm ist.

b) Gegeben sind die Punkte A(0|0|0), B(1|2|3) und D(−3|1|2). Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes C so, dass ABCD eine Raute ist.

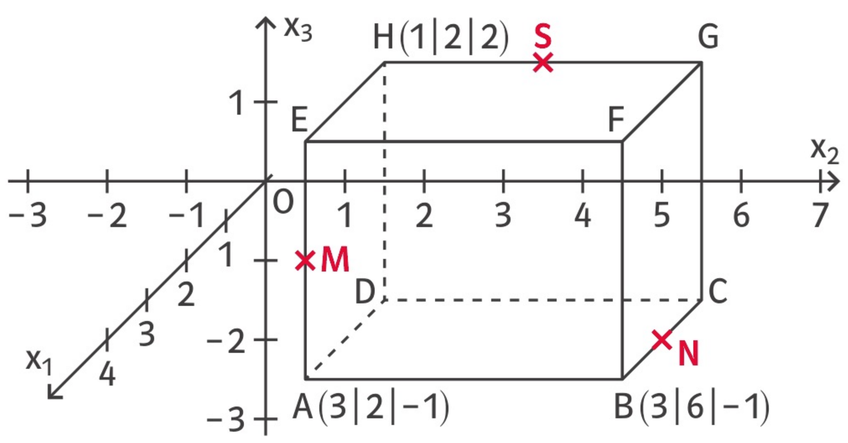
→ Strategie | Seite 256
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

8 Der Vektor $\vec{a}$ verschiebt den Punkt P auf den Punkt Q und der Vektor $\vec{b}$ verschiebt den Punkt Q auf den Punkt R. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S so, dass $\overrightarrow{OS} = \vec{a} + \vec{b}$ gilt, und bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte P', Q' und R', auf die P, Q bzw. R durch den Vektor $\vec{a} + \vec{b}$ verschoben werden. Veranschaulichen Sie zunächst in einer Skizze.

a) P(2|7|−1), Q(3|−5|9), R(2|6|−5) **b)** P(11|0|−2), Q(8|13|−5), R(5|6|7)

9 **a)** Zeichnen Sie den Quader mit einer 3D-Geometriesoftware und geben Sie die fehlenden Koordinaten der Eckpunkte des Quaders an.

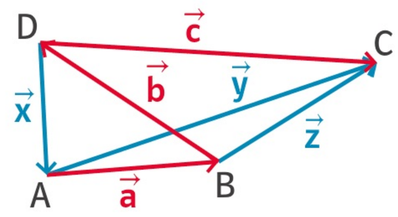
b) M ist der Mittelpunkt von $\overline{AE}$, N ist der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ und S ist der Mittelpunkt von $\overline{HG}$. Bestimmen Sie die Koordinaten der Vektoren $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MS}$ und $\overrightarrow{NS}$.



10 **a)** Vergleichen Sie anhand einiger selbst gewählter Beispiele die Werte von $|\vec{a} + \vec{b}|$ und $|\vec{a}| + |\vec{b}|$. Stellen Sie eine Vermutung für einen allgemeinen Zusammenhang auf.

b) Begründen Sie Ihre Vermutung anhand einer Skizze.

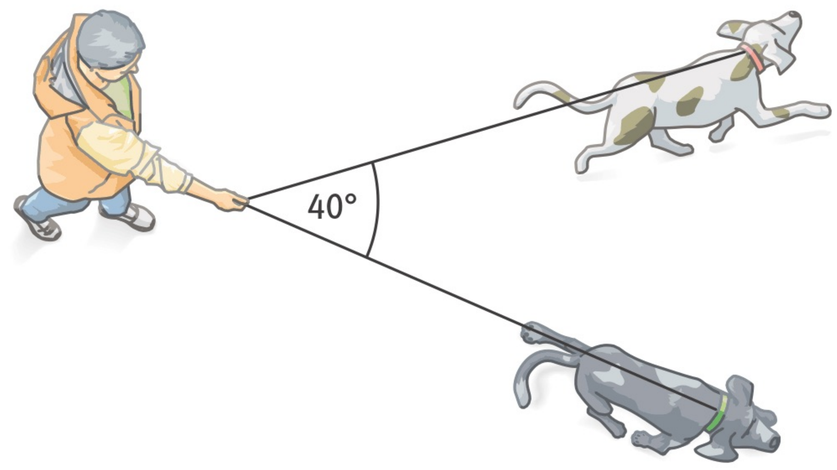
11 Drücken Sie die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in der Abbildung auf dem Rand durch die Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ aus.



12 Zeichnen Sie mit einer 3D-Geometriesoftware ein Schrägbild einer geraden Pyramide ABCDS mit quadratischer Grundfläche und drücken Sie den Vektor $\overrightarrow{CS}$ durch die Vektoren $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{DA}$ aus. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit der Software.

13 **a)** Bestimmen Sie die Richtung, in die der Mann von den beiden Hunden gezogen wird, wenn jeder Hund mit der gleichen Kraft (der obere Hund mit der doppelten Kraft) zieht. Stellen Sie die resultierende Kraft jeweils mithilfe eines Vektors dar.

b) Geben Sie die Größe des Winkels zwischen den Hunden an, bei dem der Mann mit der geringsten Kraft gezogen wird.



Kräfte können mithilfe von Vektoren dargestellt werden. Hierbei entspricht der Betrag des Vektors dem Betrag der Kraft. Greifen zwei Kräfte im selben Punkt an, so können sie durch eine Kraft ersetzt werden, deren Vektor sich als Summe der beiden Vektoren ergibt.

14 Ein Heißluftballon ist bei Immenstaad am Bodensee gestartet und nach ca. einer Stunde bei Kesswil in der Schweiz gelandet (vgl. Pfeil). Während dieser Fahrt in ca. 1500 m Höhe waren Windrichtung und Windgeschwindigkeit konstant.

a) Beschreiben Sie die Fahrt mithilfe eines Vektors. Sie können hierzu eine durchsichtige Folie auf die Karte legen und ein Koordinatensystem zeichnen.

b) Geben Sie an, wo nach einer Stunde Fahrt bei gleichen Windbedingungen ein Heißluftballon landen würde, der in Meersburg (Wasserburg) gestartet ist.

c) Geben Sie die Vektoren für einstündige Fahrten mit Heißluftballonen bei doppelter Windgeschwindigkeit und umgekehrter Windrichtung an.

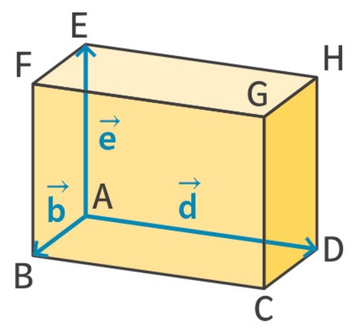
Test 2

→ Lösungen | Seite 298

15 Ein Quader ABCDEFGH ist gegeben. Es seien $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{e} = \overrightarrow{AE}$.

a) Drücken Sie $\overrightarrow{AG}$ und $\overrightarrow{FD}$ durch die Vektoren $\vec{b}$, $\vec{d}$ und $\vec{e}$ aus.

b) Addieren Sie die beiden Vektorterme für $\overrightarrow{AG}$ und $\overrightarrow{FD}$ aus Teilaufgabe a) und vereinfachen Sie so weit wie möglich.
Erklären Sie das Ergebnis anschaulich anhand der Abbildung.



16 Die Repräsentanten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind gleich lang. Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den ein Repräsentant von $\vec{a}$ und einer von $\vec{b}$ einschließen, wenn ein Repräsentant von $\vec{a} + \vec{b}$ genau $\sqrt{2}$-mal so lang ist wie ein Repräsentant von $\vec{a}$.

Grundwissen Test

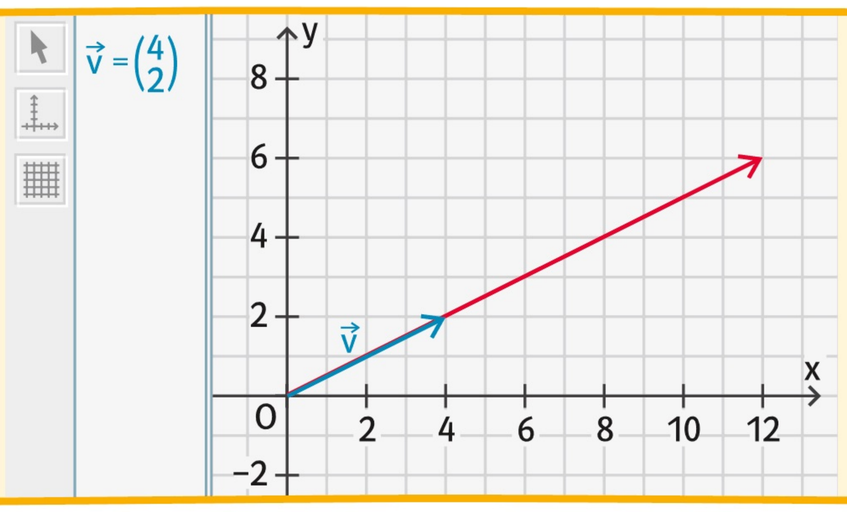
→ Lösungen | Seite 298

G 17 Gegeben sind die linearen Funktionen $f: x \mapsto 3x + 4$ und $g: x \mapsto -\frac{3}{10}x - 1$. Zeichnen Sie die Graphen von f und g in ein Koordinatensystem. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Graphen und prüfen Sie, ob diese zueinander senkrecht sind.

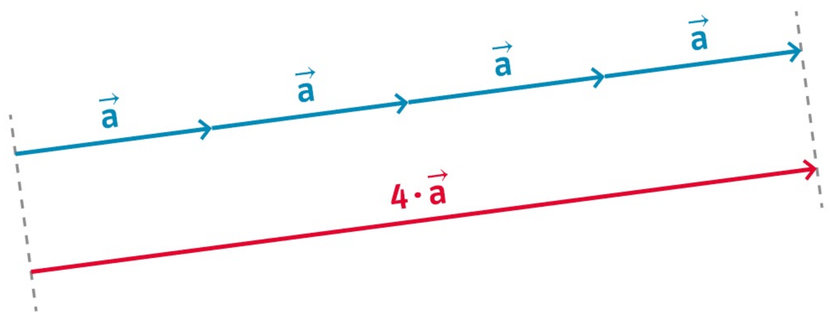
→ Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

4 Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl (S-Multiplikation)

Kann man eine Zahl mit einem Vektor multiplizieren, z. B. $3 \cdot \vec{v}$? Eine dynamische Geometriesoftware liefert die gezeigte Darstellung. Erläutern Sie diese.



Die Abbildung veranschaulicht die Summe $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$ aus vier Summanden.
Dieser (und damit jeder) Repräsentant des Summenvektors ist viermal so lang wie der Repräsentant von $\vec{a}$. Außerdem ist er parallel und gleich gerichtet zum Repräsentanten von $\vec{a}$.
Den Summenvektor bezeichnet man deshalb mit $4 \cdot \vec{a}$.
Dies ist ein Beispiel für die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl.



Zahlen werden im Unterschied zu Vektoren auch als **Skalare** bezeichnet. Man spricht deshalb auch von **skalarer Multiplikation**, kurz **S-Multiplikation**.

Durch Multiplikation mit Zahlen werden Vektoren gestreckt oder gestaucht, man sagt auch **skaliert**.

Definition (S-Multiplikation): Für einen Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ und eine reelle Zahl $r \neq 0$ bezeichnet man mit $\mathbf{r \cdot \vec{a}}$ den Vektor, dessen Repräsentanten

- $|r|$-mal so lang wie die Repräsentanten von $\vec{a}$ sind,
- parallel zu den Repräsentanten von $\vec{a}$ sind,
- gleich gerichtet zu den Repräsentanten von $\vec{a}$ sind, falls $r > 0$ ist, und entgegengesetzt gerichtet zu den Repräsentanten von $\vec{a}$ sind, falls $r < 0$ ist.

Außerdem definiert man $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ und $r \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

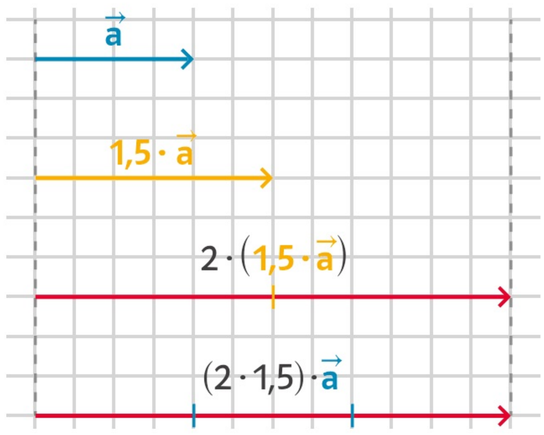
Bemerkungen:

(1) $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$, d. h., es ergibt sich der Nullvektor und nicht die Zahl Null.
(2) $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$, d. h., den Gegenvektor zu $\vec{a}$ erhält man durch Multiplikation mit -1.
(3) Da die Repräsentanten von $r \cdot \vec{a}$ genau $|r|$-mal so lang sind wie die von $\vec{a}$, gilt $|r \cdot \vec{a}| = |r| \cdot |\vec{a}|$.

$|r \cdot \vec{a}| = |r| \cdot |\vec{a}|$ wird in Aufgabe 10 rechnerisch bewiesen.

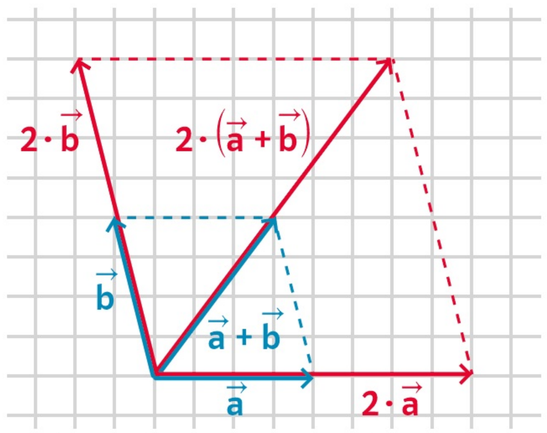
Es gelten die in den Abbildungen veranschaulichten **Rechengesetze der S-Multiplikation**.

Assoziativgesetz

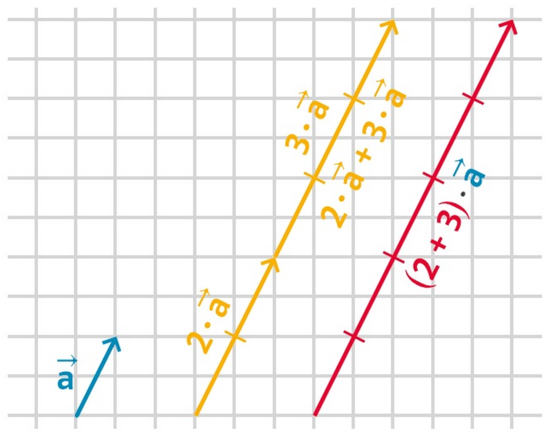


$r \cdot (s \cdot \vec{a}) = (r \cdot s) \cdot \vec{a}$

Distributivgesetze



$r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$



$(r + s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a}$

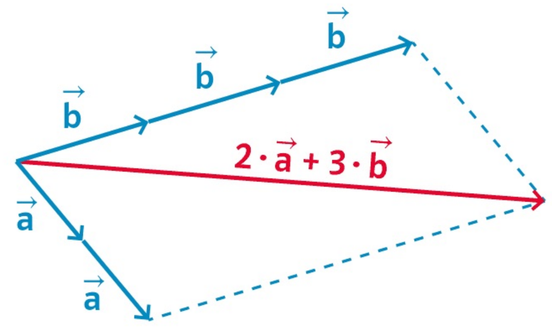
Beachten Sie bei den Distributivgesetzen:
$(\vec{a} + \vec{b})$ ist ein Vektor.
$(r + s)$ ist eine Zahl.

Kennt man die Koordinaten von $\vec{a}$ und die Zahl r, so kann man die Koordinaten von $r \cdot \vec{a}$ berechnen. (Dies wird in Aufgabe 6 begründet.)

S-Multiplikation in Koordinatendarstellung: Für einen Vektor $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und eine reelle Zahl r gilt

$$r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}.$$

Einen Term der Form $r_1 \cdot \vec{v_1} + r_2 \cdot \vec{v_2} + \ldots + r_n \cdot \vec{v_n}$ $(n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ nennt man eine **Linearkombination** der Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$; die reellen Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_n$ heißen **Koeffizienten**.
Beispielsweise ist $2 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b}$ eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.



Ein Vektor mit dem Betrag 1 heißt **Einheitsvektor**. Für $\vec{a} \neq \vec{0}$ gilt $\left| \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} \right| = 1$. Man kann also jeden vom Nullvektor verschiedenen Vektor zu einem Einheitsvektor skalieren.

Für $\vec{a} \neq \vec{0}$ bezeichnet man mit $\vec{a_0}$ den zu $\vec{a}$ gehörenden Einheitsvektor und es gilt $\vec{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$.
Der Vektor $\vec{a_0}$ zeigt in dieselbe Richtung wie $\vec{a}$.

Beispiel 1

Berechnen Sie die Koordinaten und den Betrag des Vektors.

a) $5 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 1{,}6 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ b) $\frac{2}{3} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$ c) $5 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ d) $0{,}25 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösung

a) $5 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 1{,}6 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 0{,}2 \\ 5 \cdot 1{,}6 \\ 5 \cdot \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}; \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + 8^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 64 + 9} = \sqrt{74}$

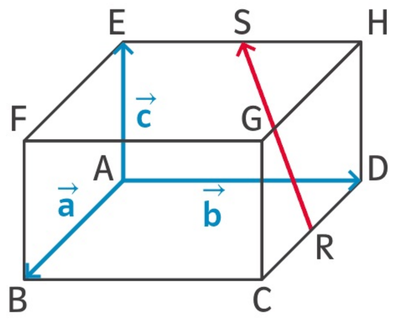
b) $\frac{2}{3} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{14}$

c) $5 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{3}} \\ \frac{5}{\sqrt{3}} \\ \frac{5}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}; \left| 5 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right| = |5| \cdot \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right| = 5 \cdot \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 5 \cdot 1 = 5$

d) $0{,}25 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \left(0{,}25 + \frac{3}{4} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}; \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 0 + 16} = \sqrt{25} = 5$

Beispiel 2

R und S sind Kantenmitten des Quaders ABCDEFGH. Stellen Sie den Vektor $\overrightarrow{RS}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar. Suchen Sie dazu eine Vektorkette, die von R nach S führt. Suchen Sie eine zweite Vektorkette und zeigen Sie, dass sie zum gleichen Ergebnis führt.



Veranschaulicht man die Addition von Vektoren durch Aneinanderhängen von Repräsentanten, so spricht man auch von einer Vektorkette.

Lösung

1. Möglichkeit: $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HS} = -0{,}5 \cdot \vec{a} + \vec{c} - 0{,}5 \cdot \vec{b}$
2. Möglichkeit: $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HS} = 0{,}5 \cdot \vec{a} + \vec{c} - \vec{a} - 0{,}5 \cdot \vec{b} = -0{,}5 \cdot \vec{a} + \vec{c} - 0{,}5 \cdot \vec{b}$

Aufgaben

1 Berechnen Sie die Koordinaten und den Betrag des Vektors.

a) $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ **b)** $\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ -3 \end{pmatrix}$ **c)** $7 \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{28} \\ \frac{4}{7} \\ -\frac{6}{35} \end{pmatrix}$ **d)** $(-3) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$

2 Schreiben Sie als Produkt aus einer reellen Zahl und einem Vektor mit ganzzahligen Koordinaten.

a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 5 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ 36 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 12 \\ -\frac{5}{6} \\ -0{,}125 \end{pmatrix}$

3 Berechnen Sie die Koordinaten und den Betrag des Ergebnisvektors.

a) $3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ **b)** $2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

4 Bestimmen Sie, falls möglich, eine reelle Zahl x so, dass gilt:

a) $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, **b)** $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, **c)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$, **d)** $x \cdot \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Test 1

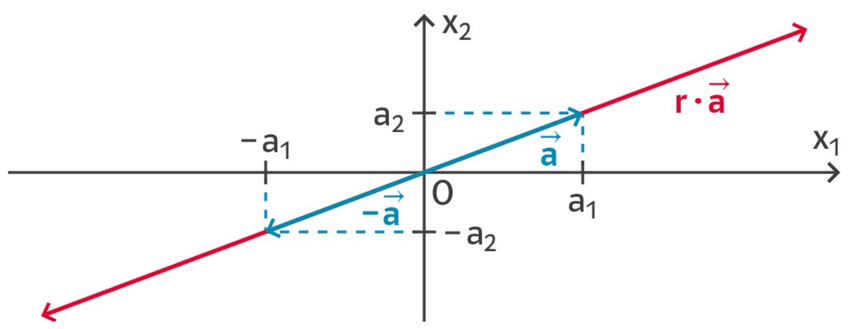
Lösungen | Seite 298

5 Berechnen Sie die Koordinaten und den Betrag des Ergebnisvektors.

a) $5 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0{,}4 \\ -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$ **b)** $\frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ **c)** $\frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$ **d)** $\sqrt{14} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

6 Begründen Sie anhand der Abbildung mithilfe des Strahlensatzes die Regel $r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \end{pmatrix}$.

Unterscheiden Sie dabei die Fälle $r > 0$ und $r < 0$.



7 Vereinfachen Sie.

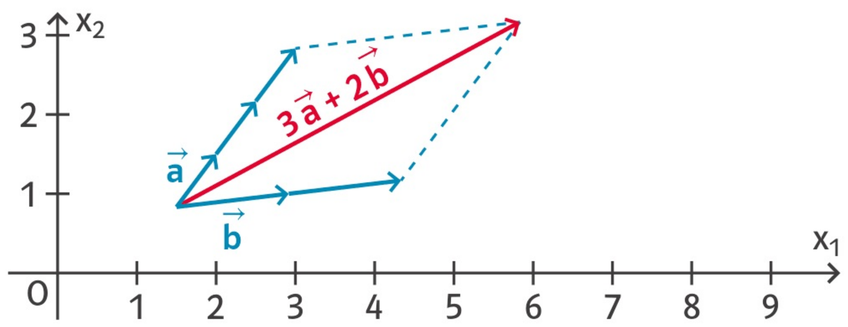
a) $7 \cdot \vec{a} + 5 \cdot \vec{a} - 12 \cdot \vec{a}$ **b)** $6 \cdot \vec{a} + 7 \cdot \vec{b} - 2 \cdot \vec{c} + 17 \cdot \vec{a} - 9 \cdot \vec{c} + \vec{b} - \vec{a}$

c) $2 \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{a} - (-\vec{a} - \vec{b})$ **d)** $7 \cdot \vec{u} + 5 \cdot (\vec{u} - 2 \cdot (\vec{u} + \vec{v}))$

8 Stellen Sie die Linearkombination zeichnerisch dar. Die Abbildung zeigt ein Beispiel.

a) $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 7 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} - 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$



9 Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort. Korrigieren Sie falsche Aussagen.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ **b)** $\vec{a} - \vec{a} = 0$ **c)** $0 \cdot \vec{a} = 0$ **d)** $a \cdot \vec{0} = \vec{0}$

e) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ **f)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$ **g)** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ **h)** $|r \cdot \vec{a}| = r \cdot |\vec{a}|$

10 Beweisen Sie rechnerisch, dass $|r \cdot \vec{a}| = |r| \cdot |\vec{a}|$ für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt.

11 In einem Koordinatensystem entspricht die x_1x_2-Ebene der Meeresoberfläche. Ein Tauchboot befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Position $S(3|1|-2)$ (t in h, 1 LE entspricht 1 km) und bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von $3\,\frac{km}{h}$ in Richtung des Vektors $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

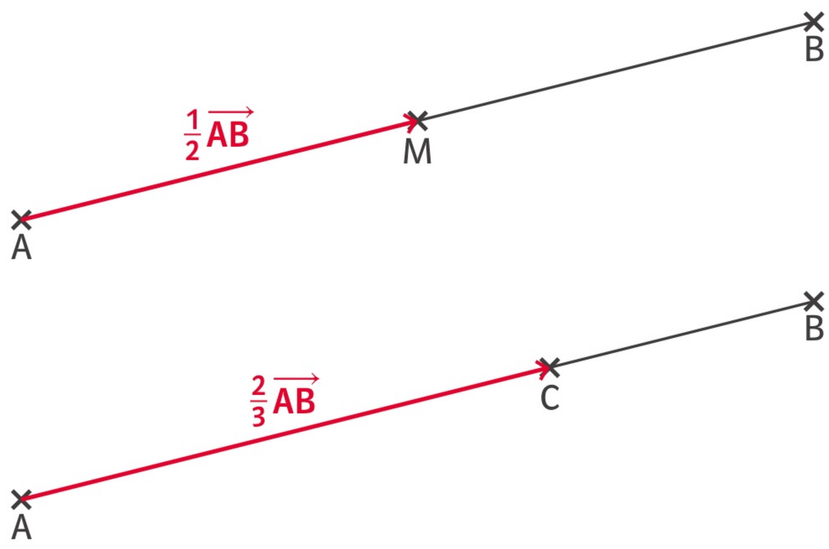
Bestimmen Sie, wo sich das Tauchboot zum Zeitpunkt $t = 2$ befinden wird.

12 Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im Raum. Drücken Sie mithilfe von $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ aus, wie groß $|\vec{a} + \vec{b}|$ mindestens und höchstens sein kann. Begründen Sie Ihre Antwort mithilfe einer Skizze.

13 **a)** M ist der Mittelpunkt der Strecke AB.
Beweisen Sie, dass $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$ gilt.
Hinweis: Beachten Sie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

b) C teilt die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis 2:1, d.h., C liegt auf $\overline{AB}$ und es ist $2 \cdot |\overline{CB}| = |\overline{AC}|$.
Beweisen Sie, dass $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ gilt.

c) D teilt die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis p:q.
Beweisen Sie $\overrightarrow{OD} = \frac{p}{p+q}\overrightarrow{OB} + \frac{q}{p+q}\overrightarrow{OA}$.

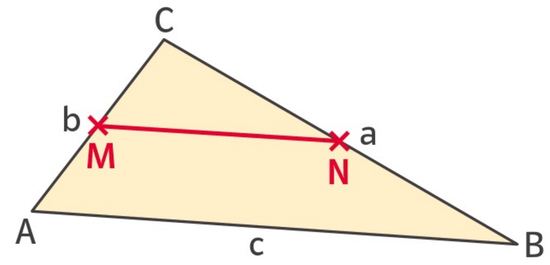


Man nennt den Punkt C, der eine Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis 2:1 teilt, auch den 2:1-Teilungspunkt der Strecke $\overline{AB}$.

→ Strategie | Seite 256
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

14 Gegeben sind die Punkte $A(-2|-3|2)$, $B(2|3|2)$ und $C(-4|-1|4)$.
a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Seitenmitten des Dreiecks ABC und fertigen Sie eine Zeichnung an.
b) Beschreiben Sie die besondere Lage der Seite $\overline{AB}$ und des Mittelpunktes dieser Seite.

15 In einem Dreieck ABC sind M und N die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$. Begründen Sie mithilfe von Vektoren: Die Strecke $\overline{MN}$ ist parallel zur Dreiecksseite $\overline{AB}$ und halb so lang wie diese.

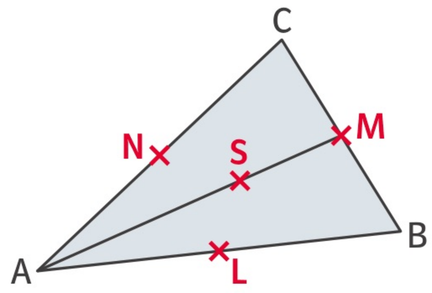


Test 2

→ Lösungen | Seite 298

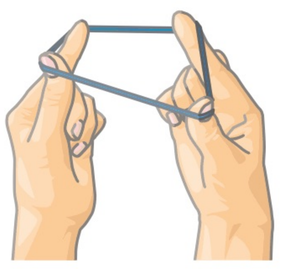
16 **a)** In einem Dreieck ABC ist M der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ und S teilt die Strecke $\overline{AM}$ im Verhältnis 2:1. Beweisen Sie, dass $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$ gilt.

b) Beweisen Sie, dass sich die drei Seitenhalbierenden in einem beliebigen Dreieck in einem Punkt schneiden.



Man nennt $\overline{AM}$ eine Seitenhalbierende von ABC.

17 **a)** Zeichnen Sie ein beliebiges Viereck in der Ebene mit seinen Seitenmitten und begründen Sie mithilfe von Kenntnissen der Mittelstufe, dass die Seitenmitten ein Parallelogramm bilden.
b) Beweisen Sie mithilfe von geeigneten Vektoren, dass die Seitenmitten des Vierecks aus Teilaufgabe a) ein Parallelogramm bilden.
c) Diskutieren Sie die Vor- und Nachteile der Lösungswege in den Teilaufgaben a) und b).
d) Hält man ein Gummiband wie in der Abbildung, so entsteht ein „Viereck" im Raum, also ein Viereck, dessen Eckpunkte nicht alle in einer Ebene liegen müssen. Gilt der Beweis aus Teilaufgabe b) auch für ein „Viereck" im Raum? Begründen Sie Ihre Antwort.



Grundwissen Test

→ Lösungen | Seite 298

G 18 Berechnen Sie die Werte der beiden Variablen, z.B. mit dem Einsetzungsverfahren.

a) (I) $2x - 5y = 4$
(II) $6x - 3 = 6y$

b) (I) $x^2 = r^2 + 100$
(II) $x - r = 2$

c) (I) $\frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = 10$
(II) $\frac{1}{3} \cdot h^2 \cdot a = 60$

d) (I) $a \cdot e^k = 4\sqrt{e}$
(II) $a \cdot e^{2k} = 4e$

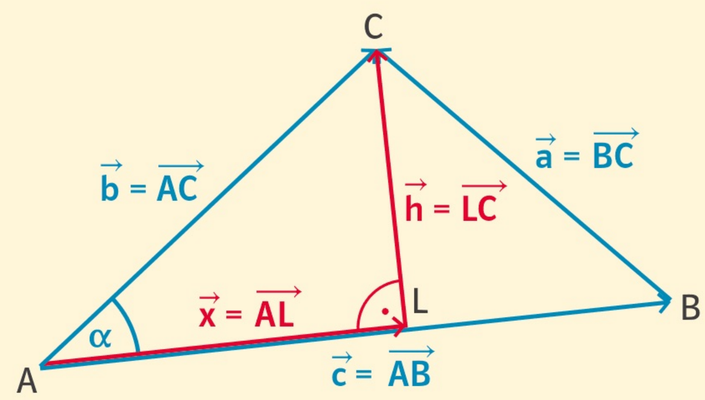
5 Skalarprodukt und Winkelgrößen

Gegeben ist das abgebildete Dreieck ABC mit $|\vec{b}| = 3{,}5$, $|\vec{c}| = 4{,}8$ und $\alpha = 37{,}35°$.

a) Berechnen Sie die Beträge der Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{h}$.

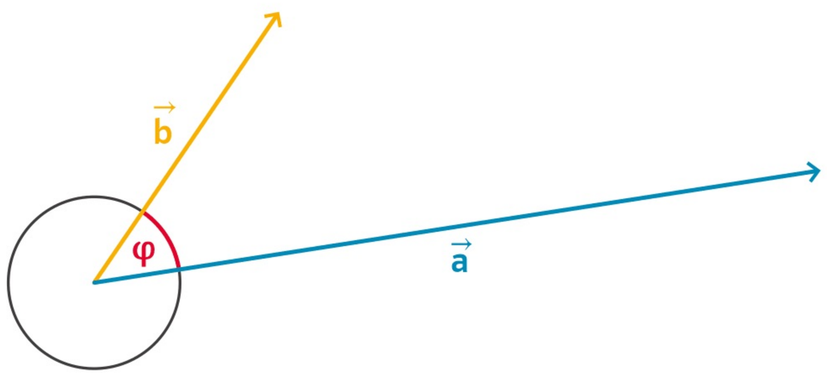
b) Berechnen Sie den Betrag des Vektors $\vec{a}$.

c) Beschreiben Sie eine Möglichkeit, $|\vec{a}|$ allein über $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$ und α auszurechnen.



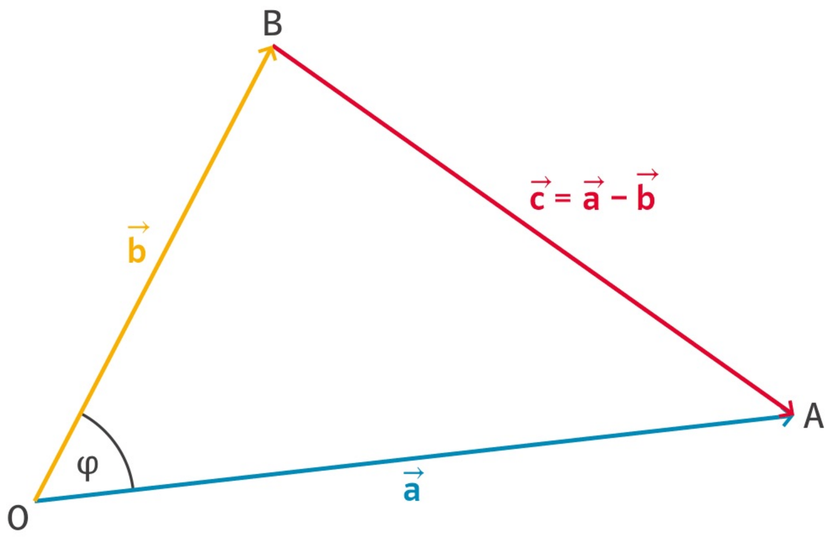
Im Folgenden geht es um Winkel zwischen Vektoren. Damit man überhaupt von einem Winkel sprechen kann, werden nur vom Nullvektor verschiedene Vektoren betrachtet.

Unter dem **Winkel φ zwischen den Vektoren** $\vec{a}$ und $\vec{b}$ versteht man den kleineren der beiden Winkel zwischen einem Repräsentanten von $\vec{a}$ und einem Repräsentanten von $\vec{b}$ mit gleichem Ausgangspunkt. Also gilt $0° \le \varphi \le 180°$.
Der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stimmt mit dem Winkel zwischen $\vec{b}$ und $\vec{a}$ überein.



Einen Zusammenhang zwischen den Seitenlängen des Dreiecks OAB und dem Winkel φ stellt der Kosinussatz her:
$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$.

Den Term $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ nennt man das **Skalarprodukt** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und schreibt dafür $\vec{a} \circ \vec{b}$. Die Bezeichnung Skalarprodukt erinnert daran, dass $\vec{a} \circ \vec{b}$ kein Vektor, sondern ein Skalar ist, d.h. eine reelle Zahl.



Zur Erinnerung:
Kosinussatz:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

Beachten Sie den Unterschied:
Skalarprodukt: $\vec{a} \circ \vec{b}$
Multiplikation mit einem Skalar: $r \cdot \vec{a}$

Definition: Ist φ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$, so heißt die reelle Zahl $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ das **Skalarprodukt** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Das Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{b}$ lässt sich auch direkt aus den Koordinaten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnen, wie im Folgenden gezeigt wird. Die Gleichung $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ lässt sich umformen zu $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ $\left(\vec{a} \neq \vec{0} \text{ und } \vec{b} \neq \vec{0}\right)$. Einsetzen liefert

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \circ \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi \\
&= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2 - (a_3 - b_3)^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - \left(a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2\right) - \left(a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2\right) - \left(a_3^2 - 2a_3b_3 + b_3^2\right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[2a_1b_1 + 2a_2b_2 + 2a_3b_3 \right] \\
&= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.
\end{aligned}
$$

Koordinatenform des Skalarprodukts:

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ gilt

$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gilt

$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

Beachten Sie:
Da in der Koordinatenform kein Winkel auftritt, erweitern wir unsere Definition folgendermaßen:
$\vec{a} \circ \vec{0} = \vec{0} \circ \vec{a} = 0$.

Die Größe des Winkels zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ lässt sich direkt aus ihren Koordinaten berechnen. Man kann dazu die Gleichung $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ umstellen zu

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Aus dem Wert von $\cos\varphi$ erhält man die Größe des Winkels φ, indem man auf dem Taschenrechner die Taste $\cos^{-1}$ verwendet (vgl. Beispiel 2).

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen zueinander orthogonal (senkrecht), wenn sie einen Winkel von 90° einschließen. Man schreibt $\vec{a} \perp \vec{b}$. Es gilt

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = 90° \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Beachten Sie:
Es wurde $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ und $0° \leq \varphi \leq 180°$ vorausgesetzt.

Satz: Zwei Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ sind genau dann zueinander orthogonal, wenn $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$ gilt.

orthos (gr.): richtig
gonia (gr.): Ecke

Sonderfälle beim Skalarprodukt:

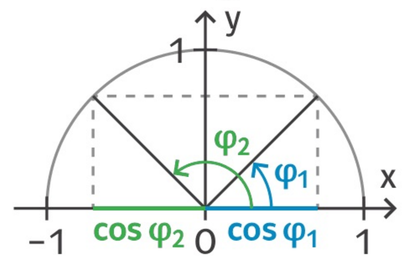
(1) Für $0° < \varphi < 90°$ gilt $\cos\varphi > 0$, also $\vec{a} \circ \vec{b} > 0$.

(2) Für $90° < \varphi < 180°$ gilt $\cos\varphi < 0$, also $\vec{a} \circ \vec{b} < 0$.

(3) Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel und gleich gerichtet, also $\varphi = 0°$, so gilt
$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(0°) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 1 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
Insbesondere gilt $\vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}|^2$, also $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$.

(4) Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel und entgegengesetzt gerichtet, also $\varphi = 180°$, so gilt
$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(180°) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot (-1) = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Zur Erinnerung:



$\cos(\varphi_1) > 0$ und $\cos(\varphi_2) < 0$

Für die Multiplikation reeller Zahlen gilt eine Reihe von Rechengesetzen, u.a. das Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz und in Verbindung mit der Addition das Distributivgesetz.
Ein Assoziativgesetz gilt jedoch nicht für das Skalarprodukt:
$(\vec{a} \circ \vec{b}) \circ \vec{c}$ ist kein sinnvoller Term, da das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eine Zahl ergibt, für die also kein Skalarprodukt mit $\vec{c}$ gebildet werden kann.

Für das Skalarprodukt von Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gelten folgende **Rechengesetze**:

(1) $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$ **(Kommutativgesetz)**

(2) $(r \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = r \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) = \vec{a} \circ (r \cdot \vec{b})$ für jede reelle Zahl r

(3) $(\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{c} = \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c}$ **(Distributivgesetz)**

(4) $\vec{a} \circ \vec{a} \geq 0$, wobei $\vec{a} \circ \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Zur Begründung der Rechengesetze: vgl. Aufgabe 14.

Beispiel 1

Berechnen Sie $\vec{a} \circ \vec{b}$ und entscheiden Sie, ob der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ größer oder kleiner als 90° ist.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Lösung

a) $\vec{a} \circ \vec{b} = 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 = 5 > 0$. Also ist der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kleiner als 90°.

b) $\vec{a} \circ \vec{b} = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 + 5 \cdot (-3) = -9 < 0$. Also ist der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ größer als 90°.

Beispiel 2

In einem Koordinatensystem mit der Einheit Meter sind die Punkte $A(4{,}2|0{,}6|1{,}9)$, $B(0{,}2|-0{,}3|2{,}7)$ und $C(0{,}1|3{,}9|2{,}2)$ Ankerpunkte eines Sonnensegels. Bestimmen Sie die Größe des Winkels $\varphi = \sphericalangle ABC$.

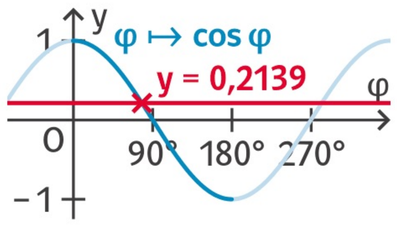
Lösung

Der Winkel φ wird eingeschlossen von

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0{,}9 \\ -0{,}8 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 4{,}2 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Also gilt $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{4 \cdot (-0{,}1) + 0{,}9 \cdot 4{,}2 + (-0{,}8) \cdot (-0{,}5)}{\sqrt{4^2 + 0{,}9^2 + (-0{,}8)^2} \cdot \sqrt{(-0{,}1)^2 + 4{,}2^2 + (-0{,}5)^2}} \approx 0{,}2139$. Man erhält $\varphi \approx 77{,}7°$.

Zwischen 0° und 360° gibt es zwei verschiedene Werte für φ mit $\cos\varphi \approx 0{,}2139$. Zwischen 0° und 180° gibt es genau einen solchen Wert für φ. Dies ist der Wert, den die Taste $\cos^{-1}$ auf dem Taschenrechner liefert.



Beispiel 3

Gegeben ist das Viereck ABCD mit $A(-1|2|1)$, $B(2|3|2)$, $C(3|6|3)$ und $D(0|5|2)$. Zeigen Sie, dass dieses Viereck eine Raute, aber kein Quadrat ist.

Lösung

Es gilt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-(-1) \\ 3-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ 6-5 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AB}} = \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{11}$,

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 6-3 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0-(-1) \\ 5-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC}$ und $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{\overrightarrow{AD} \circ \overrightarrow{AD}} = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$.

Es gilt $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$. Damit sind alle vier Seiten gleich lang, womit gezeigt ist, dass ABCD eine Raute ist. Weiter gilt $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = 3 + 3 + 1 \neq 0$. Also sind benachbarte Seiten nicht zueinander senkrecht, weshalb ABCD kein Quadrat ist.

Aufgaben

1 Berechnen Sie den Wert des Skalarprodukts.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 \\ -0 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

2 Gegeben sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie.

a) $\vec{a} \circ \vec{b}$ b) $\vec{a} \circ \vec{c}$ c) $\vec{b} \circ \vec{c}$ d) $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c})$

e) $\vec{a} \circ (\vec{b} - \vec{c})$ f) $\vec{b} \circ (\vec{a} + \vec{c})$ g) $\vec{c} \circ (\vec{a} + \vec{b})$ h) $(\vec{a} + \vec{b}) \circ (\vec{b} - \vec{c})$

3 Ermitteln Sie die Größe des Winkels zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \pi \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

→ Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

4 Prüfen Sie, welche der Vektoren zueinander orthogonal sind.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

5 Gegeben sind die Punkte $A(1|2|3)$, $B(-4|1|1)$, $C(-5|2|3)$ und $D(-1|-4|5)$.

a) Bestimmen Sie die Längen der Seiten und die Größen der Winkel im Dreieck ABC sowie seinen Flächeninhalt.

b) Entscheiden Sie, ob das Dreieck ABD rechtwinklig, spitzwinklig oder stumpfwinklig ist, ohne die Größen seiner Innenwinkel zu berechnen.

Test 1

→ Lösungen | Seite 298

6 Berechnen Sie die Längen der Seiten und die Größen der Winkel im Dreieck ABC und beschreiben Sie die Art des Dreiecks (stumpfwinklig, rechtwinklig, gleichschenklig, gleichseitig …).

a) $A(8|1|-3)$, $B(17|-5|-3)$, $C(10|9|-3)$ **b)** $A(3|1|2)$, $B(5|0|4)$, $C(4|3|0)$

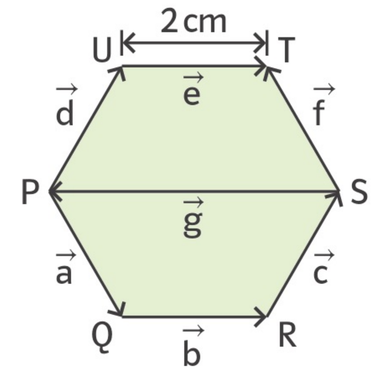
7 Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten so, dass $\vec{a} \perp \vec{b}$ gilt.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ -4 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

8 Ein Produkt aus zwei reellen Zahlen ist genau dann gleich null, wenn mindestens einer der Faktoren gleich null ist. Beurteilen Sie, inwieweit sich diese Regel auf das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren übertragen lässt.

$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oder $b = 0$

9 Berechnen Sie für das regelmäßige Sechseck PQRSTU (vgl. Rand) $\vec{a} \circ \vec{d}$, $\vec{a} \circ \vec{g}$, $\vec{d} \circ \vec{g}$, $\vec{e} \circ \vec{g}$ und $\vec{b} \circ \vec{e}$.

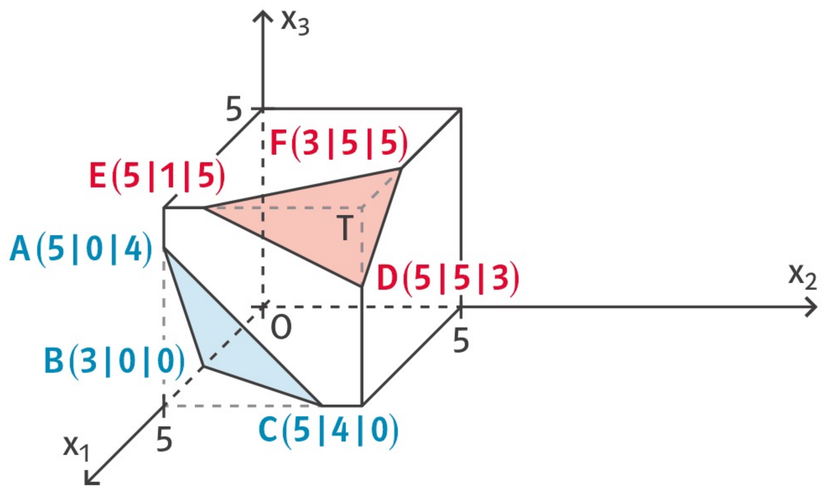


10 Gegeben ist der abgebildete Würfel mit den eingezeichneten Punkten.

a) Berechnen Sie die Längen der Seiten und die Größen der Winkel des Dreiecks ABC.

b) Berechnen Sie die Längen der Seiten und die Größen der Winkel des Dreiecks EDF.

c) Berechnen Sie die Längen der Seiten und die Größen der Winkel sowie den Flächeninhalt des Dreiecks EFT.



11 Entscheiden Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Antwort.

a) Wenn $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$ gilt, dann ist $\vec{a} \perp \vec{b}$.

b) Wenn $\vec{a} \perp \vec{b}$ gilt, dann ist $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$.

c) Wenn $(\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{c} = \vec{a} \circ \vec{c}$ gilt, dann ist $\vec{b} = \vec{0}$.

d) Wenn $\vec{a} \perp \vec{b}$ gilt, dann ist $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a} \circ \vec{a} + \vec{b} \circ \vec{b}$.

12 Ein Quader ABCDEFGH hat als Grundfläche ein Rechteck mit den Seitenlängen 8 cm und 5 cm. Die Länge der Höhe des Quaders beträgt 3 cm. M ist der Schnittpunkt der Raumdiagonalen.

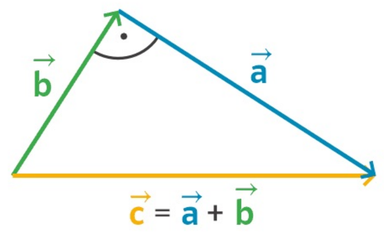
a) Zeichnen Sie den Quader mit einer 3D-Geometriesoftware so in ein Koordinatensystem, dass möglichst viele Eckpunkte auf den Koordinatenachsen liegen.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten von M und berechnen Sie die Größen der Winkel ∢AMB und ∢BMC.

c) Berechnen Sie die Längen der Raumdiagonalen des Quaders.

d) Berechnen Sie die Größen der Winkel, welche die Raumdiagonale jeweils mit den Seitenflächen des Quaders einschließt.

13 Beweisen Sie anhand der Abbildung auf dem Rand den Satz des Pythagoras.



14 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

Begründen Sie durch eine Rechnung die folgenden Gesetze für das Skalarprodukt.

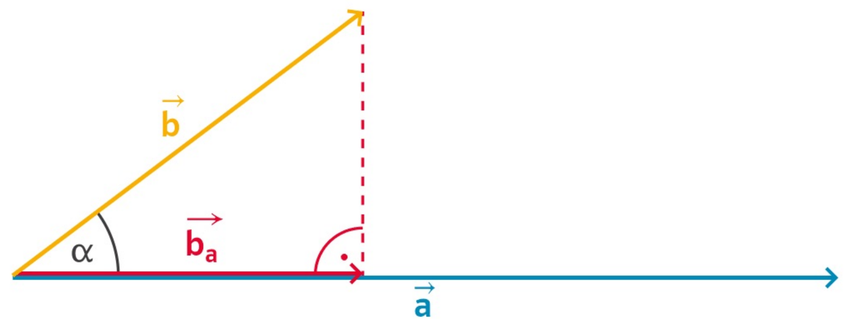
(1) $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$ (Kommutativgesetz)

(2) $(r \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = r \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) = \vec{a} \circ (r \cdot \vec{b})$ für alle $r \in \mathbb{R}$.

(3) $(\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{c} = \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c}$ (Distributivgesetz)

Vergleichen Sie dazu die ausmultiplizierten Terme beider Seiten.

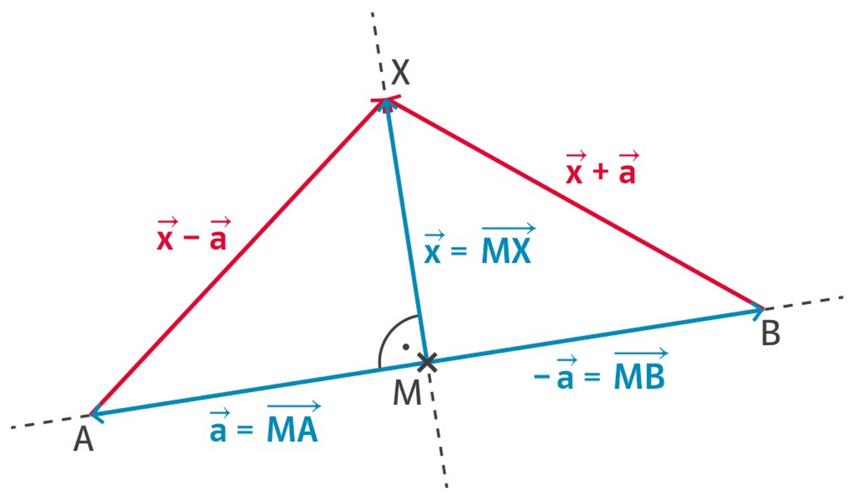
15 Den Vektor $\overrightarrow{b_a}$ bezeichnet man als senkrechte Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$.
Begründen Sie, dass $\left|\overrightarrow{b_a}\right| = \left|\overrightarrow{a_0} \circ \vec{b}\right|$ und $\overrightarrow{b_a} = \left(\overrightarrow{a_0} \circ \vec{b}\right) \cdot \overrightarrow{a_0}$ gilt. Hierbei bezeichnet $\overrightarrow{a_0}$ den zu $\vec{a}$ gehörenden Einheitsvektor, d.h. $\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$.



16 Gegeben sind eine Strecke $\overline{AB}$, ihr Mittelpunkt M und ein von M verschiedener Punkt X.

a) Beweisen Sie anhand der Abbildung: Die Gerade MX ist genau dann senkrecht zur Geraden AB, wenn X denselben Abstand zu A und B hat.

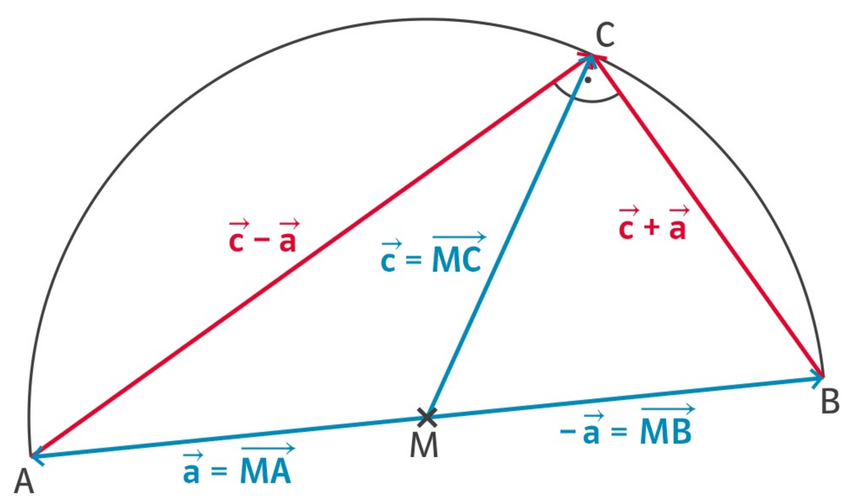
b) Beweisen Sie dieselbe Aussage mit den Methoden der Mittelstufe, d.h. ohne Vektorrechnung.



17 Gegeben sind ein Dreieck ABC und der Mittelpunkt M von $\overline{AB}$. Der Satz des Thales besagt: Der Punkt C liegt genau dann auf dem Kreis um M durch A, wenn das Dreieck ABC bei C rechtwinklig ist.

a) Beweisen Sie den Satz des Thales mithilfe des Skalarprodukts.

b) Beweisen Sie den Satz des Thales mit den Methoden der Mittelstufe, d.h. ohne Vektorrechnung.



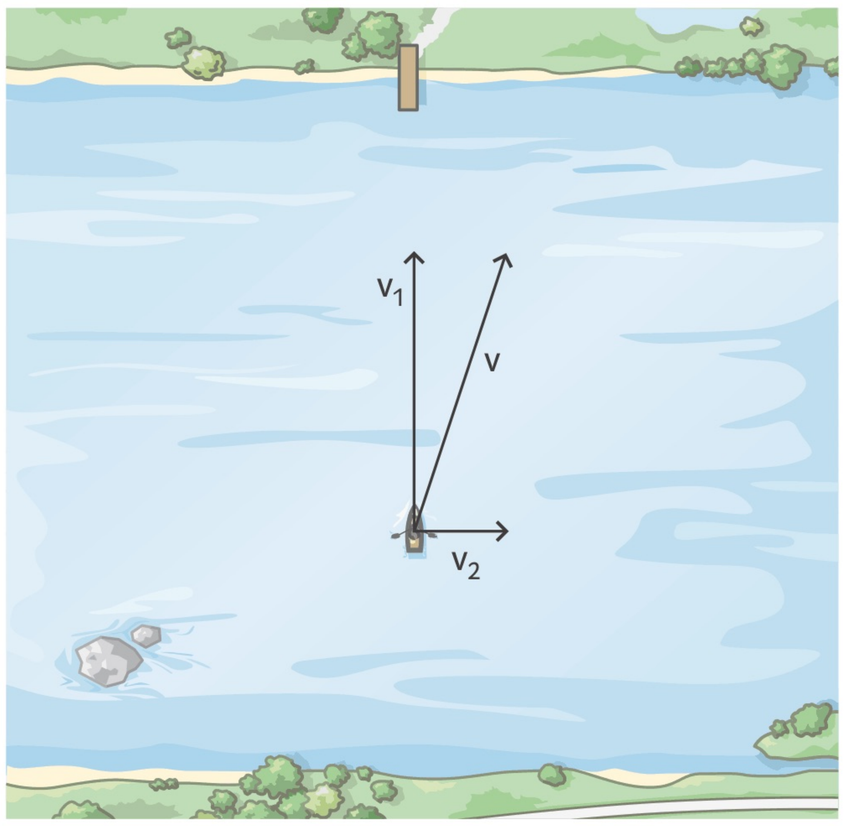
18 Ein Boot steuert mit einer Geschwindigkeit von $1{,}5\,\frac{m}{s}$ senkrecht zum Ufer eines 100 m breiten Flusses. Das Wasser hat eine Strömungsgeschwindigkeit von $0{,}5\,\frac{m}{s}$ relativ zum Ufer.
In der Abbildung ist die Situation durch die Vektoren $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ veranschaulicht.

a) Die resultierende Geschwindigkeit $\vec{v}$ ergibt sich aus der Vektorsumme $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$. Bestimmen Sie die Richtung, in der sich das Boot bewegt.

b) Bestimmen Sie die Zeitdauer, die das Boot unterwegs ist.

c) Berechnen Sie die Länge der Strecke, die das Boot beim Überqueren des Flusses abgetrieben wird.

d) Berechnen Sie die Größe des Kurswinkels (Winkel zwischen $\overrightarrow{v_1}$ und der Uferkante), den das Boot einschlagen muss, damit es trotz Strömung den Fluss senkrecht überquert.



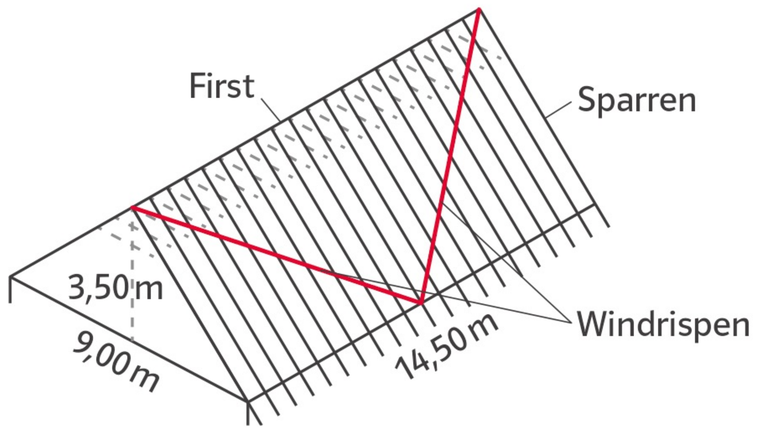
19 **a)** Gegeben sind die Punkte A(2|−4|3), B(3|−2|6), C(0|−2|12) und D(−1|−4|9). Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm, aber kein Rechteck ist.

b) Gegeben sind die Punkte A(8|−5|3), B(10|4|3), C(5|7|3) und D(2|2|3). Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Drachenviereck, aber keine Raute ist.

c) Gegeben sind die Punkte A(1|3|4), B(2|2|−3), C(6|8|−1) und D(3|6|5). Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Trapez ist, das nicht symmetrisch ist.

Strategie | Seite 256
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

20 Die Abbildung zeigt die Anordnung der Balken eines Daches. Zur Längenaussteifung werden schräg liegende Bretter angebracht, die rot eingezeichneten Windrispen.



a) Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem und beschreiben Sie jeweils die Lage eines Sparren und einer Windrispe durch einen passenden Vektor.

b) Berechnen Sie die Länge einer Windrispe und die Größe des Winkels zwischen Windrispe und Sparren.

21 **a)** Zeigen Sie durch eine Rechnung, dass die Dreiecke ABC_k mit $A(-1|1|3)$, $B(3|3|-1)$ und $C_k(1+k|2+2k|1+2k)$ für alle Werte von $k \in \mathbb{R}$ gleichschenklig sind.

b) Bestimmen Sie diejenigen Werte von k, für die das Dreieck ABC_k gleichseitig ist.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Seite $\overline{AB}$.

→ Strategie | Seite 259
Aufstellen und Lösen einer Gleichung

d) Zeigen Sie: $\overrightarrow{MC_k} \perp \overrightarrow{AB}$ für alle $k \neq 0$.

22 Gegeben sind die Punkte $A(-1|-0{,}5)$, $B(3|-3{,}5)$ und $C_k(1+3k|-2+4k)$ mit $k \in \mathbb{R}$.

a) Zeichnen Sie einige Dreiecke ABC_k mit einer 3D-Geometriesoftware für verschiedene Werte von k. Formulieren und begründen Sie eine Aussage, die auf alle Dreiecke ABC_k zutrifft.

b) Bestimmen Sie Werte von k so, dass das Dreieck ABC_k rechtwinklig (gleichseitig) ist.

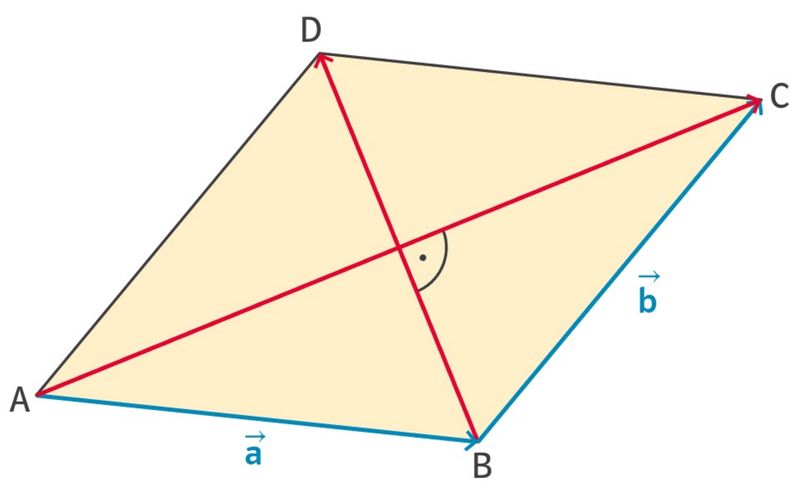
c) Beschreiben Sie begründet den geometrischen Ort aller Punkte, auf dem sich die Eckpunkte C_k befinden.

Test 2

→ Lösungen | Seite 298

23 **a)** Zeigen Sie mithilfe des Skalarprodukts, dass in jedem Parallelogramm ABCD gilt: Die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ sind genau dann orthogonal zueinander, wenn ABCD eine Raute ist, d.h., wenn alle Seiten dieselbe Länge haben.

b) Zeigen Sie dieselbe Aussage mit den Methoden der Mittelstufe, d.h. ohne Vektorrechnung.

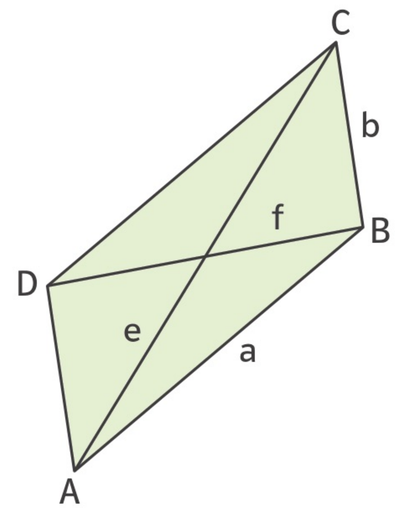


24 Gegeben ist ein Parallelogramm mit den Seitenlängen a und b und den Diagonalenlängen e und f.

a) Beweisen Sie mithilfe des Skalarprodukts: $e^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2$.

b) Beweisen Sie dieselbe Aussage mit den geometrischen Methoden der Mittelstufe, d.h. ohne Vektorrechnung.

c) Diskutieren Sie die Vor- und Nachteile der Lösungswege in den Teilaufgaben a) und b).



25 Bestimmen Sie alle Vektoren, die sowohl zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{b}$ orthogonal sind.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix}$

Grundwissen Test

→ Lösungen | Seite 299

G 26 Berechnen Sie die fehlenden Seitenlängen und Winkelgrößen des Dreiecks ABC mit $\gamma = 90°$.

a) $a = 7{,}0\,cm$ und $b = 3{,}5\,cm$

b) $a = 48{,}0\,cm$ und $\beta = 37°$

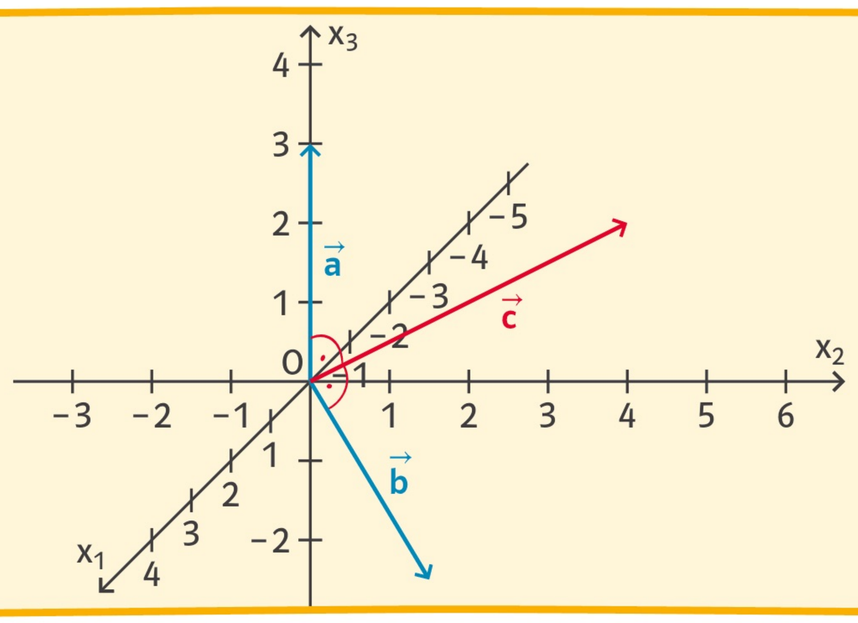
c) $a = 12{,}0\,cm$ und $\alpha = 42°$

d) $c = 6{,}0\,cm$ und $\alpha = 30°$

6 Das Vektorprodukt

Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie einen Vektor, der sowohl zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{b}$ orthogonal ist.
Wie viele solche Vektoren gibt es?



In vielen Situationen ist ein Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ gesucht, der zu zwei vom Nullvektor verschiedenen, nicht-parallelen Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ orthogonal ist.

Es gilt:

$$\vec{c} \perp \vec{a} \text{ und } \vec{c} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{c} \circ \vec{a} = 0 \text{ und } \vec{c} \circ \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0 \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0 \end{matrix}.$$

Durch Nachrechnen (vgl. Aufgabe 8b)) stellt man fest, dass die Koordinaten von $\vec{c} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ eine Lösung des obigen Gleichungssystems sind, d.h., $\vec{c}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$. Da dieser Vektor häufig benötigt wird, trifft man folgende Definition:

Definition: Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ nennt man den Vektor $\begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ das **Vektorprodukt** aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und schreibt $\vec{a} \times \vec{b}$.

$\vec{a} \times \vec{b}$ wird gelesen „$\vec{a}$ kreuz $\vec{b}$“ und deshalb auch als **Kreuzprodukt** bezeichnet.

Satz: Wenn der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ nicht der Nullvektor ist, dann ist er orthogonal zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$.

$\vec{a} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{a} = \vec{0}$

Alle Vektoren der Form $r \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ mit $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind orthogonal zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, denn sie sind parallel zu $\vec{a} \times \vec{b}$.
Sind Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel zueinander, so gilt $\vec{b} = r \cdot \vec{a}$ für ein $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$,

denn: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 r a_3 - a_3 r a_2 \\ a_3 r a_1 - a_1 r a_3 \\ a_1 r a_2 - a_2 r a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Merkregel für die Bildung des Vektorprodukts:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 0 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-3) - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

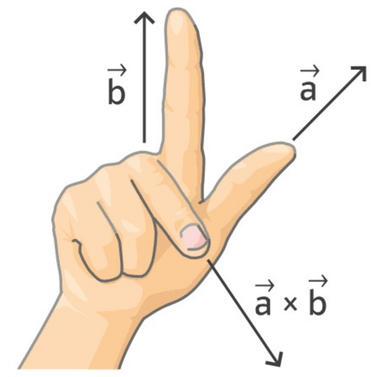
Zunächst werden die ersten beiden Koordinaten unter den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wiederholt notiert. Um eine Koordinate zu berechnen, berechnet man die Differenz der Produkte aus den beiden nächsten Zeilen in der durch die Kreuze angedeuteten Weise.

Für das Vektorprodukt gilt $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$. Also gilt das Kommutativgesetz für das Vektorprodukt nicht.

vgl. Aufgabe 10 a)

Beachten Sie:
Das Vektorprodukt ist – im Gegensatz zum Skalarprodukt – nur für Vektoren im **dreidimensionalen** Raum definiert.

Die gegenseitige Lage von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$ im Raum wird beschrieben durch die sogenannte **Rechte-Hand-Regel**: Weist $\vec{a}$ in Richtung des Daumens und $\vec{b}$ in Richtung des Zeigefingers, so weist der Mittelfinger in Richtung von $\vec{a}\times\vec{b}$.
Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge – wie die Koordinatenachsen – ein Rechtssystem.



Der Betrag des Vektorprodukts hat eine ähnliche Struktur wie das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

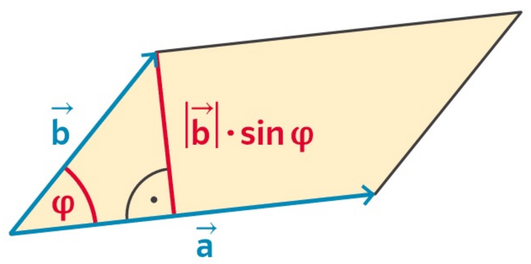
$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$
$\vec{a}\circ\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$

Zusammenhang zwischen Vektorprodukt und Flächeninhalt

$$\begin{aligned}
|\vec{a}\times\vec{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2\\
&= a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2\cdot(a_2a_3b_2b_3 + a_1a_3b_1b_3 + a_1a_2b_1b_2)\\
&\quad + a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 - (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2)\\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\cdot(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2\\
&= |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\circ\vec{b})^2 && \text{| Definition Skalarprodukt}\\
&= |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2 - (|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi)^2 && \text{| Ausklammern}\\
&= |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot(1 - (\cos\varphi)^2) && \text{| } (\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1\\
&= |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot(\sin\varphi)^2
\end{aligned}$$

Wegen $0° \le \varphi \le 180°$ gilt $\sin\varphi \ge 0$ und damit $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$.

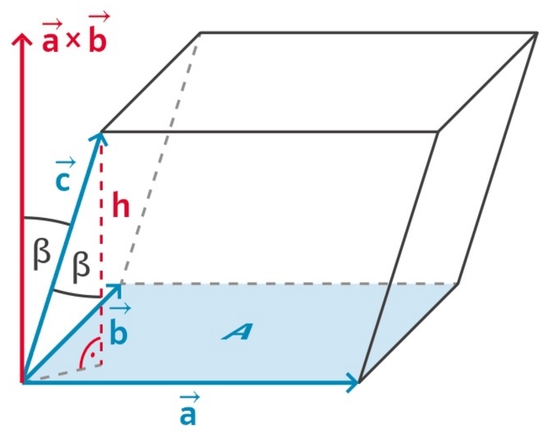
Aus der Abbildung entnimmt man, dass der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms gleich $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$ ist. Der Betrag des Vektors $\vec{a}\times\vec{b}$ lässt sich also geometrisch deuten als Maßzahl des Flächeninhalts des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.



Zur Erinnerung:
Für den Flächeninhalt A eines Parallelogramms gilt $A = g\cdot h$.

Zusammenhang zwischen Vektorprodukt und Volumen

Das Vektorprodukt ermöglicht auch, das Volumen V eines von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten **Spats** zu berechnen. Bilden die Vektoren wie in der Abbildung ein Rechtssystem, so gilt für den Flächeninhalt A der Grundfläche des abgebildeten Spats $A = |\vec{a}\times\vec{b}|$.
Für die Länge der Höhe h des Spats gilt $h = |\vec{c}|\cdot\cos\beta$, wobei $0° \le \beta < 90°$ gilt. Damit ist $V = A\cdot h = |\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\beta = (\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}$.
Liegt β zwischen 90° und 180°, so gilt $\cos\beta < 0$. Also ist $(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}$ eine negative Zahl. Daher kann man mithilfe von Betragsstrichen allgemein $V = |(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}|$ schreiben.

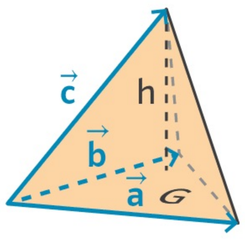


Ein Spat ist ein (gegebenenfalls schiefes) Prisma, dessen Grundfläche ein Parallelogramm ist.

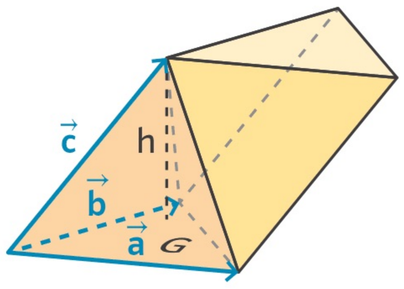
Satz: Der **Flächeninhalt des Parallelogramms**, das von den Vektoren $\vec{a} \ne \vec{0}$ und $\vec{b} \ne \vec{0}$ unter dem Winkel φ aufgespannt wird, beträgt $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$.
Das **Volumen des Spats**, der von den Vektoren $\vec{a} \ne \vec{0}$, $\vec{b} \ne \vec{0}$ und $\vec{c} \ne \vec{0}$ aufgespannt wird, beträgt $|(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}|$.

Der Term $|(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}|$ wird auch als **Spatprodukt** bezeichnet.

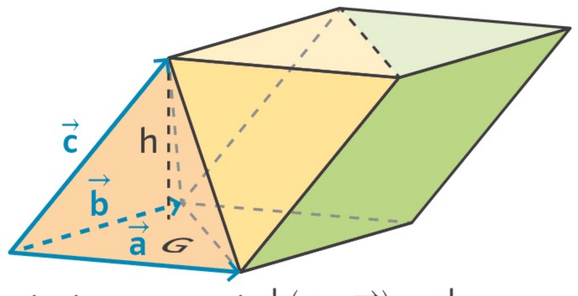
Für das Volumen der von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Pyramide gilt:



$V_{Pyramide}$



$= \frac{1}{3}\cdot V_{Prisma}$



$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot V_{Spat} = \frac{1}{6}\cdot|(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}|$

Zur Erinnerung:
$V_{Prisma} = G\cdot h$
$V_{Pyramide} = \frac{1}{3}\cdot G\cdot h$

Beispiel 1

Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{c}$ der Länge 5, der orthogonal zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und zu $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ ist.

Lösung

Es gilt $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} - 1 \cdot (-4) \\ 1 \cdot 3 - (-3) \cdot \sqrt{2} \\ (-3) \cdot (-4) - 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(\sqrt{2}+1) \\ 3(1+\sqrt{2}) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Damit ist $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left| \begin{matrix} 4(\sqrt{2}+1) \\ 3(1+\sqrt{2}) \\ 0 \end{matrix} \right| = \sqrt{4^2(\sqrt{2}+1)^2 + 3^2(1+\sqrt{2})^2 + 0^2} = 5(\sqrt{2}+1)$.

Also ist $\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot \begin{pmatrix} 4(\sqrt{2}+1) \\ 3(1+\sqrt{2}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Vektor mit den geforderten Eigenschaften.

Auch $-\vec{c}$ ist eine Lösung.

Beispiel 2

Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Dreiecks PQR mit $P(2|5|-1)$, $Q(3|7|2)$ und $R(9|6|3)$ mithilfe des Vektorprodukts.

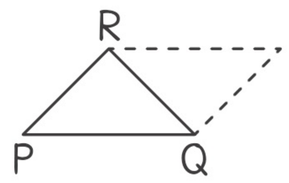
→ Strategie | Seite 256
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

Lösung

$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 7 - 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ -13 \end{pmatrix}$

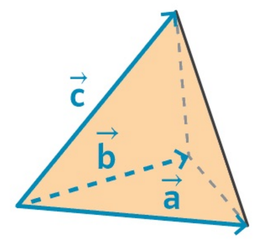
$A = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5^2 + 17^2 + (-13)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{483} \approx 10{,}99$

Skizze:



Beispiel 3

Berechnen Sie das Volumen V einer dreiseitigen Pyramide, die durch die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.



Lösung

$V = \frac{1}{6} \cdot \left|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}\right| = \frac{1}{6} \cdot \left| \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot |-130| = \frac{65}{3} \approx 21{,}7$

Aufgaben

1 Berechnen Sie für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

a) $\vec{a} \times \vec{b}$, **b)** $\vec{b} \times \vec{a}$, **c)** $\vec{b} \times \vec{c}$, **d)** $\vec{c} \times \vec{a}$,
e) $\vec{c} \times \vec{c}$, **f)** $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, **g)** $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, **h)** $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{c})$.

2 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC für

a) $A(4|7|5)$, $B(0|5|9)$, $C(8|7|3)$,
b) $A(-1|5|0)$, $B(2|2|2)$, $C(2|2|0)$,
c) $A(5|1|-2)$, $B(3|0|0)$, $C(1|3|1)$,
d) $A(1|0|0)$, $B(0|1|0)$, $C(0|0|1)$.

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit einer geeigneten Mathematiksoftware.

→ Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

3 Berechnen Sie das Volumen einer dreiseitigen Pyramide ABCD mit den Eckpunkten

a) $A(0|0|0)$, $B(1|7|3)$, $C(2|-3|4)$, $D(6|1|10)$, **b)** $A(1|-2|12)$, $B(11|3|5)$, $C(3|5|8)$, $D(19|4|4)$.

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit einer geeigneten Mathematiksoftware.

→ Strategie | Seite 256
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

4 **a)** Zeichnen Sie die Pyramide OABS mit $A(4|-2|0)$, $B(2|4|0)$ und $S(2|2|5)$.
b) Begründen Sie, dass die Grundfläche OAB ein rechtwinkliges Dreieck ist.
c) Bestimmen Sie die Länge der Höhe der Pyramide.
d) Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide auf zwei Arten.
e) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit einer geeigneten Mathematiksoftware.

→ Strategie | Seite 260
Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

5 Erläutern Sie anhand einer Zeichnung, dass $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ ein Rechtssystem bilden.

Test 1

→ Lösungen | Seite 299

6 Gegeben ist eine dreiseitige Pyramide ABCS mit

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}$.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC sowie das Volumen und die Länge der Höhe der Pyramide.

7 Zeigen Sie anhand eines selbst gewählten Beispiels, dass das Assoziativgesetz für das Vektorprodukt nicht gilt.

→ Strategie | Seite 258
Betrachten von etwas Gegenteiligem

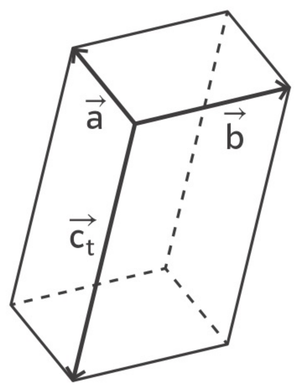
8 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$, wobei $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ und $\vec{a}$ kein skalares Vielfaches von $\vec{b}$ sei.

a) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{c}$, der zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$ orthogonal ist.

b) Zeigen Sie, dass alle Vektoren $\vec{c} = r \cdot \begin{pmatrix}a_2b_3 - a_3b_2\\a_3b_1 - a_1b_3\\a_1b_2 - a_2b_1\end{pmatrix}$ $(r \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$ orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind.

9 **Abiturprüfung 2014 (Bayern), Geometrie, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 1**

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{c}_t = \begin{pmatrix}4t\\2t\\-5t\end{pmatrix}$ spannen für jeden Wert von t mit $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ einen Körper auf. Die Abbildung zeigt den Sachverhalt beispielhaft für einen Wert von t.



a) Zeigen Sie, dass die aufgespannten Körper Quader sind.

b) Bestimmen Sie diejenigen Werte von t, für die der jeweils zugehörige Quader das Volumen 15 besitzt.

10 Beweisen Sie durch Nachrechnen.

a) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$

b) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

c) $\vec{a} \times (r \cdot \vec{b}) = (r \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = r \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ für alle $r \in \mathbb{R}$

Aufgrund der Aussage aus Teilaufgabe 10 c) ist es erlaubt, einfach $r \cdot \vec{a} \times \vec{b}$ zu schreiben.

11 Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{c}$, der zu $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}-4{,}5\\-3\\6\end{pmatrix}$ orthogonal ist.

Begründen Sie, warum bei dieser Aufgabe die Richtung des Vektors $\vec{c}$ nicht eindeutig festgelegt ist.

12 Begründen Sie, dass $\vec{a} \times (\vec{b} + r \cdot \vec{a}) = \vec{a} \times \vec{b}$ für jede reelle Zahl r gilt. Erläutern Sie eine geometrische Deutung anhand einer Skizze.

13 Wahr oder falsch? Begründen Sie.

a) Sind die Koordinaten der Eckpunkte eines Parallelogramms ganzzahlig, so ist der Flächeninhalt des Parallelogramms auch ganzzahlig.

b) Das Volumen eines Spats, der von drei Vektoren mit ganzzahligen Koordinaten aufgespannt wird, ist ganzzahlig.

c) Für das Volumen des von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats gilt $\left|\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})\right| = \left|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}\right|$.

14 Marla sagt: „Im Zweidimensionalen kann ich den Flächeninhalt eines Parallelogramms nicht mithilfe des Vektorprodukts berechnen, weil das Vektorprodukt nur im Dreidimensionalen definiert ist.“ Lisa antwortet: „Mit einem kleinen Trick geht es doch.“
Diskutieren Sie, was Lisa meinen könnte.

Test 2

→ Lösungen | Seite 299

15 Gegeben sind die Punkte $A(-1|2|-1)$, $B(1|3|1)$, $C(-1|5|2)$ und $D(-3|4|0)$.

a) Begründen Sie, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist.

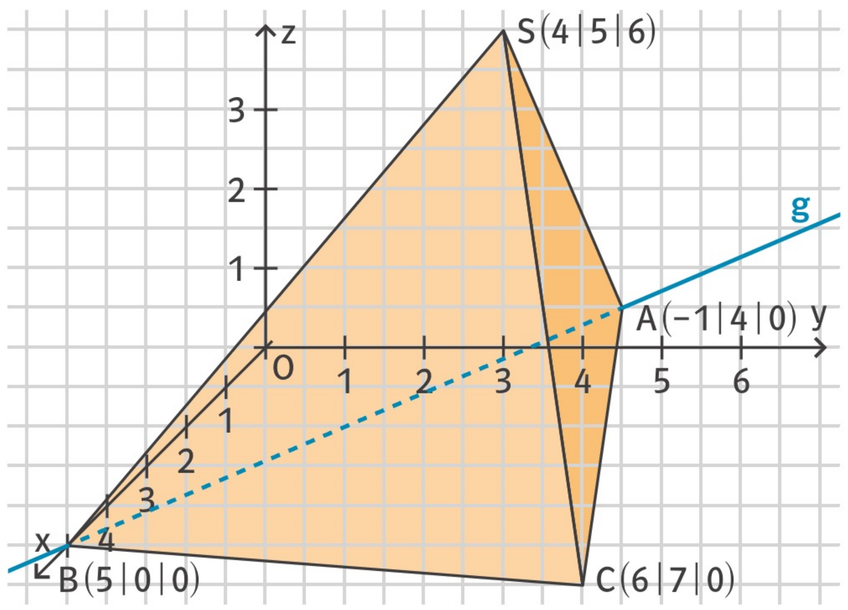
b) Berechnen Sie den Vektor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ sowie seinen Betrag und erläutern Sie die geometrische Bedeutung des Betrags.

c) Begründen Sie, dass in der Pyramide $ABCDS_k$ mit $S_k(-1 + k|3{,}5 + 2k|0{,}5 - 2k)$ für jeden Wert von k die vier Seitenkanten jeweils gleich lang sind. Beschreiben Sie, um was für eine Art von Pyramide es sich handelt.

d) M sei der Schnittpunkt der Diagonalen des Quadrats ABCD. Benennen Sie die Bedeutung des Vektors $\overrightarrow{MS_k}$ für die Pyramide.

e) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCDS_k$ auf zwei verschiedenen Wegen.

16 **a)** Ein Punkt Q bewegt sich auf der Geraden g durch die Pyramidenpunkte A und B in der xy-Ebene. Bestimmen Sie eine Gleichung, die die Koordinaten x und y von Q erfüllen.
$\left(\text{zur Kontrolle: } y = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}\right)$



b) Beschreiben Sie begründet die Punktmenge im dreidimensionalen Raum, die durch die Gleichung $z = 0$ beschrieben wird.

c) Beschreiben Sie begründet die Punktmenge im dreidimensionalen Raum, die durch die Gleichung $2x + 3y - 10 = 0$ beschrieben wird. Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Zeigen Sie, dass alle Punkte Q mit einem Ortsvektor der Form $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} -1{,}5\lambda + 5 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ auf g liegen.

e) Berechnen Sie den Abstand $|\overrightarrow{SQ}|$ in Abhängigkeit von λ. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q_0 auf g, für den der Abstand am kleinsten ist.

f) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q_0 auf g mit dem kleinstmöglichen Abstand von S noch einmal durch Anwendung des folgenden Satzes:
Es sei g eine Gerade und P ein Punkt, der nicht auf g liegt. Dann ist der Fußpunkt des Lotes von P auf g der Geradenpunkt, der den kürzesten Abstand von P hat.

g) Zeichnen Sie die Pyramide ABCS mit den in der Abbildung angegebenen Koordinaten mithilfe einer 3D-Geometriesoftware und berechnen Sie die Größe des Winkels α, den die Seitenkante $\overline{BS}$ der Pyramide mit der Grundfläche ABC bildet.

h) Berechnen Sie die Größe des Winkels β, den die Seitenfläche ABS der Pyramide mit der Grundfläche ABC bildet.

i) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCS für A, B und C aus der Abbildung und allgemein $S(x|y|6)$. Erläutern Sie, wie sich das Ergebnis geometrisch erklären lässt.

Grundwissen Test

→ Lösungen | Seite 299

G 17 In einer Urne liegen neun Kugeln, die mit den Ziffern von 1 bis 9 beschriftet sind. Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man aus den beiden Ziffern der gezogenen Kugeln eine zweistellige Primzahl bilden kann.

Wiederholen

1 Gegeben sind die Punkte $A(1|2|3)$, $B(-3|0|7)$ und $C(6|-3|-1)$.

a) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks ABC.

b) Berechnen Sie die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes D so, dass ABCD ein Parallelogramm ist, und bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Parallelogramms.

→ Strategie | Seite 256
Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

2 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie zwei Vektoren, die senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen und die Länge 3 haben.

3 Gegeben sind die Punkte $A(-2|-2)$, $B(3|0)$, $C(2|4)$ und $D(-3|2)$.

a) Zeichnen Sie das Viereck ABCD.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{DC}$. Erläutern Sie, um welches Viereck es sich handelt.

4 Gegeben sind die Punkte $A(0|0|0)$, $B(6|-1|2)$, $C(1|-6|1)$ und $E(2|1|5)$.

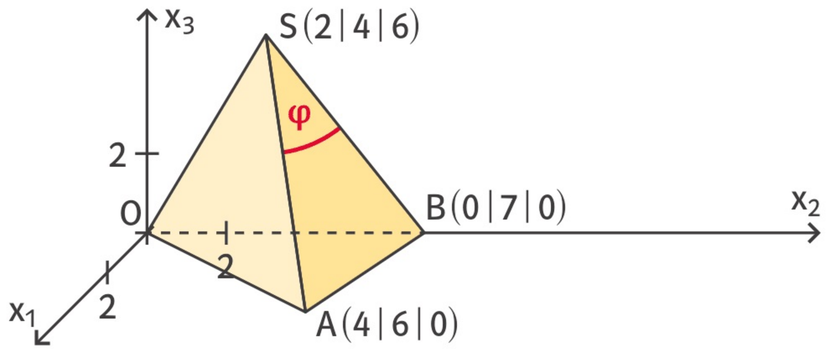
a) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes D so, dass ABCD ein Parallelogramm ist.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten von Punkten F, G und H so, dass ABCDEFGH ein Spat ist.

c) Berechnen Sie das Volumen des Spats ABCDEFGH.

d) Stellen Sie den Spat ABCDEFGH mithilfe einer 3D-Geometriesoftware dar und überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe c).

5 Berechnen Sie für die Pyramide OABS (vgl. Abbildung) die Größe des Winkels φ.



6 Bestimmen Sie alle zu $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ orthogonalen Vektoren.

7 Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ r \\ s \end{pmatrix}$ soll $\vec{b} \perp \vec{a}$ und $|\vec{b}| = 3$ gelten. Berechnen Sie r und s.

→ Strategie | Seite 259
Aufstellen und Lösen eines Gleichungssystems

8 Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ spannen einen Spat auf. Berechnen Sie sein Volumen. Welche besondere Gestalt besitzt der Spat? Begründen Sie Ihre Antwort.

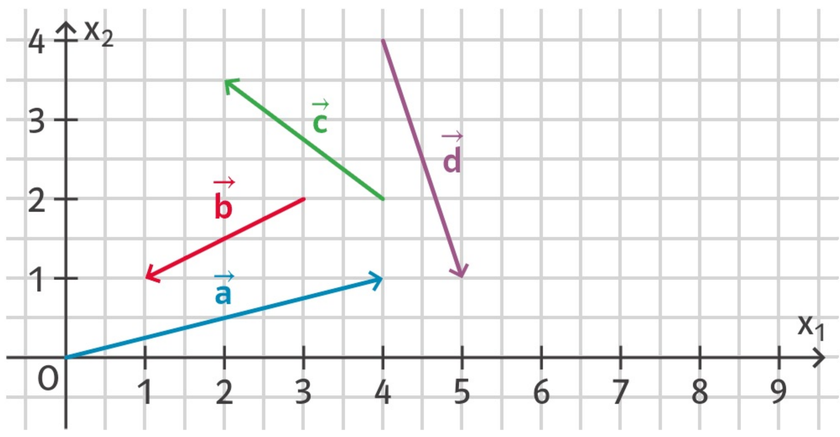
9 Bestimmen Sie die Koordinaten der gezeichneten Vektoren. Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch die Linearkombination.

a) $\vec{a} + 2\vec{b}$

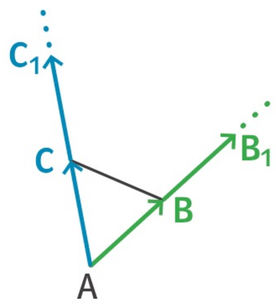
b) $\vec{b} - 2\vec{a}$

c) $3\vec{c} - 4\vec{d}$

d) $0{,}5\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{d}$



10 Zeichnen Sie ein Dreieck ABC. Verschieben Sie B durch $\overrightarrow{AB}$ auf B_1 und C durch $\overrightarrow{AC}$ auf C_1. Verschieben Sie nun B_1 durch $\overrightarrow{AB_1}$ auf B_2 und C_1 durch $\overrightarrow{AC_1}$ auf C_2 usw., bis Sie das Dreieck AB_4C_4 erhalten. Erläutern Sie, welchen Wert das Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke AB_4C_4 und ABC besitzt.



Vertiefen

11 Gegeben sind die Punkte $A(1|-2|-7)$, $B(17|-2|6)$, $C(-8|-2|6)$ und $D(1|6|7)$.

a) Berechnen Sie die Größe des Winkels $\sphericalangle CAB$.

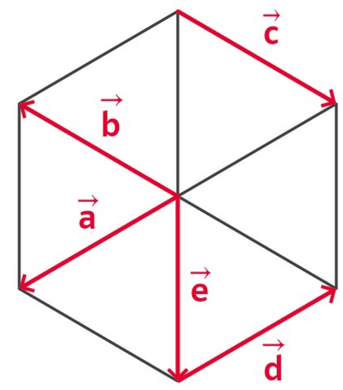
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

c) Berechnen Sie das Volumen der dreiseitigen Pyramide mit den Eckpunkten ABCD.

12 In dem regelmäßigen Sechseck sind Repräsentanten von Vektoren eingezeichnet.

a) Drücken Sie die Vektoren $\vec{c}$, $\vec{d}$ und $\vec{e}$ durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus.

b) Drücken Sie die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ durch die Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{e}$ aus.

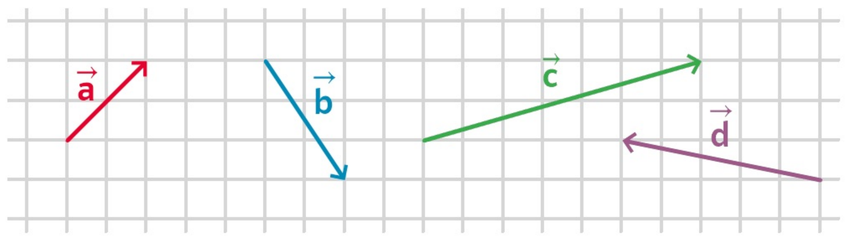


13 Erläutern Sie, was die Gleichung $|\vec{a} \circ \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ über die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aussagt.

14 Zeichnen Sie mit den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ einen Repräsentanten von

a) $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $-\vec{a} + \vec{b}$, $-\vec{c} - \vec{d}$, $\vec{d} - \vec{c}$,

b) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$, $\vec{d} - (\vec{a} - \vec{c})$, $(\vec{c} - \vec{d}) - \vec{a}$.



15 Gegeben sind Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ sowie die reellen Zahlen r, s und t.

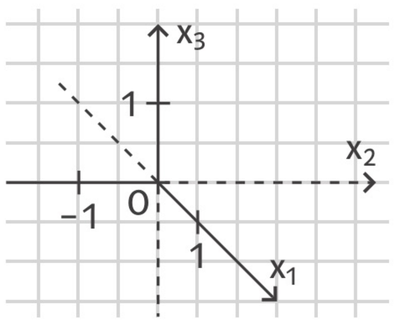
a) Entscheiden und begründen Sie, ob der Term ein definierter Ausdruck ist. Geben Sie gegebenenfalls an, ob es sich bei dem Term um eine Zahl oder um einen Vektor handelt.

(1) $(\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}$ (2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \circ (\vec{c} \times \vec{d})$ (3) $(\vec{a} \circ \vec{b}) \times (\vec{c} \circ \vec{d})$

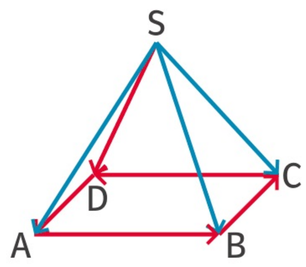
(4) $r \cdot (t \cdot \vec{a}) \times (s \cdot \vec{b})$ (5) $\frac{\vec{a}}{\vec{b} \times \vec{c}}$ (6) $(\vec{a} \circ \vec{b}) \circ \vec{c}$

b) Stellen Sie sich gegenseitig ähnliche Aufgaben.

16 Die Abbildung veranschaulicht den Blick von links oben in den IV. Oktanten eines dreidimensionalen Koordinatensystems. Zeichnen Sie in entsprechender Weise Koordinatensysteme für die Blickrichtung von rechts unten in den V. Oktanten und von links unten in den VIII. Oktanten.



17 Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{SD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{DA}$ der Pyramide mit quadratischer Grundfläche als Linearkombination der Vektoren $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ und $\overrightarrow{SC}$ aus.

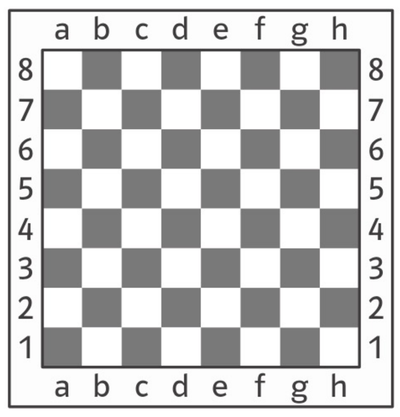


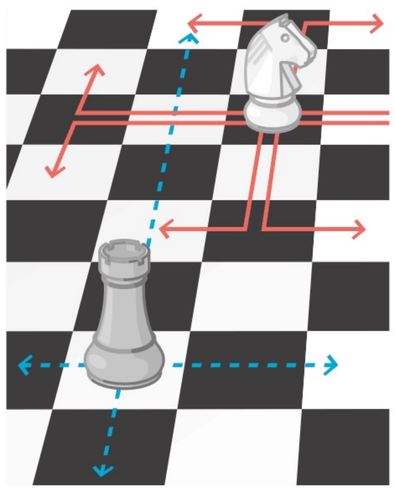
Vernetzen

18 **a)** Ein Springer eines Schachspiels steht auf dem Feld e4. Geben Sie an, wie viele verschiedene Vektoren man benötigt, um die möglichen nächsten Züge zu beschreiben, wenn keine andere Figur stört.

b) Bearbeiten Sie Teilaufgabe a) für einen Turm.

c) Überlegen Sie sich ähnliche Aufgaben und stellen Sie sich diese gegenseitig.

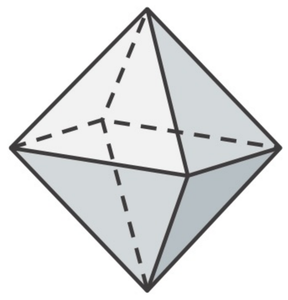


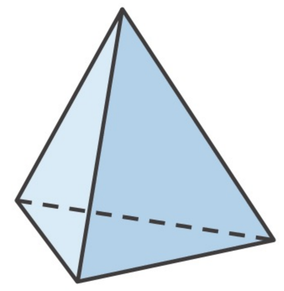


Springer: 2 Felder vor, 1 Feld zur Seite.
Turm: beliebig viele Felder geradeaus.

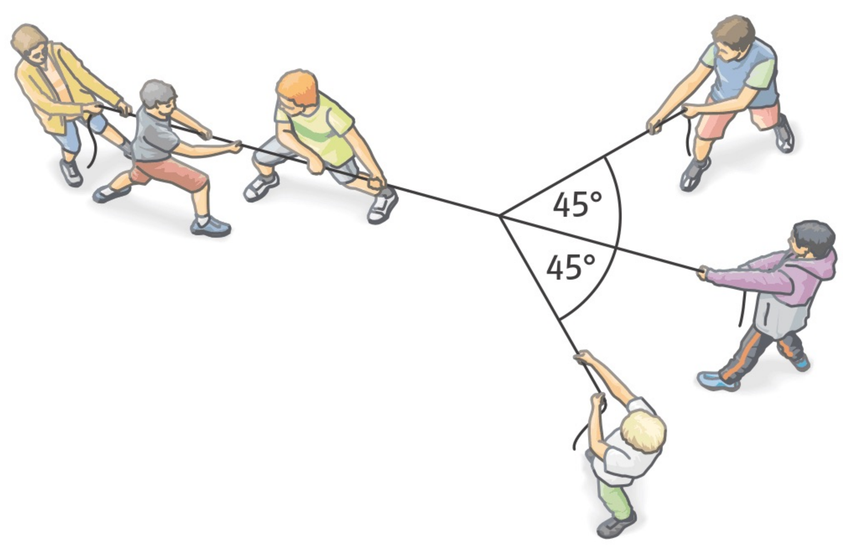
19 **a)** Zeichnen Sie ein Oktaeder ins Heft und bezeichnen Sie die Eckpunkte. Geben Sie alle möglichen Verbindungspfeile der Eckpunkte an. Geben Sie an, wie viele verschiedene Vektoren durch diese Pfeile repräsentiert werden.

b) Lösen Sie die entsprechende Aufgabe für ein Tetraeder.





20 Im Rahmen einer Benefizveranstaltung treten beim Tauziehen Bundesligasportler gegen Hobbysportler an. Um Chancengleichheit herzustellen, ziehen die Hobbysportler in die gleiche Richtung und die Bundesligasportler in verschiedene Richtungen. In jeder Gruppe ziehen die drei Sportler jeweils gleich stark. Berechnen Sie, wie stark ein Hobbysportler im Vergleich zum Bundesligasportler mindestens ziehen muss, um nicht zu verlieren.



21 Ein Würfel hat die Eckpunkte A, B, C, D, E, F, G, und H. Je zwei der Eckpunkte legen einen Pfeil fest, z. B. $\overrightarrow{AB}$.

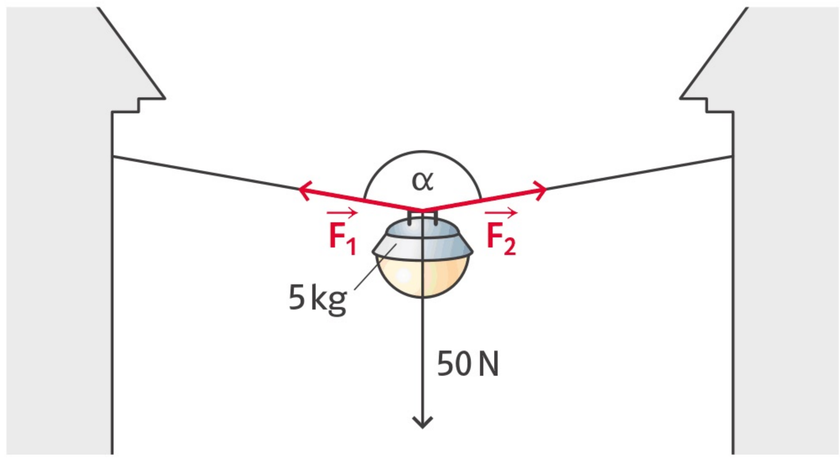
a) Bestimmen Sie, wie viele solche Pfeile es gibt.

b) Ermitteln Sie, wie viele verschiedene Vektoren durch diese Pfeile festgelegt werden. Geben Sie für jeden Vektor alle Pfeile an, die ihn repräsentieren.

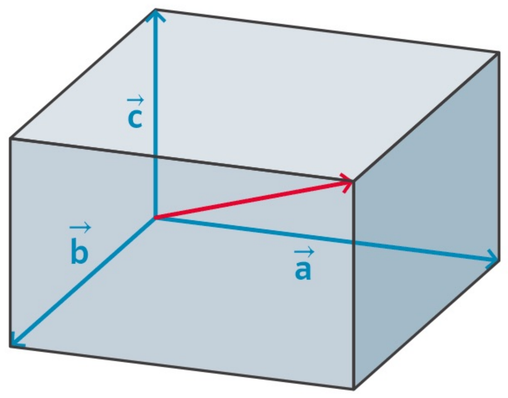
22 Bestimmen Sie zeichnerisch die Kräfte $\overrightarrow{F_1}$ und $\overrightarrow{F_2}$ an den Aufhängedrähten für

a) $\alpha = 120°$,

b) $\alpha = 160°$.



23 Beweisen Sie mithilfe des Skalarprodukts: Bei jedem Quader haben die Quadrate über drei von einem Eckpunkt ausgehenden Kanten zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über einer Raumdiagonale.



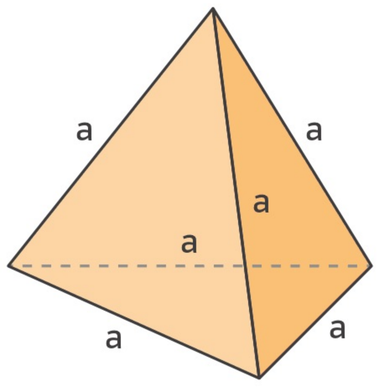
24 Gegeben sind die Punkte $A(0|0|0)$, $B(0|6|0)$, $C(3\sqrt{3}|3|0)$ und $D(\sqrt{3}|3|2\sqrt{6})$.

a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B, C und D ein Tetraeder bilden.

b) Stellen Sie das Tetraeder mithilfe einer 3D-Geometriesoftware dar.

c) Berechnen Sie die Größe des Winkels, den eine Seitenfläche mit der Grundfläche einschließt.

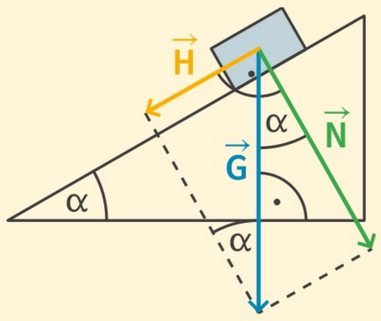
d) Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche und das Volumen des Tetraeders.



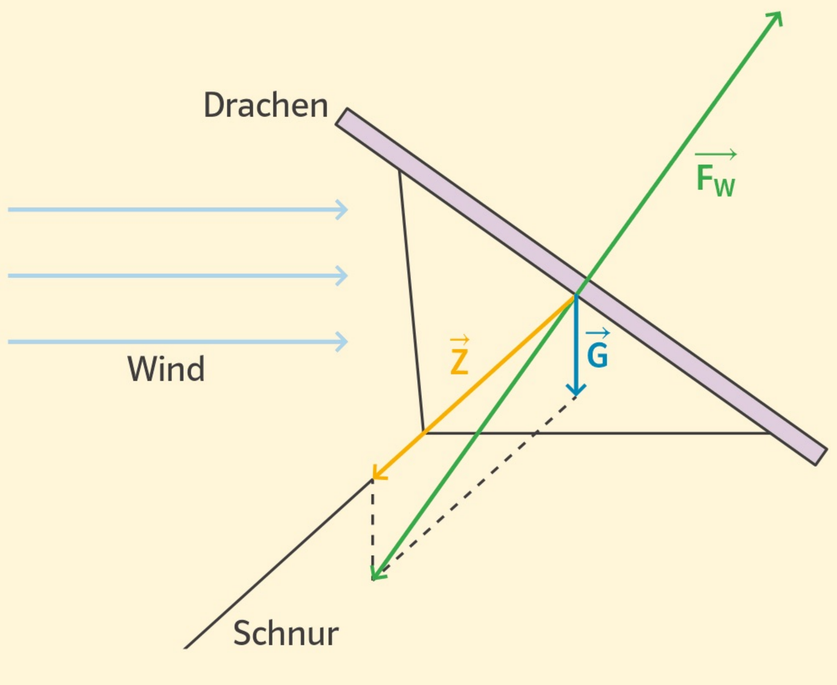
Vektoren in der Physik

In der Physik unterscheidet man zwischen **skalaren Größen** wie z. B. Masse oder Zeit und **vektoriellen Größen** wie z. B. Geschwindigkeit oder Kraft. Skalare Größen werden durch die Angabe von Maßzahl und Maßeinheit beschrieben, z. B. Masse 5 kg oder Zeit 12 s.
Zur vollständigen Festlegung von vektoriellen Größen benötigt man außer der Angabe von Maßzahl und Maßeinheit noch die Angabe der Richtung. Vektorielle Größen werden durch Pfeile veranschaulicht. Die Maßzahl in der gewählten Maßeinheit bestimmt die Länge des Pfeils, d. h. den Betrag des Vektors.

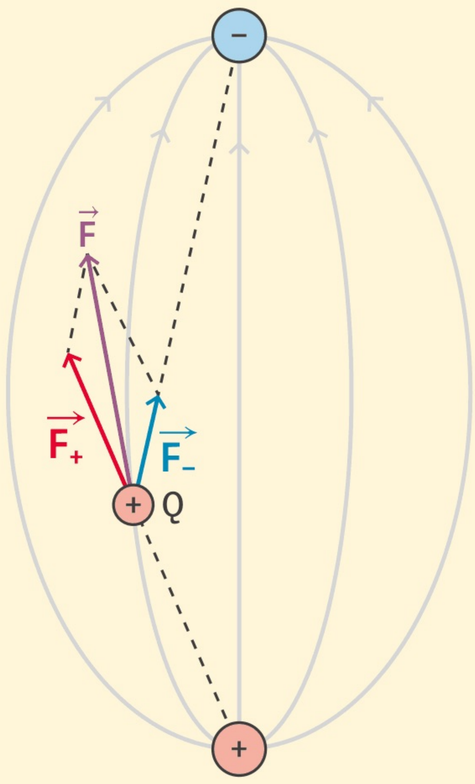
Mithilfe von Vektoren lassen sich bestimmte physikalische Sachverhalte gut veranschaulichen und entsprechende Größen berechnen. Die Abbildung auf dem Rand zeigt, wie die Gewichtskraft $\vec{G}$ eines Körpers auf einer schiefen Ebene in die **Hangabtriebskraft** $\vec{H}$ und die dazu senkrechte **Normalkraft** $\vec{N}$ zerlegt wird.
Es gilt $|\vec{H}| = |\vec{G}| \cdot \sin\alpha$ und $|\vec{N}| = |\vec{G}| \cdot \cos\alpha$.



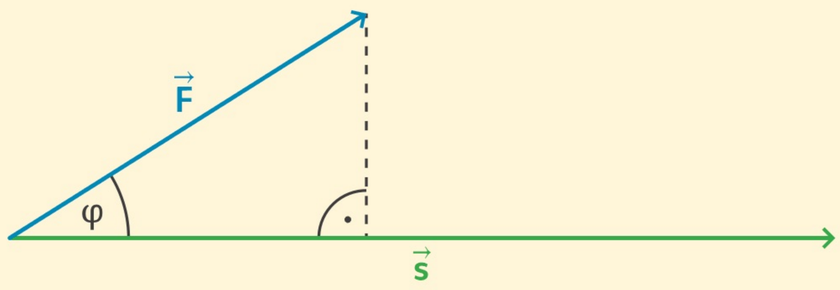
Auch komplexere Sachverhalte kann man übersichtlich darstellen:
Die nebenstehende Abbildung veranschaulicht das Zusammenwirken verschiedener Kräfte bei einem Drachen, der an einer Schnur im Wind gehalten wird. Im Gleichgewichtsfall wirkt der Summe aus der Gewichtskraft $\vec{G}$ und der Zugkraft $\vec{Z}$ der Schnur die durch den Wind und die Schrägstellung des Drachens verursachte Kraft $\overrightarrow{F_W}$ entgegen. Sie ist senkrecht zum Drachen gerichtet, der ruhig im Wind steht.



Ein weiteres Beispiel einer vektoriellen Größe ist die **elektrische Feldstärke**.
Im Raum zwischen den beiden festen Ladungen mit unterschiedlichen Vorzeichen besteht ein elektrisches Feld, welches durch die grau gezeichneten Feldlinien beschrieben wird.
Auf eine bewegliche positive Ladung Q (eine skalare Größe) wirkt überall eine Kraft in Richtung der Tangente dieser Linien. Die Kraft $\vec{F}$ auf diese Ladung ist gleich der Summe der Kräfte, welche beide festen Ladungen auf die bewegliche Ladung ausüben.
Den Quotienten $\frac{\vec{F}}{Q}$ bezeichnet man als elektrische Feldstärke $\vec{E}$.



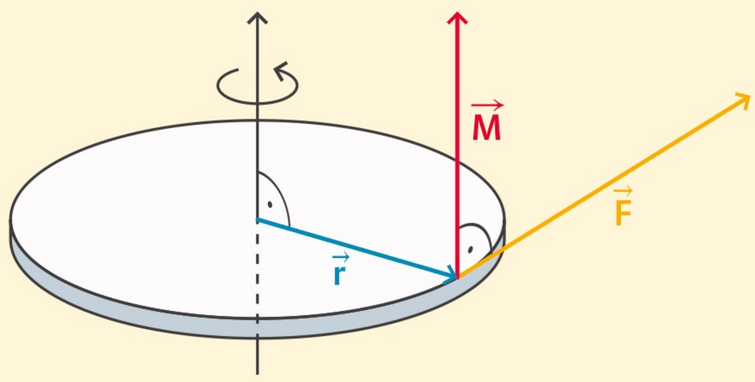
Die Verwendung von Vektoren erleichtert auch das formale Rechnen mit vektoriellen Größen.
Die **Arbeit** ist ein Beispiel für die Anwendung des Skalarprodukts.
Es gilt $W = \vec{F} \circ \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\varphi$.



Wenn das Produkt vektorieller Größen wieder eine vektorielle Größe ergibt, kann in vielen Fällen das Ergebnis durch das Vektorprodukt dieser vektoriellen Größen beschrieben werden.

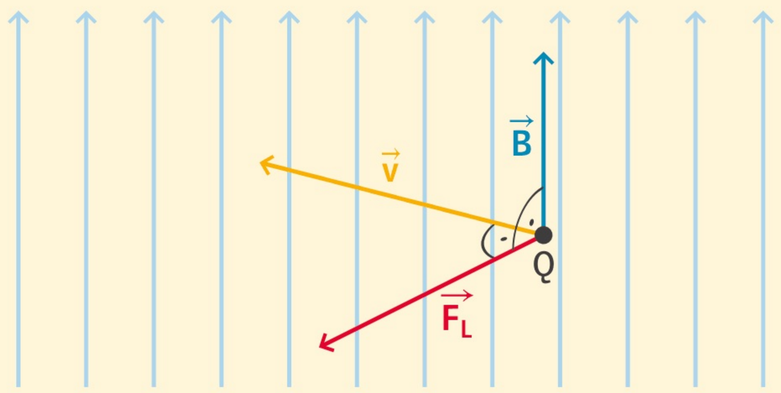
Drehmoment

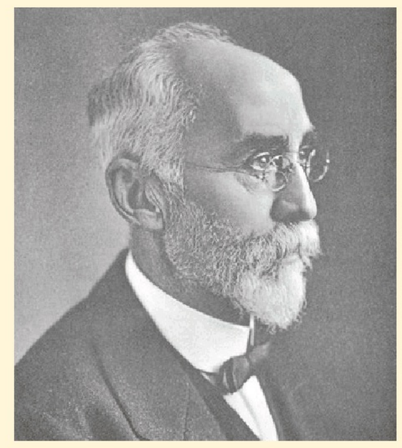
Für einen starren Körper, der um eine feste Achse drehbar gelagert ist, gilt: Die Länge des Vektors $\vec{r}$ senkrecht zur Drehachse gibt den Abstand des Angriffspunktes einer Kraft $\vec{F}$ zur Achse an. Die Kraft ist ebenfalls senkrecht zur Achse gerichtet.
Der Vektor $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ heißt **Drehmoment**.



Lorentz-Kraft

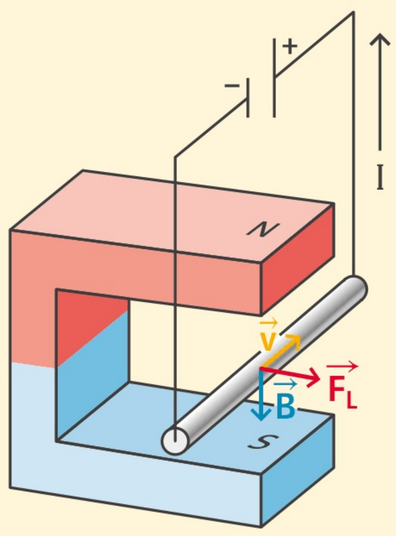
Bewegt sich eine Ladung Q in einem homogenen Magnetfeld mit der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ senkrecht zur Richtung der magnetischen Feldlinien, so wird sie durch die **Lorentz-Kraft** $\vec{F_L}$ senkrecht zur Richtung der Feldlinien abgelenkt.
Es gilt $\vec{F_L} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$.

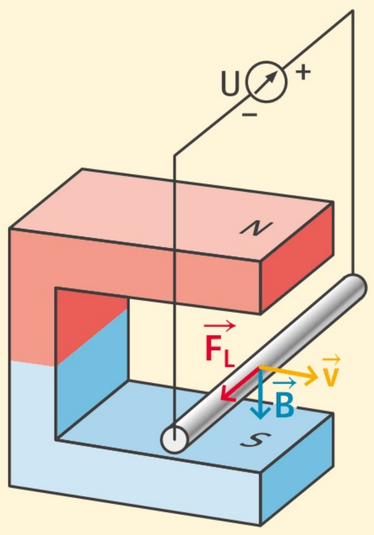




Hendrik Antoon Lorentz (1853 – 1928), niederländischer theoretischer Physiker
Er erarbeitete Grundlagen, die in Albert Einsteins speziellen Relativitätstheorie (1905) eingingen.

Im Leiterschaukelversuch wird das Grundprinzip des Gleichstromelektromotors demonstriert. Auf die im Leiter vom Minuspol zum Pluspol fließenden Elektronen wirkt im vom Nordpol zum Südpol gerichteten Magnetfeld die Lorentz-Kraft. Die Summe dieser Kräfte bewegt den Leiter nach rechts.
Wird umgekehrt der Draht mit der Hand durch das Magnetfeld bewegt, so werden die Elektronen durch die Lorentz-Kraft $\vec{F_L}$ bewegt und sammeln sich am vorderen Ende des Leiters. Es entsteht eine Spannung zwischen den Enden des Leiters.
Dieser Vorgang heißt **Induktion**.
Nach diesem Grundprinzip arbeiten die Generatoren zur Stromerzeugung.

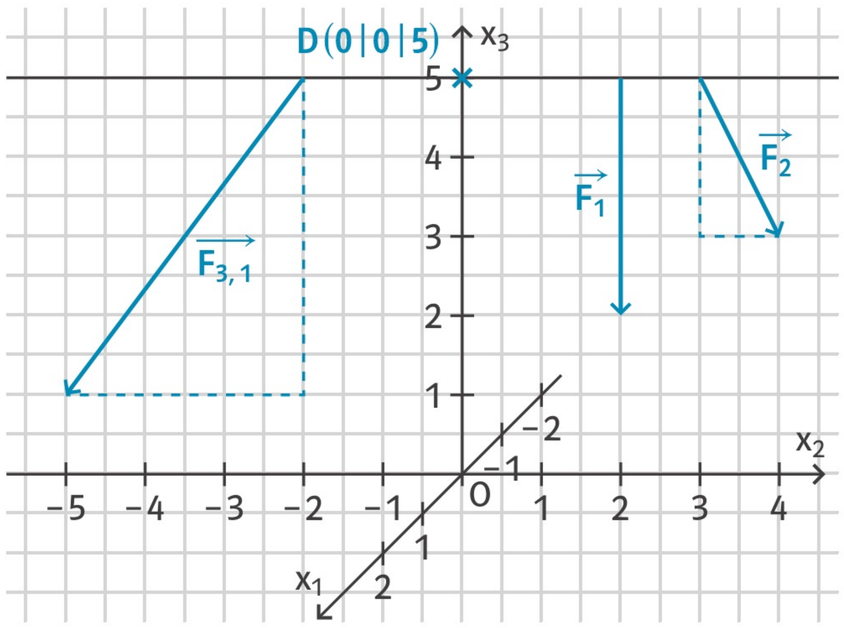




1 Die Kräfte $\vec{F_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{F_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{F_{3,k}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3k \\ -4k \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$ greifen an dem um D drehbaren, waagerechten Hebel an.

a) Berechnen Sie mithilfe des Vektorprodukts die Summe der an dem Hebel angreifenden Drehmomente in Abhängigkeit von k.

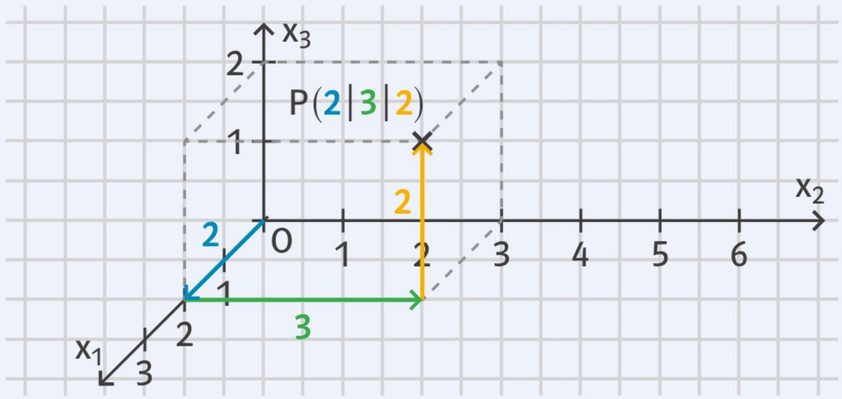
b) Berechnen Sie $\left|\overrightarrow{F_{3,k}}\right|$ für den Fall, dass der Hebel im Gleichgewicht ist.



Rückblick

Das dreidimensionale Koordinatensystem

Zur Beschreibung der Lage von Punkten im Raum benötigt man ein **dreidimensionales Koordinatensystem**. Dessen paarweise aufeinander senkrecht stehende Achsen werden mit x_1, x_2 und x_3 oder x, y und z bezeichnet. Die Koordinaten eines Punktes P werden als **Zahlentripel** $(p_1|p_2|p_3)$ angegeben.



Dargestellt ist der Punkt $P(2|3|2)$.

Vektoren

Ein **Vektor in der Ebene bzw. im Raum** wird durch die Angabe von zwei bzw. drei Koordinaten vollständig beschrieben. Man schreibt

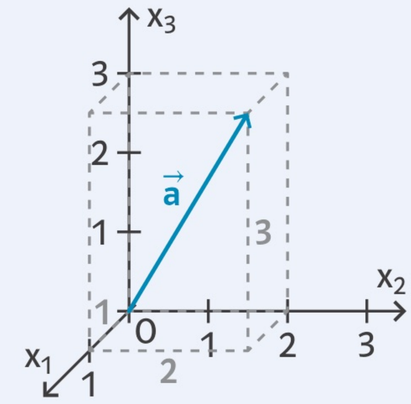
$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$.

Unter dem **Betrag eines Vektors** $\vec{a}$ versteht man die Länge eines zu $\vec{a}$ gehörenden Repräsentanten. Der Betrag von $\vec{a}$ wird mit $|\vec{a}|$ bezeichnet.

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ gilt $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$



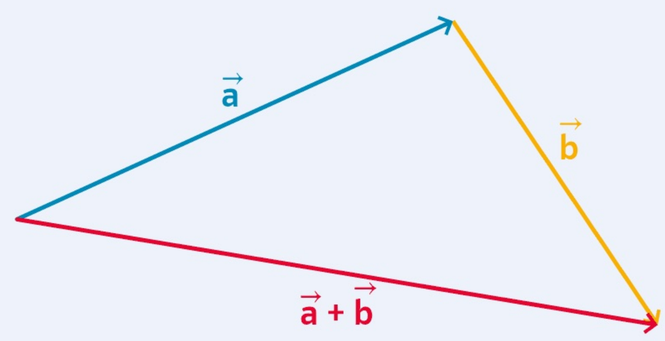
Dargestellt ist ein Repräsentant des Vektors $\vec{a}$.

Addition von Vektoren

Bei der Addition von Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erhält man einen Repräsentanten des Summenvektors $\vec{a} + \vec{b}$, indem man Repräsentanten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wie in der Abbildung rechts veranschaulicht aneinanderfügt.

Rechnerisch addiert man Vektoren koordinatenweise:

$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$.



S-Multiplikation

Für einen Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und eine reelle Zahl r gilt $r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}$.

$4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 28 \end{pmatrix}$

Skalarprodukt und Winkelgrößen

Ist φ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$, so heißt die reelle Zahl $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ das **Skalarprodukt** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

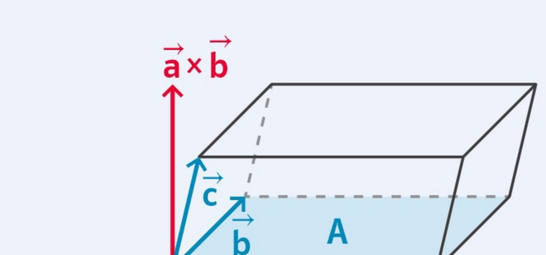
Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gilt $\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

Die Größe des Winkels zwischen gegebenen Vektoren berechnet man mittels $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Zwei Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ sind genau dann zueinander orthogonal, wenn $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$ gilt.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$



$\vec{a} \circ \vec{b} = 2 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) + 1 \cdot 0 = 14$

$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{14}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}}$

$= \frac{14}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15} \Rightarrow \varphi \approx 21°$

Das Vektorprodukt

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ nennt man den Vektor $\begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ das **Vektorprodukt** aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und schreibt $\vec{a} \times \vec{b}$. Wenn der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ nicht der Nullvektor ist, dann ist er orthogonal zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$.

Der **Flächeninhalt A des Parallelogramms**, das von den Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ aufgespannt wird, beträgt $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

Das **Volumen V des Spats**, der von den Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ und $\vec{c} \neq \vec{0}$ aufgespannt wird, beträgt $|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$.

$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 5 - 1 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 2 - (-3) \cdot 5 \\ (-3) \cdot (-3) - 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$

$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$

→ Lösungen | Seite 299

1 Beschreiben Sie die Lage aller Punkte $P(2|y|3)$ mit $y \in \mathbb{R}$ im Koordinatensystem.

2 Bestimmen Sie die Koordinaten der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BA}$ und ihre Beträge für

a) $A(1|3|-3)$, $B(-2|2|3)$,

b) $A(1|1|1)$, $B(-1|2|1)$,

c) $A(4|2|0)$, $B(2|-1|3)$,

d) $A(1|6|3)$, $B(1|-3|1)$.

3 Berechnen Sie für $A(1|-1|2)$, $B(-1|4|5)$, $C(-3|-5|1)$ und $D(2|3|4)$ die Koordinaten von

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$,

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$,

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD}$,

d) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}$.

4 Gegeben sind die Punkte $A(2|-7|0)$, $B(5|1|-3)$ und $C(0|2|2)$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes D so, dass ABCD ein Parallelogramm ist.

b) Bestimmen Sie die Größen der Innenwinkel des Parallelogramms ABCD.

c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD.

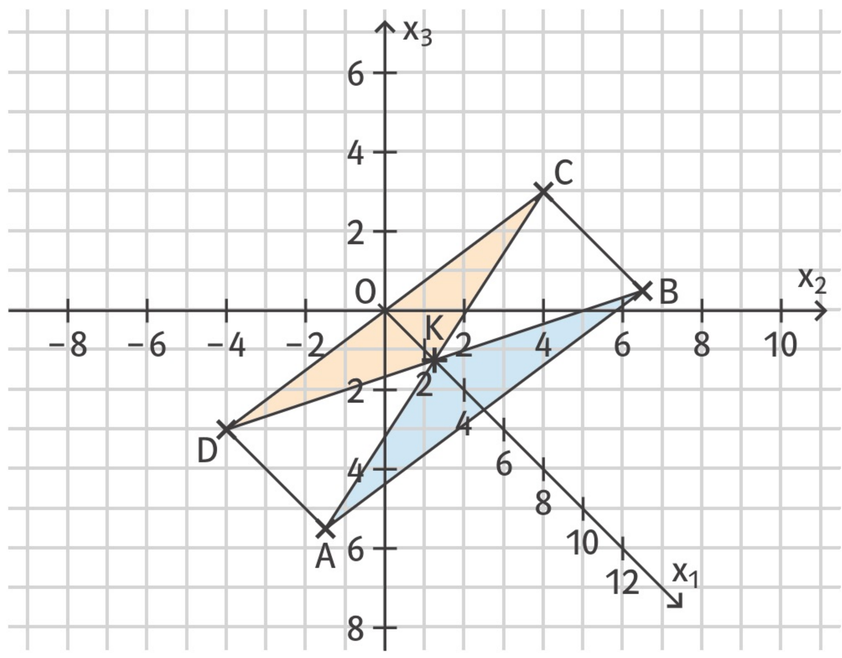
5 Gegeben ist ein Rechteck ABCD mit $A(5|-4|-3)$, $B(5|4|3)$, $C(0|4|3)$ und D.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D.

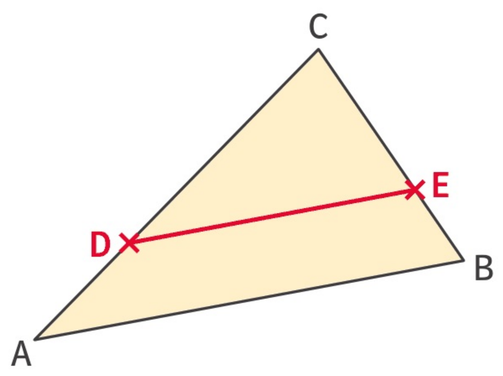
b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes K von ABCD.

c) Berechnen Sie die Flächeninhalte der Dreiecke ABK und BCK.

d) Beweisen Sie, dass die in Teilaufgabe c) berechnete Flächeninhaltsgleichheit für jedes Rechteck ABCD mit Diagonalenschnittpunkt K gilt.



6 In einem Dreieck ABC liegt ein Punkt D auf der Seite $\overline{AC}$ derart, dass $\overline{DC}$ doppelt so lang ist wie $\overline{DA}$, und E ein Punkt auf der Seite $\overline{BC}$, sodass $\overline{EC}$ doppelt so lang ist wie $\overline{EB}$.
Beweisen Sie, dass die Strecke $\overline{DE}$ parallel zur Strecke $\overline{AB}$ ist und ihre Länge zwei Drittel der Länge der Strecke $\overline{AB}$ beträgt.



7 Die Grundfläche einer Pyramide ist ein Dreieck mit den Punkten $A(-3|5|2)$, $B(4|-2|0)$ und $C(3|6|1)$. Die Spitze liegt im Punkt $S(2|4|8)$.

a) Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide.

b) Bestimmen Sie aus dem Volumen und dem Inhalt der Grundfläche die Länge der Höhe der Pyramide.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Fußpunktes F der Höhe der Pyramide mithilfe eines Vektors, der senkrecht zur Grundfläche steht.

d) Stellen Sie die Pyramide und ihre Höhe mithilfe einer 3D-Geometriesoftware dar und benutzen Sie die Veranschaulichung für die folgenden Teilaufgaben.

e) Zeigen Sie, dass sich das Volumen der Pyramide nicht verändert, wenn die Spitze S der Pyramide den Ortsvektor $\begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix}5\\9\\0\end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$ hat.
Erläutern Sie, was das Ergebnis für die relative Lage des Vektors $\begin{pmatrix}5\\9\\0\end{pmatrix}$ zur Grundfläche bedeutet.

f) Erläutern Sie, wie sich der in Teilaufgabe e) gefundene Zusammenhang mithilfe des Vektor- und Skalarprodukts überprüfen lässt.

Strategisch vorgehen

Für das Lösen von Aufgaben, bei denen man den Lösungsweg nicht unmittelbar erkennt, können die im Folgenden vorgestellten Hilfsmittel und Strategien nützlich sein.

Veranschaulichen durch eine informative Figur bzw. Skizze

Bei vielen Problemstellungen ist es hilfreich, eine gegebene Situation mithilfe einer geeigneten Figur oder Skizze grafisch zu veranschaulichen. Dadurch sieht man die Situation unter einem anderen Blickwinkel. Beispielsweise ist in der Stochastik häufig ein Baumdiagramm oder eine Vierfeldertafel hilfreich.

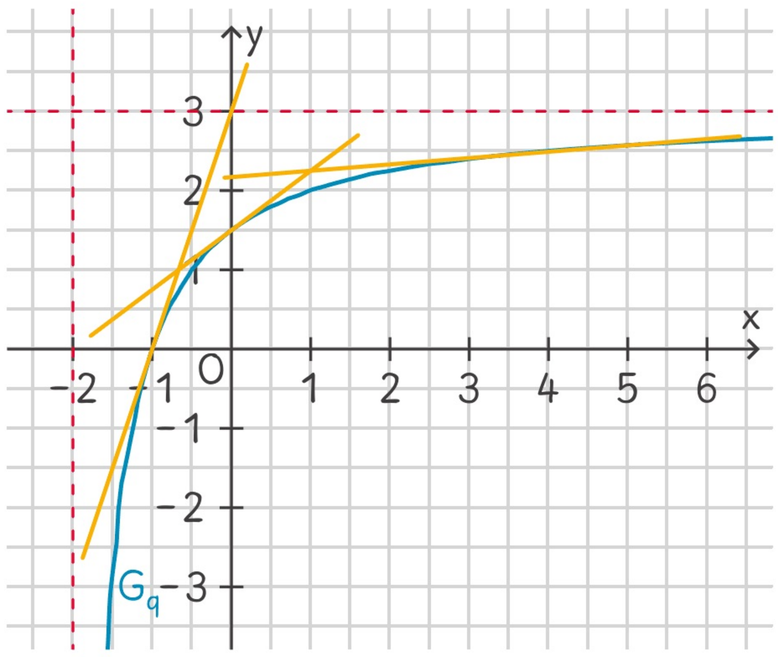
Aufgabe „Tangenten an einen Funktionsgraphen“

Gegeben ist die Funktion $q: x \mapsto -\frac{3}{x+2} + 3$ mit $D =]-2; +\infty[$. Die Tangenten an den Graphen G_q von q haben die Gleichung $y = m \cdot x + t$. Ermitteln Sie alle Werte von m und t, die angenommen werden können.

Lösung

Mithilfe der beiden Asymptoten mit den Gleichungen $x = -2$ und $y = 3$ sowie z. B. den Funktionswerten $q(-1) = 0$, $q(0) = 1{,}5$ und $q(4) = 2{,}5$ kann man eine aussagekräftige Skizze des Graphen G_q von q erstellen. Durch Ergänzen von beispielsweise drei geeigneten Tangenten kann man die Situation gut erfassen und sich die Lösung der Aufgabe überlegen:

- Für $x \to -2$ werden die Steigungswerte m der Tangenten an G_q im Punkt $P(x \mid q(x))$ unendlich groß, für $x \to +\infty$ nähern sie sich immer mehr dem Wert 0 an. Somit gilt $m \in]0; +\infty[$.
- Die Tangente an G_q im Punkt $(0 \mid 1{,}5)$ hat unter allen Tangenten den kleinsten y-Achsenabschnitt t. Für $x \to -2$ werden die y-Achsenabschnitte t der Tangenten an G_q im Punkt $P(x \mid q(x))$ unendlich groß. Somit gilt $t \in [1{,}5; +\infty[$.



Antwort: Es können Werte $m \in]0; +\infty[$ und $t \in [1{,}5; +\infty[$ angenommen werden.

Systematisches Probieren

Beim systematischen Probieren nimmt man Zahlenwerte als Lösung an und berechnet mit ihnen – z. B. im Sachzusammenhang – einen Wert, der mit einem anderen Wert verglichen wird. Stimmen die Werte nicht überein oder ist der berechnete Wert bezüglich der Problemstellung noch nicht passend, dann unternimmt man einen weiteren Versuch (vgl. Aufgabe „Abiturprüfung 2023 …“, Seite 257). Manchmal hilft ein systematisches (Aus-)Probieren, um eine vorhandene Struktur zu erkennen. Dies kann z. B. für höhere Ableitungen einer Funktion von Nutzen sein (vgl. folgende Aufgabe).

Aufgabe „Funktionen“

Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto -x \cdot \cos(x)$. Ermitteln Sie die 22. Ableitung $g^{(22)}$ von g und den Wert $g^{(22)}(0)$.

Lösung

Durch sukzessives Bilden von Ableitungen immer höherer Ordnung wird versucht, eine Struktur zu erkennen:

$g'(x) = -1 \cdot \cos(x) + (-x) \cdot (-\sin(x)) = -\cos(x) + x \cdot \sin(x)$

$g''(x) = \sin(x) + 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x) = 2\sin(x) + x \cdot \cos(x)$

$g'''(x) = 2\cos(x) + 1 \cdot \cos(x) + x \cdot (-\sin(x)) = 3\cos(x) - x \cdot \sin(x)$

$g^{(4)}(x) = \ldots = -4\sin(x) - x \cdot \cos(x)$

$g^{(5)}(x) = \ldots = -5\cos(x) + x \cdot \sin(x)$

$g^{(6)}(x) = \ldots = 6\sin(x) + x \cdot \cos(x)$

$g^{(7)}(x) = \ldots = 7\cos(x) - x \cdot \sin(x)$

Die Ableitungen $g'(x)$ und $g^{(5)}(x)$, $g''(x)$ und $g^{(6)}(x)$ sowie $g'''(x)$ und $g^{(7)}(x)$ unterscheiden sich jeweils nur im Koeffizienten vor dem ersten Summanden; der Betrag des Koeffizienten entspricht jeweils dem Grad der Ableitung. Diese Struktur setzt sich fort. Da man von der Zahl 6 in Viererschritten auf die Zahl 22 kommt, ergibt sich für die 22. Ableitung von g der Term $g^{(22)}(x) = 22\sin(x) + x \cdot \cos(x)$ und somit $g^{(22)}(0) = 0$.

Antwort: Man erhält $g^{(22)}: x \mapsto 22\sin(x) + x \cdot \cos(x)$ und $g^{(22)}(0) = 0$.

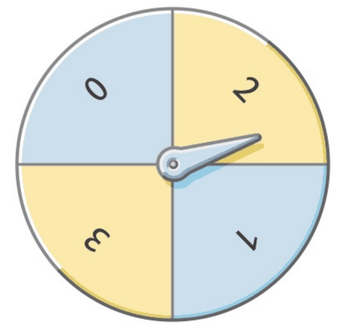
Aufgabe „Abiturprüfung 2023 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, daraus Teilaufgabe 4 b)“

Im Folgenden wird ein Glücksrad mit n gleich großen Sektoren, die mit den Zahlen von 0 bis $n - 1$ durchnummeriert sind, betrachtet. Das Glücksrad wird n-mal gedreht. Ermitteln Sie den kleinstmöglichen Wert von n, für den die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Zahlen verschieden sind, kleiner als 1% ist.

Lösung

Um die Problemstellung besser zu überblicken, wählt man für n beispielsweise den konkreten Wert 4 und berechnet damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Zahlen verschieden sind:
Bei viermaligem Drehen gibt es insgesamt $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4$ verschiedene Ergebnisse. Darunter sind $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ günstige Ergebnisse. Damit erhält man für $n = 4$ die Wahrscheinlichkeit $\frac{4!}{4^4} \approx 9{,}4\%$. Da dieser Wert größer als 1% ist, berechnet man die Wahrscheinlichkeit in analoger Weise für weitere Werte von n und überprüft jeweils, ob das Ergebnis kleiner als 1% ist:
$n = 6$: $\frac{6!}{6^6} \approx 1{,}5\% > 1\%$, $\quad n = 7$: $\frac{7!}{7^7} \approx 0{,}6\% < 1\%$.

Antwort: Es ergibt sich 7 als kleinstmöglicher Wert von n.



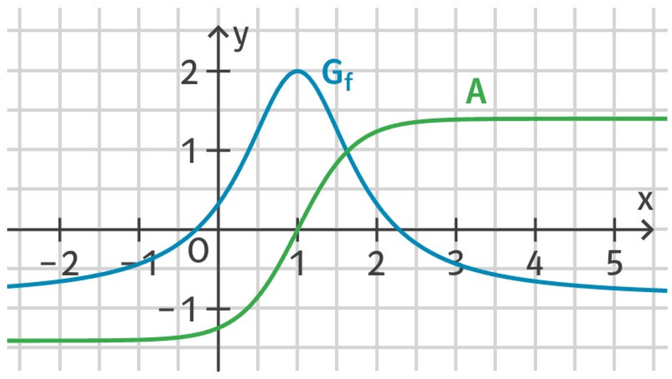
Ein günstiges Ergebnis ist z. B. 2 – 0 – 3 – 1.

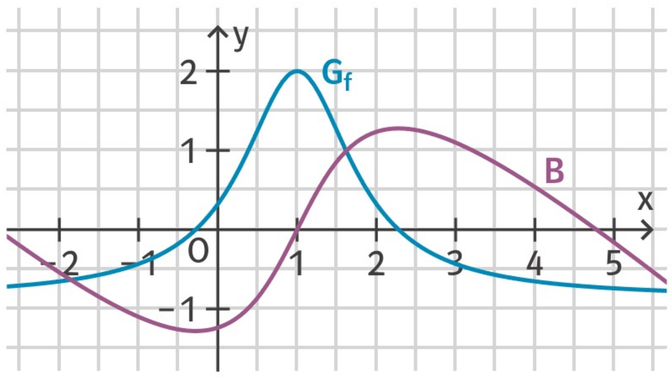
Ausschlussprinzip

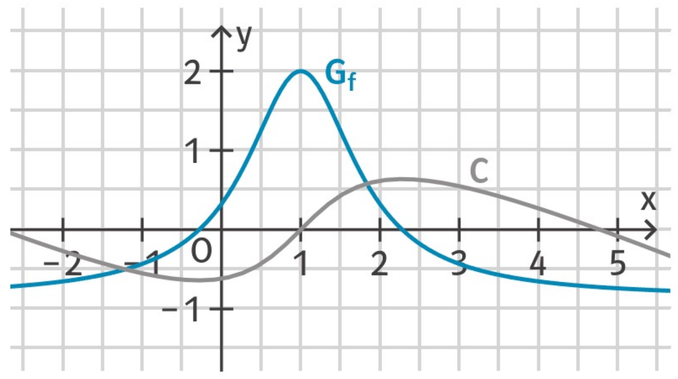
Muss man bei einer Problemstellung aus mehreren vorhandenen „Lösungen“ die richtige auswählen, ist es oft sinnvoll (und einfacher) zu begründen, warum die „falschen Lösungen“ nicht infrage kommen können.

Aufgabe „Stammfunktionsgraphen“

Jede der drei Abbildungen zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f und einen weiteren Graphen. Einer der Graphen A, B und C ist der Graph einer Stammfunktion F von f. Beurteilen Sie, welcher der Graphen A, B und C dies ist.







Lösung

Da G_f bei $x \approx 2{,}3$ die x-Achse schneidet, muss der Graph einer Stammfunktion von f an dieser Stelle eine waagerechte Tangente haben. Somit kann Graph A ausgeschlossen werden.
Die Steigung von Graph C im Punkt $(1\,|\,0)$ hat etwa den Wert 1 und ist damit kleiner ist als $F'(1) = f(1) = 2$. Daher kann Graph C ausgeschlossen werden.

Antwort: Graph B ist der Graph einer Stammfunktion von f.

Aufgabe „Abiturprüfung 2022 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, daraus Teilaufgabe c)“

Gegeben ist die in $[0; 10]$ definierte Funktion $f: x \mapsto 2 \cdot \sqrt{10x - x^2}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.
Der Graph G_f ist rechtsgekrümmt. Einer der folgenden Terme ist ein Term der zweiten Ableitungsfunktion f'' von f.
Beurteilen Sie, ob dies Term I oder Term II ist, ohne einen Term von f'' zu berechnen.

$$\text{I}\quad f''(x) = \frac{50}{(x^2 - 10x) \cdot \sqrt{10x - x^2}} \qquad \text{II}\quad f''(x) = \frac{50}{(10x - x^2) \cdot \sqrt{10x - x^2}}$$

Lösung

Es wird angenommen, dass Term II der gesuchte Term ist. Dann würde gelten: $f''(1) = \frac{50}{(10 - 1) \cdot \sqrt{10 - 1}} = \frac{50}{9 \cdot 3} > 0$.
Dies steht im Widerspruch dazu, dass G_f rechtsgekrümmt ist. Damit kann Term II ausgeschlossen werden.

Antwort: Term I ist ein Term von f''.

Betrachten von etwas Gegenteiligem

Manchmal ist es bei Problemstellungen einfacher, etwas Gegenteiliges zu betrachten:

- Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A ist es manchmal einfacher, die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{A})$ des Gegenereignisses $\overline{A}$ zu bestimmen und den Zusammenhang $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ zu nutzen (vgl. Aufgabe „Gegenereignis“).
- Bei Begründungen kann es von Vorteil sein, ein Gegenbeispiel zu finden (vgl. Aufgabe „Gegenbeispiel“).

Aufgabe „Gegenereignis“

Für eine mehrwöchige Werbeaktion versteckt ein Müslihersteller in manchen Packungen des neu entwickelten Müslis „Früchteglück“ Gutscheine (vgl. Werbeplakat).

a) In zufälliger Sortierung gelangen die Müsli-Packungen in das für die Werbeaktion aufgebaute Regal in einem Lebensmittelgeschäft. Frau Rieger kauft jede Woche eine Packung „Früchteglück“. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie spätestens in der vierten Woche den ersten Gutschein erhält.

b) Für einen Sonderverkauf zum Abschluss der Werbewochen werden Aktionsrestbestände und nicht mit Gutscheinen versehene „Früchteglück“-Packungen gemischt, sodass der Anteil p der Packungen mit Gutschein nicht mehr bekannt ist. Herr Albers ersteht bei diesem Sonderverkauf zehn Packungen „Früchteglück“. Ermitteln Sie, wie groß der Anteil p mindestens sein müsste, damit Herr Albers mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % mindestens einen Gutschein erhält.

Lösung

a) Das Ereignis A: „Frau Rieger erhält spätestens in der vierten Woche den ersten Gutschein“ hat das Gegenereignis $\overline{A}$: „Frau Rieger erhält in den ersten vier Wochen keinen Gutschein.“ Die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Einkauf eine Packung ohne Gutschein zu erhalten, beträgt $1 - \frac{1}{4} = 0{,}75$. Somit ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(A)$: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 = 1 - 0{,}75^4 \approx 68{,}4\,\%$.

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Frau Rieger spätestens in der vierten Woche den ersten Gutschein erhält, beträgt ca. 68,4 %.

b) Es muss gelten: $P(\text{„In zehn Packungen mindestens ein Gutschein.“}) > 0{,}9$.
Unter Verwendung des Gegenereignisses „In zehn Packungen kein Gutschein“ ergibt sich daraus:

$1 - P(\text{„In zehn Packungen kein Gutschein.“}) > 0{,}9$

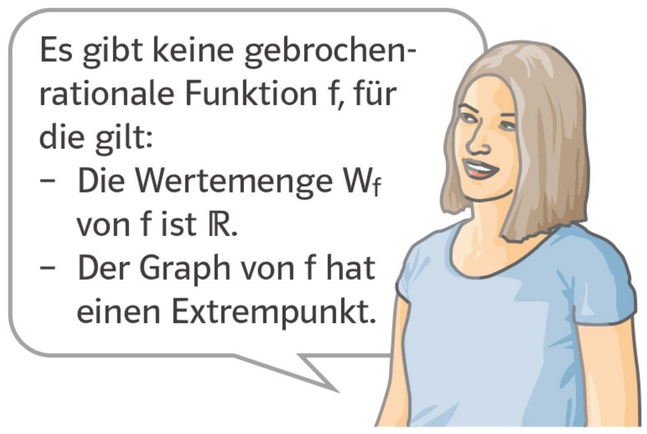
$\Leftrightarrow 1 - (1-p)^{10} > 0{,}9 \Leftrightarrow (1-p)^{10} < 0{,}1 \Leftrightarrow 1 - p < \sqrt[10]{0{,}1} \Leftrightarrow p > 1 - \sqrt[10]{0{,}1} \approx 0{,}206$

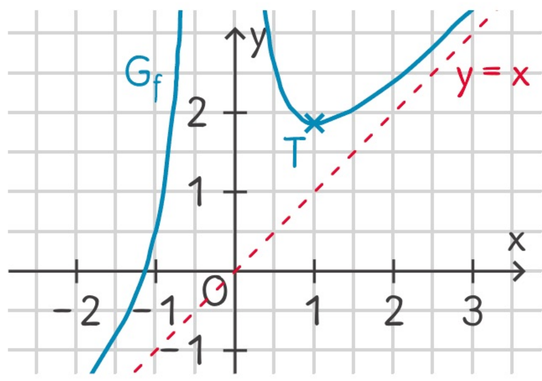
Antwort: Der Anteil p muss mindestens 0,206 betragen.

Aufgabe „Gegenbeispiel“

Beurteilen Sie, ob Merle mit ihrer Aussage recht hat.

Lösung





Mithilfe einer Skizze ergibt sich die Idee, dass es doch eine gebrochen-rationale Funktion f mit den von Merle genannten Eigenschaften geben könnte, z. B. eine Funktion, die für $x = 0$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel hat und deren Graph die Asymptote mit der Gleichung $y = x$ besitzt. Eine mögliche Funktion wäre die in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ definierte Funktion f mit $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$. Aus Grenzwertüberlegungen ergibt sich, dass f die genannten Eigenschaften besitzt: Aus $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$ folgt $W_f = \mathbb{R}$.

Aus $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ folgt, dass G_f für $x > 0$ einen Tiefpunkt besitzt.

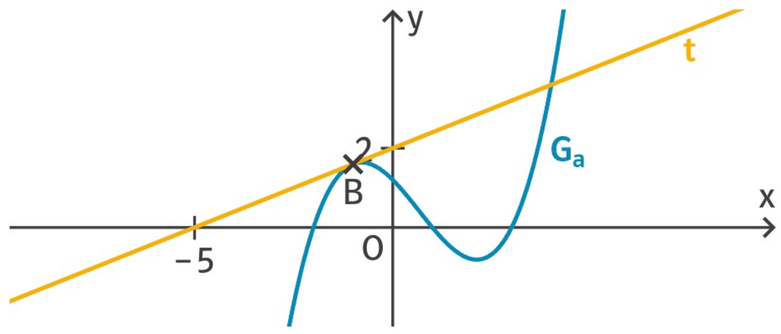
Antwort: Die Funktion f mit $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ und $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist ein Gegenbeispiel; Merle hat also nicht recht.

Aufstellen und Lösen einer Gleichung

Es gibt Problemstellungen, bei denen es möglich ist, gegebene Größen oder Informationen mithilfe einer (ggf. erst-einzuführenden) Variablen so zueinander in Beziehung zu setzen, dass eine Gleichung aufgestellt werden kann.

Aufgabe „Bestimmung eines Funktionsterms“

Gegeben ist die Funktion $f_a: x \mapsto a x^3 - 2a x^2 - x + 6a$ mit $a \in \mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_a für einen bestimmten Wert von a sowie die Tangente an G_a im Punkt $B(-1 \mid f_a(-1))$. Bestimmen Sie den Wert von a.



Lösung

Aus der Abbildung ergibt sich für die Tangentensteigung der Wert $\frac{2}{5}$.
Mithilfe des Ableitungsterms $f_a'(x) = 3a x^2 - 4a x - 1$ ergibt sich daraus
$f_a'(-1) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 3a(-1)^2 - 4a \cdot (-1) - 1 = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 3a + 4a - 1 = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 7a = \frac{7}{5} \Leftrightarrow a = \frac{1}{5}$.

Aufgabe „Abiturprüfung 2023 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, daraus Teilaufgabe 3 c)

Die Sektoren des abgebildeten Glücksrads sind gleich groß und mit den Zahlen von 0 bis 9 durchnummeriert. Mit dem Glücksrad wird ein Spiel durchgeführt. Jeder Spieler darf das Glücksrad beliebig oft drehen. Beendet er das Spiel selbst, bevor er eine „0“ erzielt, so wird ihm die Summe der erzielten Zahlen in Euro ausgezahlt. Erzielt er eine „0“, so ist das Spiel dadurch beendet und es erfolgt keine Auszahlung. Wenn sich ein Spieler vor dem Spiel dafür entscheidet, das Glücksrad, sofern er keine „0“ erzielt, n-mal zu drehen, dann kann der Erwartungswert für die Auszahlung mit dem Term $5n \cdot 0{,}9^n$ berechnet werden. Beurteilen Sie die folgende Aussage:
Es gibt zwei, aber nicht drei aufeinanderfolgende Werte von n, für die die Erwartungswerte für die Auszahlung übereinstimmen.

Lösung

Gleichsetzen der Terme für die Erwartungswerte zweier aufeinanderfolgender Drehzahlen ergibt
$5n \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n = 5 \cdot (n+1) \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n+1} \Leftrightarrow n = (n+1) \cdot \frac{9}{10} \Leftrightarrow n = 9$.
Antwort: Damit sind 9 und 10 die einzigen aufeinanderfolgenden Werte von n, für die die Erwartungswerte für die Auszahlung übereinstimmen. Die Aussage ist also wahr.

Aufstellen und Lösen eines Gleichungssystems

Es gibt Problemstellungen, bei denen es möglich ist, gegebene Größen oder Informationen mithilfe von geeigneten Variablen so zueinander in Beziehung zu setzen, dass verschiedene Gleichungen aufgestellt werden können. Durch Lösen dieser Gleichungen gelangt man dann zur Lösung des gegebenen Problems.

Aufgabe

Betrachtet wird die Funktionenschar $h_{a,b}: x \mapsto a x^3 + b x + 1{,}2$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Die Tangente g an den Graphen von $h_{a,b}$ im Punkt $P(3 \mid 0)$ schließt mit den Koordinatenachsen im I. Quadranten ein Dreieck mit dem Inhalt $A_\Delta = 9{,}9$ ein. Berechnen Sie die zugehörigen Werte von a und b.

Lösung

Mithilfe der gegebenen Informationen und des Ableitungsterms $h_{a,b}'(x) = 3a x^2 + b$ erhält man drei Gleichungen.
(I) $P(3 \mid 0)$ liegt auf dem Graphen von $h_{a,b}$: $0 = 27a + 3b + 1{,}2$
(II) Für das rechteckige Dreieck gilt $A_\Delta = 9{,}9$: $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot t = 9{,}9$ (t ist der y-Achsenabschnitt der Tangente g.)
(III) $P(3 \mid 0)$ liegt auf g, deren Steigung $h_{a,b}'(3)$ ist: $0 = h_{a,b}'(3) \cdot 3 + t \Leftrightarrow 0 = (27a + b) \cdot 3 + t \Leftrightarrow 0 = 81a + 3b + t$
Aus (II) folgt $t = 6{,}6$ und somit für Gleichung (III): $0 = 81a + 3b + 6{,}6$.
Damit ergibt sich (III) − (I): $0 = 54a + 5{,}4 \Leftrightarrow a = -0{,}1$. Zum Beispiel mithilfe von (I) folgt daraus $b = \frac{-27 \cdot (-0{,}1) - 1{,}2}{3} = 0{,}5$.

Antwort: Die zugehörigen Werte sind $a = -0{,}1$ und $b = 0{,}5$.

Werkzeugsammlung erstellen und nutzen

Neben Problemstellungen, bei denen der Lösungsweg nicht unbedingt direkt ersichtlich ist, gibt es (häufig) wiederkehrende grundlegende Aufgabenstellungen (im Folgenden Standardaufgaben genannt), die nach einem festen „Schema“ gelöst werden können. Um derartige Standardaufgaben sicher zu lösen, ist es hilfreich, den Lösungsplan gut verinnerlicht zu haben. Um Letzteres zu realisieren, bietet es sich an, selbst einen solchen Lösungsplan in beschreibender Form zu erstellen und ein konkretes Aufgabenbeispiel zu ergänzen. Dies kann z. B. mithilfe einer Karteikarte geschehen:
Auf die Vorderseite der Karteikarte schreibt man das Thema der Standardaufgabe, auf die Rückseite die Beschreibung des Lösungswegs und das Aufgabenbeispiel. Mit einem solchen „Werkzeug“ lassen sich dann das Beschreiben bzw. Erläutern von Lösungswegen (das insbesondere auch in einer mündlichen Abiturprüfung von großer Bedeutung ist) und das sichere Lösen von Standardaufgaben gut trainieren.

Beispiel „Bestimmung der Gleichung einer Tangente an einen Graphen“

Karteikarten-Vorderseite (es ist nur der hier wesentliche obere Teil abgebildet):

Werkzeugsammlung

Eintrag 1

Bestimmen einer Gleichung der Tangente an den Graphen einer Funktion f im Punkt $P(a|f(a))$.

Karteikarten-Rückseite:

Gegeben: Funktion f, Punkt $P(a|f(a))$ auf dem Graphen G_f

- Ermittle den Term $f'(x)$ der Ableitung von f.
- Berechne den Wert der Ableitung $f'(a)$.
- Berechne den Funktionswert $f(a)$.
- Bestimme mithilfe der Gleichung

  $f(a) = f'(a) \cdot a + t$

  den y-Achsenabschnitt der Tangente mit der Gleichung $y = f'(a) \cdot x + t$.

Beispiel: $f: x \mapsto x^2 + x$ und $P(1|f(1))$ gegeben

$f'(x) = 2x + 1$

$f'(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

$f(1) = 1^2 + 1 = 2$

$2 = 3 \cdot 1 + t \Leftrightarrow t = -1$

Tangentengleichung: $y = 3x - 1$.

Zusammenstellung möglicher Themen für die Werkzeugsammlung

Analysis

- Lösen quadratischer Gleichungen, inklusive der Berücksichtigung von Spezialfällen wie z.B. $x^2 - c = 0$
- Bestimmen von Nullstellen ganzrationaler Funktionen
- Untersuchen von Funktionsgraphen auf Symmetrie zum Koordinatensystem
- Verschieben und Strecken von Funktionsgraphen
- Bestimmen der maximalen Definitionsmenge und der Nullstellen von gebrochen-rationalen Funktionen
- Angeben der Arten von Asymptoten von Graphen gebrochen-rationaler Funktionen und Bestimmen ihrer Gleichungen
- Bestimmen der Koordinaten der Schnittpunkte eines Funktionsgraphen mit den Koordinatenachsen
- Bestimmen der Koordinaten von Schnittpunkten zweier Funktionsgraphen G_f und G_g
- Berechnen der mittleren Änderungsrate einer Funktion f und Erläutern ihrer Bedeutung
- Berechnen der momentanen Änderungsrate einer Funktion f und Erläutern ihrer Bedeutung
- Vorgehen beim Skizzieren des Graphen der Ableitungsfunktion f' (bei gegebenem Graphen einer Funktion f)
- Vorgehen beim Ableiten einer ganzrationalen Funktion f
- Bestimmen einer Gleichung der Tangente an den Graphen einer Funktion f im Punkt $P(a|f(a))$
- Ermitteln von Monotonieintervallen einer Funktion f
- Ermitteln von Krümmungsintervallen des Graphen einer Funktion f
- Bestimmen von Extremstellen einer Funktion f bzw. der Koordinaten von Extrempunkten eines Funktionsgraphen G_f
- Bestimmen von Wendestellen einer Funktion f bzw. der Koordinaten von Wendepunkten eines Funktionsgraphen G_f
- Ermitteln der Stammfunktion F einer ganzrationalen Funktion f (wobei ein gegebener Punkt auf G_F liegt)
- Vorgehen beim Skizzieren des Graphen einer Stammfunktion F (bei gegebenem Graphen einer Funktion f)
- Vorgehen beim Ableiten unter Verwendung der Produktregel
- Vorgehen beim Ableiten unter Verwendung der Kettenregel
- Vorgehen beim Ableiten unter Verwendung der Quotientenregel
- Vorgehen beim Ableiten von Verknüpfungen mit der natürlichen Exponentialfunktion
- Vorgehen beim Ableiten von Verknüpfungen mit der natürlichen Logarithmusfunktion
- Vorgehen beim Ableiten von Verknüpfungen mit der Wurzelfunktion
- Bestimmen der maximalen Definitionsmenge und der Nullstellen von Verknüpfungen mit der natürlichen Logarithmusfunktion und der Wurzelfunktion
- Nachweisen der Umkehrbarkeit einer Funktion f
- Ermitteln des Terms $f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion f^{-1} einer Funktion f
- Erläutern des Zusammenhangs zwischen dem Graphen einer Funktion f und dem Graphen ihrer Umkehrfunktion f^{-1}
- Berechnen von Grenzwerten von Verknüpfungen mit der e-Funktion und von Verknüpfungen mit der ln-Funktion

Stochastik

- Unterscheiden der beiden Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ und $P(A \cap B)$ für zwei Ereignisse A und B
- Prüfen zweier Ereignisse A und B auf stochastische Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit
- Ermitteln von Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung einer Zufallsgröße X
- Berechnen von Anzahlen und Wahrscheinlichkeiten beim Ziehen mit Beachtung der Reihenfolge
- Berechnen von Anzahlen und Wahrscheinlichkeiten beim Ziehen ohne Beachtung der Reihenfolge
- Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten einer binomialverteilten Zufallsgröße
- Ermitteln des Ablehnungsbereichs eines einseitigen Signifikanztests (bei gegebenem Signifikanzniveau)
- Vorgehen beim Lösen einer „Dreimal-mindestens-Aufgabe“

Geometrie

- Ermitteln des Abstands zweier Punkte
- Begründen, dass ein gegebenes Viereck ein Quadrat/Rechteck/Parallelogramm/(achsensymmetrisches) Trapez ist
- Bestimmen der Größe des Winkels zwischen zwei Vektoren
- Ermitteln von Flächeninhalten bzw. Volumina mithilfe des Vektorprodukts
- Bestimmen von Volumina mit Formeln aus der Mittelstufe und Erläuterung, wann dieses Vorgehen sinnvoll ist
- Anwenden des Satzes von Pythagoras bei Berechnungen an Figuren und Körpern

Check-in zu Kapitel I

Schätzen Sie sich mithilfe der Checkliste ein.

1. Ich kann die Steigung eines Graphen an einer Stelle bestimmen.
2. Ich kann die erste und zweite Ableitungsfunktion grafisch und rechnerisch bestimmen.
3. Ich kann die Gleichung einer Tangente an den Graphen und die Größe ihres Steigungswinkels bestimmen.
4. Ich kann Funktionen auf Monotonie und Funktionsgraphen auf Krümmung untersuchen.
5. Ich kann lokale und globale Extremstellen sowie Wendestellen einer Funktion ermitteln.

Lerntipps

zu 1. Grundwissen 11/12
zu 2. Grundwissen 11/12
zu 3. Grundwissen 11/12
zu 4. Grundwissen 11/12
zu 5. Grundwissen 11/12

Überprüfen Sie Ihre Einschätzungen anhand der zugehörigen Aufgaben.

→ Lösungen | Seite 300

1 Die Steigung eines Graphen bestimmen

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{3}x^4 - 2x^2 + 1$. Bestimmen Sie die Steigung des Graphen von f an der Stelle 3.

2 Erste und zweite Ableitungsfunktion grafisch und rechnerisch bestimmen

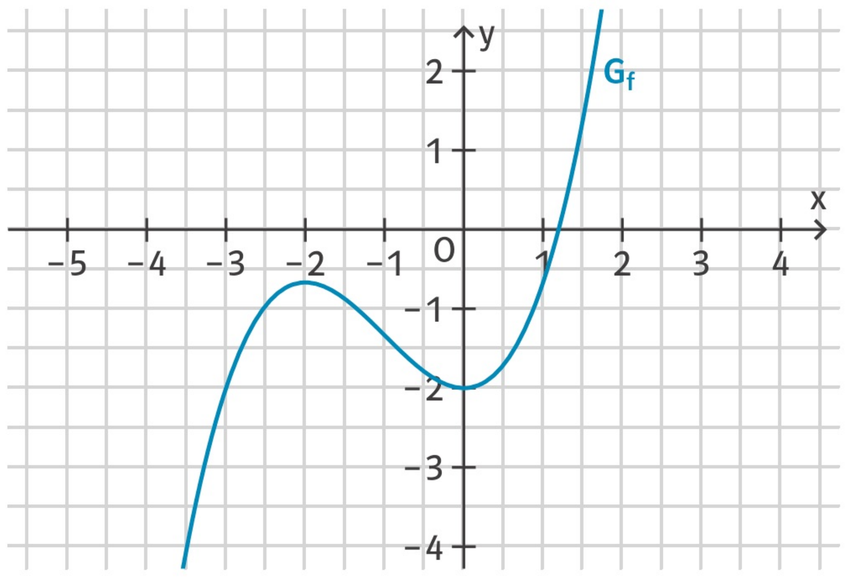
Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2$.

Die Abbildung zeigt ihren Graphen.

a) Übertragen Sie die Abbildung ins Heft und skizzieren Sie die Graphen der ersten und der zweiten Ableitungsfunktion von f.

b) Bestimmen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$.

c) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie die Graphen von f, f′ und f″ mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware darstellen.



3 Die Gleichung einer Tangente an den Graphen und die Größe ihres Steigungswinkels bestimmen

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 1$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(3 \mid f(3))$ und die Größe ihres Steigungswinkels.

4 Funktionen auf Monotonie und Funktionsgraphen auf Krümmung untersuchen

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 1$.

a) Bestimmen Sie die Monotonieintervalle von f und die Bereiche, in denen der Graph von f links- bzw. rechtsgekrümmt ist.

b) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie den Graphen von f mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware darstellen.

5 Lokale und globale Extremstellen sowie Wendestellen einer Funktion ermitteln

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 1$.

a) Bestimmen Sie Art und Lage aller lokalen und globalen Extremstellen von f.

b) Bestimmen Sie alle Wendestellen von f.

c) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie den Graphen von f mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware darstellen.

Check-in zu Kapitel II

Schätzen Sie sich mithilfe der Checkliste ein.

1. Ich kann die Ketten- und die Produktregel anwenden.
2. Ich kann ganzrationale Funktionen und ihre Graphen untersuchen.
3. Ich kann das Verhalten einer einfachen gebrochen-rationalen Funktion für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ bestimmen.
4. Ich kann Eigenschaften von Exponentialfunktionen und deren Graphen beschreiben.
5. Ich kann Exponentialgleichungen mit dem Logarithmus lösen.
6. Ich kann Vorgänge mit exponentiellem Wachstum modellieren.

Lerntipps

zu 1. **Beispiele 1 und 2**, Seite 19
zu 2. **Grundwissen 11/12**
zu 3. **Grundwissen 11/12**
zu 4. **Grundwissen 9/10**
zu 5. **Grundwissen 9/10**
zu 6. **Grundwissen 9/10**

Überprüfen Sie Ihre Einschätzungen anhand der zugehörigen Aufgaben.

→ Lösungen | Seite 301

1 Ketten- und Produktregel anwenden

Bestimmen Sie einen Term der Ableitungsfunktion.

a) $f(x) = (3x^2 - 5x + 2) \cdot \cos(x)$

b) $f(x) = \frac{2}{7} \cdot \left(x^5 - \frac{1}{2}x^4\right)^{21}$

c) $f(x) = 1 + x \cdot \sin(x^2)$

d) $f(x) = (3x + 2)^4 \cdot (2x^2 - 1)^6 - 5$

2 Ganzrationale Funktionen und ihre Graphen untersuchen

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 2x^2 - 8x)$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet. Untersuchen Sie G_f auf Symmetrie zur y-Achse bzw. zum Ursprung. Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion sowie die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte von G_f. Skizzieren Sie anschließend G_f und überprüfen Sie den Graphen dann mithilfe eines Funktionenplotters.

3 Verhalten einer einfachen gebrochen-rationalen Funktion für $x \to \pm\infty$ bestimmen

Bestimmen Sie das Verhalten der Funktion f für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$.

a) $f: x \mapsto \frac{5x + 3}{1 - 4x^2}$

b) $f: x \mapsto \frac{12 - 9x - 1{,}5x^2}{-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 19}$

c) $f: x \mapsto \frac{-x \cdot (0{,}5x + 1)}{4 - 3x}$

d) $f: x \mapsto 3 - \frac{(2x - 1)^2}{2x^2 + 1}$

4 Eigenschaften von Exponentialfunktionen und deren Graphen beschreiben

Gegeben sind die Funktionen $f: x \mapsto 2^x$, $g: x \mapsto 2^{-x}$ und $h: x \mapsto 0{,}5 \cdot 2^x - 1$.

a) Zeichnen Sie die Graphen G_f, G_g und G_h in ein gemeinsames Koordinatensystem und beschreiben Sie, wie G_g und G_h aus G_f hervorgehen.

b) Bestimmen Sie das Verhalten von f, g und h für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$.

c) Geben Sie zu jeder Funktion das Monotonieverhalten und die Wertemenge an sowie die Koordinaten des Schnittpunktes des jeweiligen Graphen mit der y-Achse.

5 Exponentialgleichungen mit dem Logarithmus lösen

Bestimmen Sie die Lösung der Exponentialgleichung. Geben Sie zur exakten Lösung auch einen Näherungswert auf zwei Dezimalen genau an.

a) $3 \cdot 0{,}9^x - 2 = 0$

b) $2^{3x - 1} = 20$

c) $1{,}2^x = 1{,}2^{2 + x} - 1$

d) $5^x = 3^{2x + 1}$

6 Vorgänge mit exponentiellem Wachstum modellieren

Einem kranken Kaninchen wurde ein Antibiotikum verabreicht. Nach einer Stunde sind in seinem Blutserum 15,3 $\frac{mg}{l}$ des Wirkstoffs nachweisbar, nach drei Stunden sind es noch 4,4 $\frac{mg}{l}$.

a) Bestimmen Sie einen Term einer Funktion der Form $t \mapsto b \cdot a^t$, die die Wirkstoffkonzentration $\left(\text{in } \frac{mg}{l}\right)$ im Blutserum des Kaninchens in Abhängigkeit von der vergangenen Zeit t (in h) näherungsweise beschreibt.

b) Berechnen Sie, nach wie vielen Stunden das Antibiotikum spätestens erneut verabreicht werden muss, wenn die Wirkstoffkonzentration nicht unter 0,1 % des Maximalwerts sinken soll.

Check-in zu Kapitel III

Schätzen Sie sich mithilfe der Checkliste ein.

1. Ich kann das Zählprinzip bei der Bestimmung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten anwenden.
2. Ich kann die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mithilfe einer Vierfeldertafel bestimmen.
3. Ich kann die Pfadregeln bei der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten anwenden.
4. Ich kann die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ und $P_B(A)$ bestimmen.
5. Ich kann die stochastische Unabhängigkeit zweier Ereignisse anwenden.

Lerntipps

zu 1. Grundwissen 7/8
zu 2. Grundwissen 9/10
zu 3. Grundwissen 9/10
zu 4. Grundwissen 11/12
zu 5. Grundwissen 11/12

Überprüfen Sie Ihre Einschätzungen anhand der zugehörigen Aufgaben.

→ Lösungen | Seite 302

1 Laplace-Wahrscheinlichkeiten bestimmen und das Zählprinzip anwenden

Die Freunde Aslan, Bert und Charly sind bei einem 1000-m-Lauf unter den neun Teilnehmern am Start. Jeder der neun Läufer hat die gleiche Wahrscheinlichkeit, als Erster ins Ziel zu kommen.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Aslan, Bert und Charly die Plätze eins bis drei unter sich ausmachen.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keiner der Freunde einen der drei Plätze auf dem Siegerpodest erreicht.

2 Vierfeldertafel zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses verwenden

Bei einem Zufallsexperiment sind die Ereignisse A und B von Interesse. Die zugehörige Vierfeldertafel ist teilweise ausgefüllt.

	B	$\overline{B}$	
A		30 %	
$\overline{A}$	32 %		
		60 %	100 %

a) Beschreiben Sie mit Worten die Bedeutung der Zahl 30 % in der Vierfeldertafel.

b) Übertragen Sie die Tabelle in Ihr Heft und ergänzen Sie die fehlenden Einträge.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A \cup B$.

d) Zeichnen Sie zu der Vierfeldertafel ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm.

3 Pfadregeln bei der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten anwenden

Aus einer Urne mit zwei weißen und drei schwarzen Kugeln werden nacheinander drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

a) Zeichnen Sie ein zugehöriges vollständig beschriftetes Baumdiagramm.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(1) genau zwei schwarze Kugeln gezogen werden,

(2) mindestens eine weiße Kugel gezogen wird.

4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten bestimmen

Mit einem Test soll herausgefunden werden, ob eine Person mit einem Virus infiziert ist. In der Bevölkerung sind aktuell 0,1 % mit dem Virus infiziert. Der Test fällt bei 98 % der Infizierten positiv aus. Bei 99 % der Nichtinfizierten fällt der Test negativ aus. Adals Test ist positiv. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Adal tatsächlich infiziert ist.

5 Stochastische Unabhängigkeit zweier Ereignisse anwenden

Zu den stochastisch unabhängigen Ereignissen A und B gehört die abgebildete Vierfeldertafel. Übertragen Sie die Vierfeldertafel in Ihr Heft und vervollständigen Sie die Einträge.

	B	$\overline{B}$	
A			0,4
$\overline{A}$			
		0,25	

Check-in zu Kapitel IV

Schätzen Sie sich mithilfe der Checkliste ein.

1. Ich kann Sachzusammenhänge mit Bernoulli-Ketten modellieren.
2. Ich kann die Binomialverteilung bzw. deren kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilung bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten verwenden.
3. Ich kann eine Binomialverteilung durch Säulendiagramme und Histogramme veranschaulichen.
4. Ich kann den Erwartungswert und die Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsgröße berechnen.

Überprüfen Sie Ihre Einschätzungen anhand der zugehörigen Aufgaben.

→ Lösungen | Seite 303

1 Sachzusammenhänge mit Bernoulli-Ketten modellieren

Beurteilen Sie, ob man das Zufallsexperiment als Bernoulli-Kette modellieren kann. Geben Sie gegebenenfalls die Zufallsgröße X, die Länge n und die Trefferwahrscheinlichkeit p an.

a) Ein 3D-Drucker produziert Kunststoffteile. Darunter sind 7% Ausschuss. Es werden 25 Teile produziert und jeweils überprüft, ob das Teil in Ordnung ist.

b) In einem Brettspiel werden zwei faire Würfel gleichzeitig geworfen. Würfelt man einen Pasch, erhält man einen Bonus. Im Laufe eines Spiels würfelt ein Spieler 14-mal.

c) Achmed bearbeitet nacheinander fünf Mathematikaufgaben. Seine Lehrerin stellt jeweils fest, ob er die Aufgabe richtig oder falsch bearbeitet hat.

d) Eine Lostrommel enthält fünf Gewinnlose und 25 Nieten. Es werden drei Lose gezogen und jeweils festgestellt, ob man gewonnen hat.

e) Es wird fünfmal hintereinander so lange gewürfelt, bis eine Sechs erscheint. Dabei wird jeweils die Anzahl der Versuche notiert.

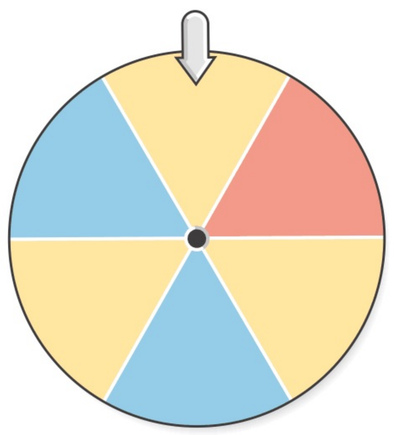
Bei einem Pasch zeigen beide Würfel die gleiche Augenzahl.

2 Die Binomialverteilung bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten verwenden

Nebenstehendes Glücksrad wird gedreht.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B, wenn zwanzigmal gedreht wird.
A: „Es erscheint sieben- oder achtmal Blau." B: „Es erscheint mehr als zehnmal Gelb."

b) Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\sum_{k=0}^{15} \binom{80}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(1-\frac{1}{6}\right)^{80-k}$ berechnet werden kann.



3 Eine Binomialverteilung veranschaulichen

Das Glücksrad aus Aufgabe 2 wird zehnmal gedreht.

a) Erstellen Sie mithilfe einer geeigneten Mathematiksoftware je ein Histogramm zu den Wahrscheinlichkeitsverteilungen folgender Zufallsgrößen.
X: „Anzahl, wie oft der rote Sektor getroffen wird."
Y: „Anzahl, wie oft ein gelber Sektor getroffen wird."
Z: „Anzahl, wie oft kein blauer Sektor getroffen wird."

b) Beschreiben Sie, wie sich die Histogramme mit wachsendem p verändern.

c) Markieren Sie in Ihren Histogrammen folgende Wahrscheinlichkeiten:
$P(X \geq 3)$, $P(Y < 4)$ und $P(5 \leq Z \leq 9)$.

4 Erwartungswert und Standardabweichung berechnen

Bei einer Sorte Blumenzwiebeln beträgt die Keimwahrscheinlichkeit 76%. Es werden 162 Zwiebeln gesetzt. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Zwiebeln an, die keimen.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der keimenden Zwiebeln um höchstens eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht.

Lerntipps

zu 1. **Lehrtext,** Seite 86

zu 2. **Beispiel 2,** Seite 91

zu 3. **Lehrtext,** Seiten 90 und 91

zu 4. **Beispiel 1,** Seite 102
Beispiel 2, Seite 103

Check-in zu Kapitel V

Schätzen Sie sich mithilfe der Checkliste ein.

1. Ich kann das Verhalten einer einfachen gebrochen-rationalen Funktion für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ bestimmen.
2. Ich kann das Verhalten einer einfachen gebrochen-rationalen Funktion für $x \to x_0$ bestimmen.
3. Ich kann Eigenschaften einer einfachen gebrochen-rationalen Funktion und ihres Graphen ermitteln.
4. Ich kann Funktionsterme einfacher gebrochen-rationaler Funktionen ermitteln.
5. Ich kann geeignete Software im Umgang mit Funktionen verwenden.

Lerntipps

zu 1. Grundwissen 11/12
zu 2. Grundwissen 11/12
zu 3. Grundwissen 11/12
zu 4. Grundwissen 11/12

Überprüfen Sie Ihre Einschätzungen anhand der zugehörigen Aufgaben.

1 Verhalten einer einfachen gebrochen-rationalen Funktion für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ bestimmen

Lösungen | Seite 304

a) Im Folgenden sind zwei Lösungswege zur Bestimmung des Verhaltens der Funktion $f: x \mapsto \frac{2x^2-4}{(x-1)(x+5)}$ für $x \to +\infty$ dargestellt. Beschreiben Sie beide Vorgehensweisen.

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2-4}{(x-1)(x+5)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2-4}{x^2-x+5x-5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2-4}{x^2+4x-5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2-4}{1x^2+4x-5} = \frac{2}{1} = 2$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2-4}{(x-1)(x+5)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2-4}{x^2+4x-5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(2-\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2-\frac{4}{x^2}}{1+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2$

b) Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionen $f: x \mapsto \frac{4}{(-x-2)x}$ und $g: x \mapsto \frac{2x^2-4}{5x}$ für $x \to -\infty$.

2 Verhalten einer einfachen gebrochen-rationalen Funktion für $x \to x_0$ bestimmen

Geben Sie die Polstelle von f und Ihre Art an. Bestimmen Sie die angegebenen Grenzwerte.

a) $f: x \mapsto \frac{x-1}{x+2}$; $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x)$ und $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x)$

b) $f: x \mapsto \frac{x}{(x-4)^2}$; $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} f(x)$ und $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x > 4}} f(x)$

3 Eigenschaften einer einfachen gebrochen-rationalen Funktion und ihres Graphen ermitteln

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2}{2(x+1)}$ mit $D = D_{max}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Geben Sie die Definitionsmenge und die Nullstellen von f an.

b) Zeigen Sie, dass die Terme $f(x)$ und $g(x) = 0{,}5x - 0{,}5 + \frac{0{,}5}{x+1}$ äquivalent sind.

c) Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f an.

d) Berechnen Sie $f(-2)$ und skizzieren Sie G_f unter Einbezug der bisherigen Ergebnisse.

4 Funktionsterme einfacher gebrochen-rationaler Funktionen ermitteln

Geben Sie einen Funktionsterm einer einfachen gebrochen rationalen Funktion an,

a) deren Graph die Asymptoten mit den Gleichungen $x = -1$, $x = 3$ und $y = -2$ hat,

b) deren Graph die Asymptoten mit den Gleichungen $y = 0{,}25x$ und $x = 4$ hat,

c) die die Nullstelle $x = -1$ und die Definitionslücke $x = 5$ hat und deren Graph die Asymptote mit der Gleichung $y = 2$ hat,

d) die die Polstelle $x = 0{,}5$ mit Vorzeichenwechsel hat, für die $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3$ gilt, die eine Nullstelle hat und deren Graph durch den Punkt $P(0\,|\,-4)$ verläuft.

5 Geeignete Software im Umgang mit Funktionen verwenden

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x+l}{x-k}$ mit $k, l \in \mathbb{Z}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Zeichnen Sie mithilfe einer dynamischen Mathematiksoftware unter Einsatz von Schiebereglern G_f und ermitteln sie zwei Wertepaare $(k; l)$, sodass $f(-4) = 3$ gilt.

b) Untersuchen und beschreiben Sie, wie sich das Verhalten von f an den Rändern der Definitionsmenge für $k = -1$ und verschiedene Werte von $l \neq 1$ verändert.

Check-in zu Kapitel VI

Schätzen Sie sich mithilfe der Checkliste ein.

1. Ich kann Potenzgesetze anwenden.
2. Ich kann Ableitungsregeln anwenden.
3. Ich kann Gleichungen nach einer Variablen umstellen.
4. Ich kann beschreiben, wie ein Graph aus einem anderen Graphen hervorgeht.
5. Ich kann Eigenschaften von Funktionen und deren Graphen untersuchen.

Überprüfen Sie Ihre Einschätzungen anhand der zugehörigen Aufgaben.

→ Lösungen | Seite 305

Lerntipps

zu 1. **Grundwissen 9/10**

zu 2. **Beispiel 1,** Seite 26
Beispiel 1, Seite 38
Beispiel, Seite 153

zu 3. **Grundwissen 9/10**

zu 4. **Grundwissen 11/12**

1 Potenzgesetze anwenden

Vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich und schreiben Sie das Ergebnis, falls möglich, mit Wurzeln $(a, x, t > 0)$.

a) $\left(\sqrt[4]{x}\right)^8$ **b)** $\sqrt{\sqrt[3]{x}}$ **c)** $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5}$ **d)** $t^{-\frac{1}{2}} : t^{\frac{1}{4}}$

e) $\sqrt[7]{a^3 \cdot \frac{1}{a^{-4}}}$ **f)** $x^{-\frac{1}{3}} \cdot (4x)^{\frac{1}{2}}$ **g)** $\frac{a}{\sqrt[3]{a^5}} \cdot a^{\frac{2}{3}}$ **h)** $\left(\sqrt{t} - \sqrt[3]{t}\right)^2$

2 Ableitungsregeln anwenden

Bestimmen Sie einen Term der Ableitungsfunktion.

a) $f: x \mapsto 3(3 - x)^3 + 2x$ **b)** $f: x \mapsto 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) + 3e^{2x+1}$

c) $f: x \mapsto e^x \cdot (1 - x^2)$ **d)** $f: x \mapsto \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$

3 Gleichungen nach einer Variablen umstellen

Stellen Sie die Gleichung nach der in der Klammer angegebenen Variable um.

a) $A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h \quad (c)$ **b)** $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \quad (r)$

c) $a = \frac{v_2 - v_1}{t} \quad (v_1)$ **d)** $f = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \quad (L)$

4 Streckungen, Spiegelungen und Verschiebungen beschreiben

a) Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{-3}{x - 1} + 2$ aus dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{x}$ hervorgeht.

b) Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion f mit $f(x) = 3^{5x+1} - 3$ aus dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = 3^x$ hervorgeht.

5 Eigenschaften einer Funktion und ihres Graphen untersuchen

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 2x^4 - x^2 - 3$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Untersuchen Sie G_f auf Symmetrie.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion, geben Sie deren Vielfachheit an und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von G_f mit der y-Achse.

c) Begründen Sie, dass $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ gilt.

d) Bestimmen Sie Lage und Art der Extrempunkte von G_f und geben Sie die Wertemenge von f an.

e) Ermitteln Sie die Koordinaten der Wendepunkte.

f) Skizzieren Sie G_f unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse.

Check-in zu Kapitel VII

Schätzen Sie sich mithilfe der Checkliste ein.

1. Ich kann Eigenschaften der natürlichen Exponentialfunktion benennen und anwenden.
2. Ich kann Umkehrfunktionen bilden und untersuchen.
3. Ich kann die Ableitung und eine Stammfunktion der natürlichen Exponentialfunktion bilden.
4. Ich kann Ableitungen und Grenzwerte von Verknüpfungen mit der natürlichen Exponentialfunktion bilden.

Überprüfen Sie Ihre Einschätzungen anhand der zugehörigen Aufgaben.

→ Lösungen | Seite 306

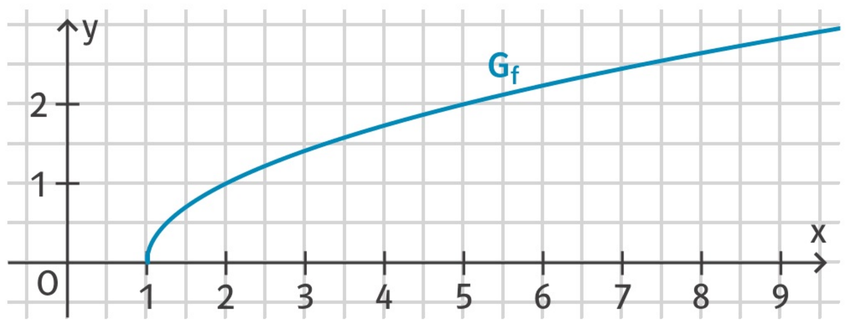
1 Eigenschaften der natürlichen Exponentialfunktion benennen und anwenden

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto e^x$ mit maximaler Definitionsmenge.

(1) Die Funktion f hat genau eine Nullstelle.
(2) Es gilt $D_f = \mathbb{N}$.
(3) Die Funktion f ist monoton.
(4) Die Funktion f besitzt kein absolutes Minimum.
(5) Die Funktion f besitzt unendlich viele lokale Maxima.
(6) Es gilt $f'(3) = f'''(3)$.
(7) Jede Parallele zur x-Achse schneidet den Graphen von f genau einmal.
(8) Jede Parallele zur y-Achse schneidet den Graphen von f genau einmal.
(9) Keine Parallele zur x-Achse ist Tangente an den Graphen von f.
(10) Keine Parallele zur Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten ist Tangente an den Graphen von f.

2 Umkehrfunktion bilden und untersuchen

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \sqrt{x-1}$. In der Abbildung ist ihr Graph dargestellt.



a) Bestimmen Sie D_f und W_f.
b) Begründen Sie anhand der Abbildung, dass die Funktion f umkehrbar ist.
c) Übertragen Sie die Abbildung ins Heft und skizzieren den Graphen der Umkehrfunktion von f im selben Koordinatensystem. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.
d) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1}.

3 Ableitungen und eine Stammfunktion der natürlichen Exponentialfunktion bilden

Bestimmen Sie die erste und die zweite Ableitung sowie eine Stammfunktion der Funktion f.

a) $f: x \mapsto e^x$
b) $f: x \mapsto 4 - e^x$
c) $f: x \mapsto e^x - 5$
d) $f: x \mapsto 7e^x$
e) $f: x \mapsto x^2 + e^x$
f) $f: x \mapsto 2e^x - x^3$
g) $f: x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^x)$
h) $f: x \mapsto e^x + \cos(x)$
i) $f: x \mapsto \sin(x) - e^x$

4 Ableitungen und Grenzwerte von Verknüpfungen mit der natürlichen Exponentialfunktion bilden

a) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f.

(1) $f: x \mapsto x^2 \cdot e^x$
(2) $f: x \mapsto e^{x^2+1}$
(3) $f: x \mapsto \frac{\sin(x)}{e^x}$
(4) $f: x \mapsto (x^3 - 2x) \cdot e^x$
(5) $f: x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
(6) $f: x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

b) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

(1) $f: x \mapsto e^{-x}$
(2) $f: x \mapsto e^{3x}$
(3) $f: x \mapsto x^2 \cdot e^{-x}$
(4) $f: x \mapsto x^5 \cdot e^{0{,}7x}$
(5) $f: x \mapsto e^{-x} + 2023$
(6) $f: x \mapsto 2x^4 \cdot e^x$

Lerntipps

zu 1. **Lehrtext,** Seite 37
zu 2. **Beispiel 1,** Seite 178
zu 3. **Beispiel 1,** Seite 38
zu 4. **Beispiel 1,** Seite 43
Beispiel 2, Seite 43

Check-in zu Kapitel VIII

Schätzen Sie sich mithilfe der Checkliste ein.

1. Ich kann die Lage von Punkten und geometrischen Formen im Zweidimensionalen mit Koordinaten beschreiben.
2. Ich kann Abstände und Streckenlängen im zweidimensionalen Koordinatensystem berechnen.
3. Ich kann Definitionen und Eigenschaften von ebenen Figuren (Dreiecke, Vierecke …) benennen und damit arbeiten.
4. Ich kann Definitionen und Eigenschaften von dreidimensionalen Körpern (Quader, Pyramiden …) benennen und damit arbeiten.

Lerntipps

zu 2. **Grundwissen 9/10**

Überprüfen Sie Ihre Einschätzungen anhand der zugehörigen Aufgaben.

→ Lösungen | Seite 307

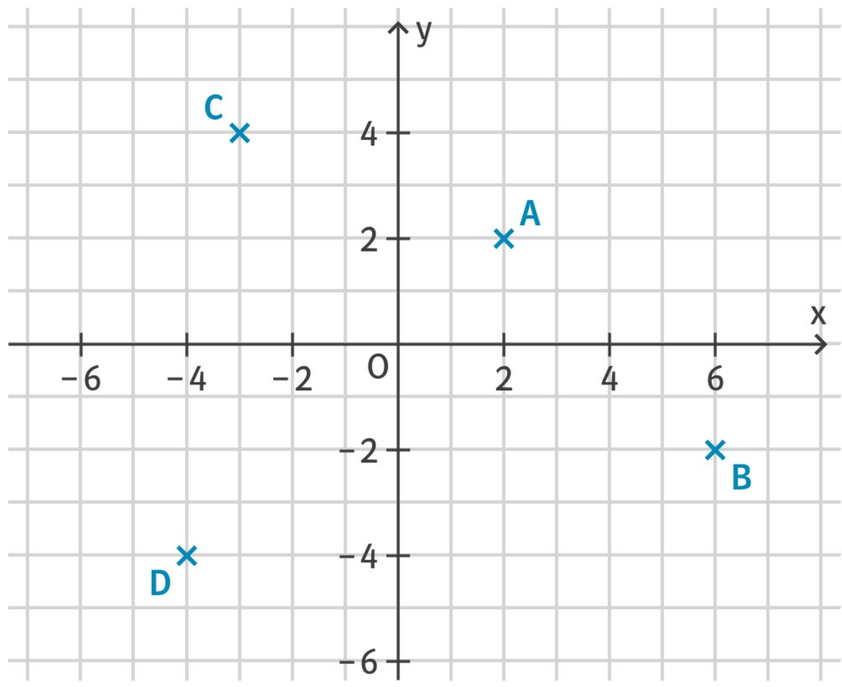
1 Die Lage von Punkten und geometrischen Formen im Zweidimensionalen mit Koordinaten beschreiben

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte A, B, C und D an.

b) Geben Sie die Koordinaten der Punkte X, Y und Z so an, dass AXYZ ein Quadrat mit Kantenlänge 2 ist.

c) Geben Sie die Koordinaten der Punkte U und V so an, dass ABUV ein Parallelogramm ist, das kein Rechteck ist.

d) Geben Sie die Koordinaten der Mittelpunkte der Diagonalen des Parallelogramms aus Teilaufgabe c) an und beschreiben Sie Ihre Beobachtung.



2 Abstände und Streckenlängen im zweidimensionalen Koordinatensystem berechnen

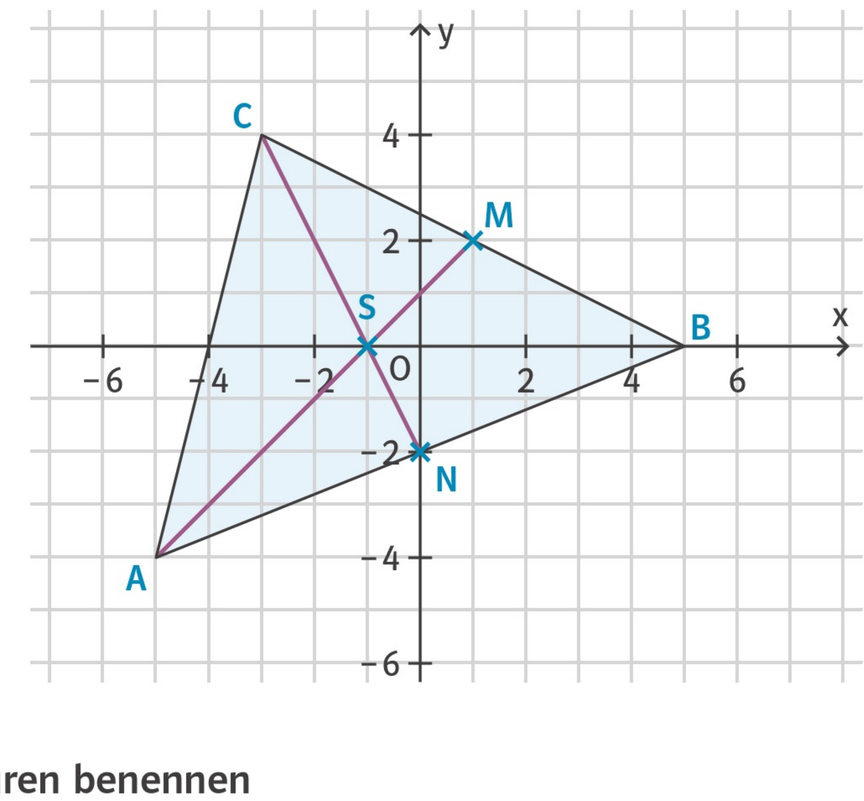
Gegeben ist das abgebildete Dreieck ABC. Die Punkte M und N sind Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AB}$. Der Schnittpunkt von $\overline{AM}$ und $\overline{CN}$ heißt S.

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte A, B und C an.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte M, N und S.

c) Berechnen Sie die Längen der Strecken $\overline{AM}$, $\overline{CN}$, $\overline{CS}$, $\overline{SN}$, $\overline{AS}$ und $\overline{SM}$.

d) Berechnen Sie $\frac{|\overline{AS}|}{|\overline{SM}|}$ und $\frac{|\overline{CS}|}{|\overline{SN}|}$ und beschreiben Sie, was Ihnen auffällt.



3 Definitionen und Eigenschaften von ebenen Figuren benennen

Nennen Sie jeweils die Definition und mindestens zwei Eigenschaften folgender Viereckstypen: Parallelogramm, Quadrat, Raute, Rechteck, gleichschenkliges Trapez und Drachenviereck.

4 Mit Definitionen und Eigenschaften von dreidimensionalen Körpern arbeiten

a) Berechnen Sie das Volumen einer geraden Pyramide, deren quadratische Grundfläche die Kantenlänge 3 und deren Seitenkante die Länge 7 hat.

b) Bestimmen Sie alle möglichen ganzzahligen Kantenlängen eines Quaders mit dem Volumen 84.

I Funktionenscharen, Stammfunktionen und weitere Ableitungsregeln

Seite 8

7

Nullstellen:

$g_a(x) = 0 \Leftrightarrow a x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(a x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = \sqrt{\frac{1}{a}}$ oder $x = -\sqrt{\frac{1}{a}}$. (Die beiden letzten Nullstellen gibt es nur für $a > 0$).

Extrema und Wendestellen:

$g_a'(x) = 3 a x^2 - 1$, $g_a''(x) = 6 a x$ und $g_a'''(x) = 6 a$

$g_a'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3a}}$ oder $x = -\sqrt{\frac{1}{3a}}$ (nur für $a > 0$)

$g_a''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Es ist $g_a''\left(\sqrt{\frac{1}{3a}}\right) > 0$ und $g_a''\left(-\sqrt{\frac{1}{3a}}\right) < 0$ (nur für $a > 0$) sowie $g_a'''(0) = 6a \neq 0$.

Mit $g_a\left(\sqrt{\frac{1}{3a}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3a}}$ und $g_a\left(-\sqrt{\frac{1}{3a}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3a}}$ erhält man:

Für $a > 0$ hat g_a die Nullstellen $x = 0$, $x = \sqrt{\frac{1}{a}}$ und $x = -\sqrt{\frac{1}{a}}$, an der Stelle $x = \sqrt{\frac{1}{3a}}$ das lokale Minimum $-\frac{2}{3\sqrt{3a}}$, an der Stelle $x = -\sqrt{\frac{1}{3a}}$ das lokale Maximum $\frac{2}{3\sqrt{3a}}$ sowie die Wendestelle $x = 0$.

Für $a < 0$ hat g_a die Nullstelle $x = 0$, keine Extrema und die Wendestelle $x = 0$.

Seite 9

13

a) $f_a(2) = a \cdot 8 - 2a \cdot 4 = 0$

b) $f_a(-1) = -2 \Leftrightarrow -a - 2a = -2 \Leftrightarrow -3a = -2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$

c) $f_a'(x) = 3 a x^2 - 4 a x$ und $f_a''(x) = 6 a x - 4 a$

$f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow x(3 a x - 4 a) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $3 a x - 4 a = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ oder $x = \frac{4}{3}$.

Die möglichen Extremstellen hängen also nicht von a ab.

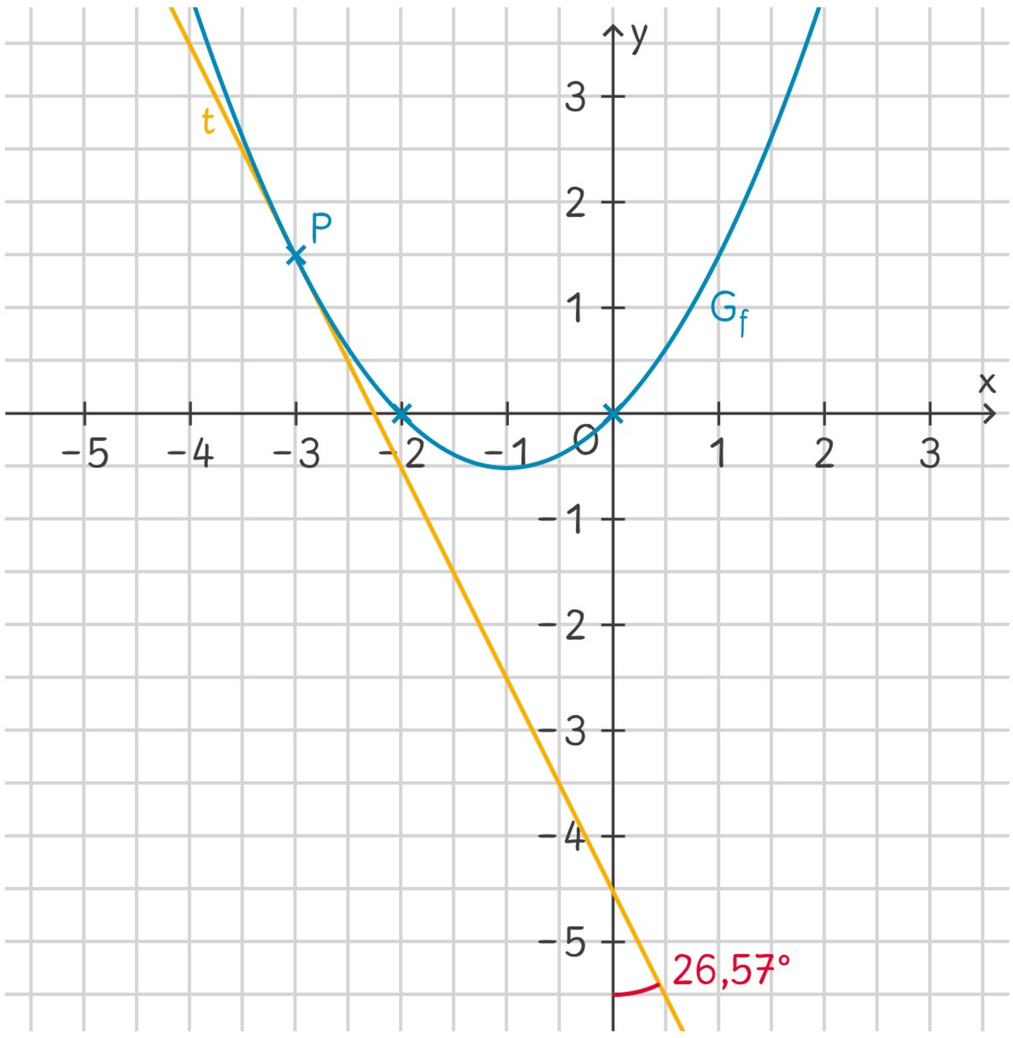
Es ist $f_a''(0) = -4a \neq 0$. Das Vorzeichen von $f_a''(0)$ hängt also von a ab und damit auch die Art der Extremstelle.

Es ist $f_a''\left(\frac{4}{3}\right) = 8a - 4a = 4a \neq 0$. Das Vorzeichen von $f_a''\left(\frac{4}{3}\right)$ hängt also von a ab und damit auch die Art der Extremstelle.

G 15

Hinweis: Im Folgenden sind neben dem Graphen jeweils auch die Tangente und der beschriebene Winkel eingezeichnet. Dies ist in der Aufgabenstellung nicht verlangt.

a) Es gilt $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x = x\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$. Die Nullstellen sind also an den Stellen $x = -2$ und $x = 0$.



$f'(x) = x + 1$

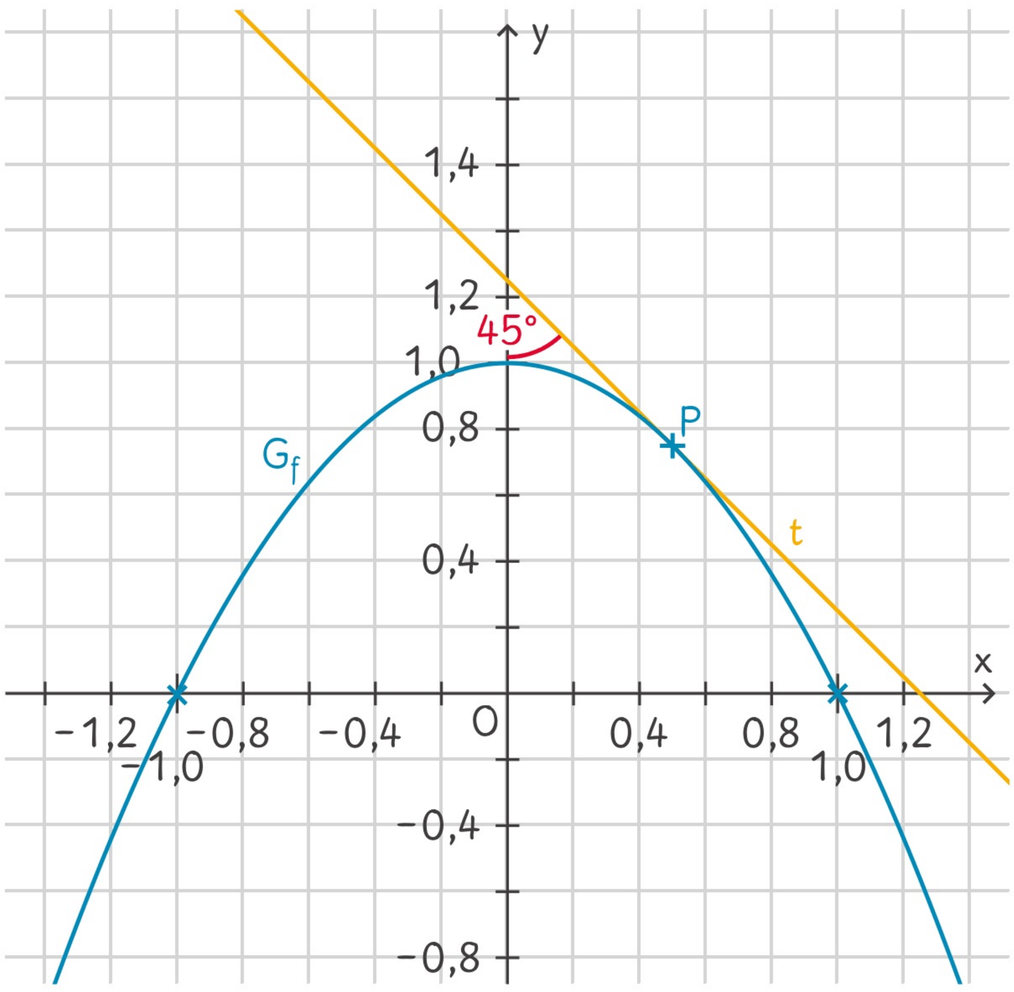
$f(-3) = \frac{3}{2}$ und $f'(-3) = -2$ in $y = mx + t$ einsetzen:

$\frac{3}{2} = -2 \cdot (-3) + t \Leftrightarrow t = -\frac{9}{2}$

Die Gleichung der Tangente t im Punkt P lautet $y = -2x - \frac{9}{2}$.

Daraus ergibt sich eine Winkelgröße zwischen t und der y-Achse von ca. 26,57°.

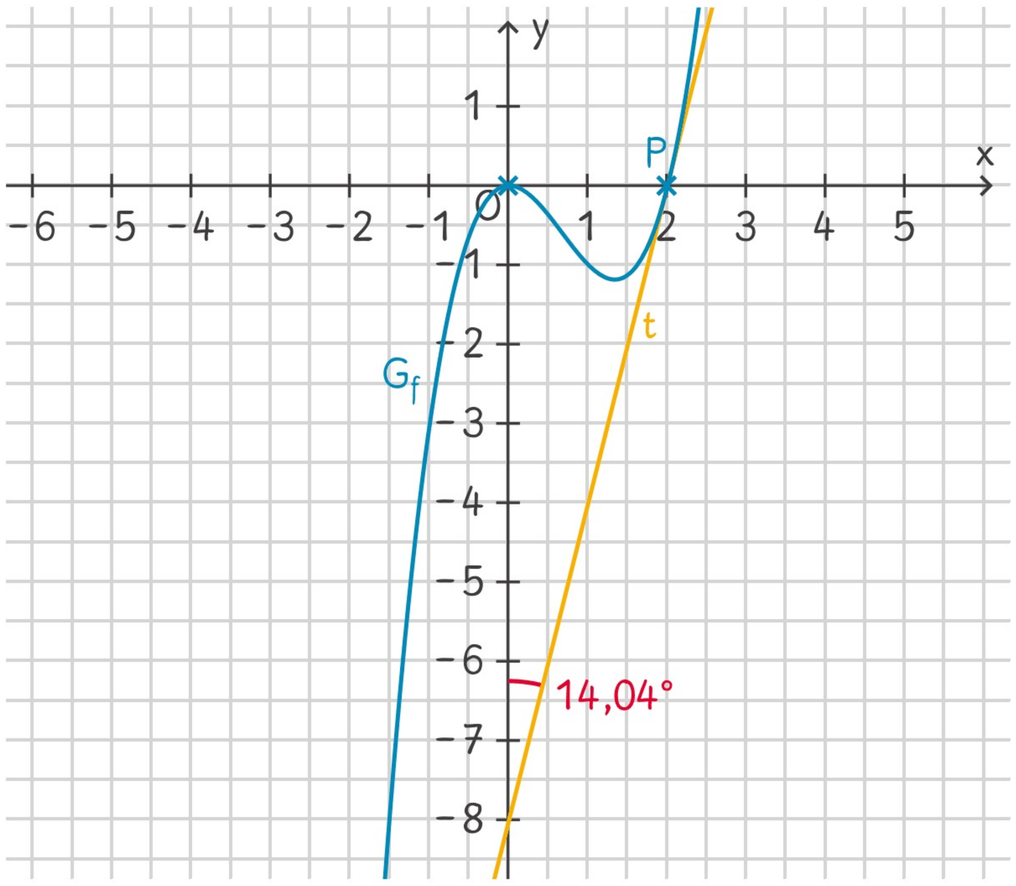
b) Die Nullstellen sind an den Stellen $x = -1$ und $x = 1$.



Die Gleichung der Tangente im Punkt P lautet $y = -x + 1{,}25$.

Daraus ergibt sich eine Winkelgröße zwischen t und der y-Achse von 45°.

c) Es gilt $f(x) = x^3 - 2x^2 = x^2(x - 2)$. Die Nullstellen sind also an den Stellen $x = 0$ und $x = 2$.



Die Gleichung der Tangente im Punkt P lautet $y = 4x - 8$. Daraus ergibt sich eine Winkelgröße zwischen t und der y-Achse von ca. 14,04°.

Seite 12

3

a) $F'(x) = -3x^2 \neq f(x)$. Also ist F keine Stammfunktion von f.

b) $F(x) = (x^2 + 3)^2 = x^4 + 6x^2 + 9$; $F'(x) = 4x^3 + 12x = f(x)$. Also ist F eine Stammfunktion von f.

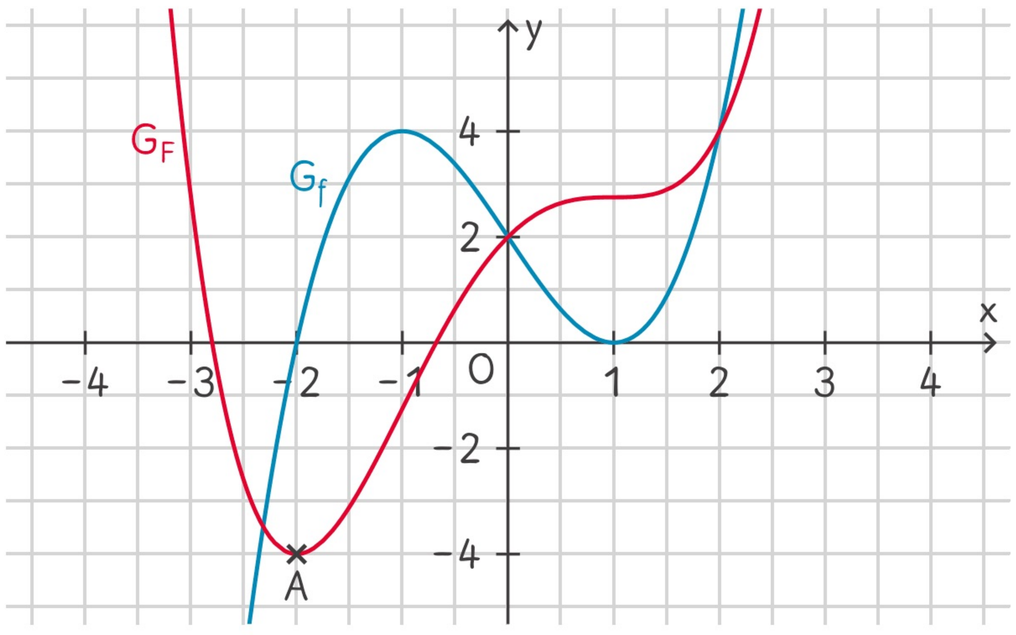
4

Die Funktion f hat nur die Nullstelle $x = 1$. Daher hat der Graph G_F nur an der Stelle $x = 1$ eine waagerechte Tangente. Wegen $f(x) < 0$ für $x > 1$ ist G_F für $x > 1$ streng monoton fallend. Somit ist der Graph (3) der Graph einer Stammfunktion der Funktion f. Wegen $g(1) = g(3) = 0$ hat der Graph G_G an den Stellen $x = 1$ und $x = 3$ jeweils eine waagerechte Tangente. Da $g(x) > 0$ für $x \in]1; 3[$ gilt, ist G_G für $x \in]1; 3[$ streng monoton steigend. Somit sind die Graphen (1) und (7) Graphen von Stammfunktionen der Funktion g.

Seite 13

11

a)



b) An der Stelle $x = -2$ liegt eine einfache Nullstelle vor, an der Stelle $x = 1$ eine doppelte. Damit gilt $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$, also $f(x) = (x + 2)(x - 1)^2 = (x + 2)(x^2 - 2x + 1) = x^3 - 3x + 2$. Also ist der Funktionsterm jeder Stammfunktion von f von der Form $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + c$. Aus $F(-2) = -4$ folgt $c = 2$.

c) Individuelle Lösung.

G 13

a) $x = 1$: Polstelle mit Vorzeichenwechsel.
$x = -1$: Polstelle mit Vorzeichenwechsel.

b) $x = -3$: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

c) $x = -1$: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

Seite 16

5

$c'(x) = f(x)$ $\quad h'(x) = d(x)$ $\quad b'(x) = e(x)$ $\quad i'(x) = j(x)$ $\quad a'(x) = g(x)$

Seite 17

16

a) $f'(x) = 3\cos(x)$

$f'\left(\frac{5}{3}\pi\right) = 3\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) = 3\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$f\left(\frac{5}{3}\pi\right) = 3\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) = 3\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$

Einsetzen in die Tangentengleichung $y = mx + t$:
$-\frac{3}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3}\pi + t \Leftrightarrow -\frac{5}{2}\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3} = t$.

Tangentengleichung: $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Steigungswinkel: $\tan\alpha = \frac{3}{2}$, also $\alpha \approx 56{,}31°$.

b) $f'(x) = -\sin(x)$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Einsetzen in die Tangentengleichung $y = mx + t$:
$\frac{1}{2}\sqrt{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{4} + t \Leftrightarrow \frac{\pi}{8}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = t$.

Tangentengleichung: $y = -\frac{1}{2}\sqrt{2}x + \frac{\pi}{8}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Steigungswinkel: $\tan\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Also $\alpha \approx -35{,}26°$.

G 19

a) $f(-x) = -(-x)^6 - 2(-x)^2 + 3 = -x^6 - 2x^2 + 3 = f(x)$
Der Graph von f ist also achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.

b) $g(-x) = \frac{-(4(-x))}{3(-x)^2 - 2} = \frac{4x}{3x^2 - 2} = -g(x)$
Der Graph von g ist also punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs.

c) $h(-x) = -\frac{2}{-x - 4} + 6 \neq h(x)$ und $h(-x) \neq -h(x)$
Der Graph von h weist also keine der beiden genannten Symmetrien auf.

d) $p(-x) = (-x)^5 - 4(-x)^3 - 5 = -x^5 + 4x^3 - 5 \neq p(x)$ und $p(-x) \neq -p(x)$
Der Graph von p weist also keine der beiden genannten Symmetrien auf.

e) $k(-x) = (-x)^2 \cdot (3 - (-x))^2 = x^2 \cdot (3 + x)^2 \neq k(x)$ und $k(-x) \neq -k(x)$
Der Graph von k weist also keine der beiden genannten Symmetrien auf.

f) $q(-x) = (-x) \cdot \sin(-x) = (-x) \cdot (-\sin(x)) = x \cdot \sin(x) = q(x)$
Der Graph von q ist also achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.

Seite 19

7

a) $g'(x) = \cos(x) - x \cdot \sin(x)$

b) $f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + (x^2 + 3) \cdot \cos(x)$

c) $h'(x) = 25\left((\cos(x))^2 - (\sin(x))^2\right)$

d) $l'(x) = 12x^2 - 2x + (3x^2 - 12)\sin(x) + (x^3 - 12x)\cos(x)$

Seite 20

15

$f'(x) = 2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2x\cos(x) - (1 - x^2)\sin(x) = \sin(x)(1 + x^2)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\pi$ oder $x = 0$ oder $x = \pi$

Eine Untersuchung des Vorzeichens von $f'(x)$ zeigt: f besitzt lokale Maxima bei $x = \pi$ und $x = -\pi$ und ein lokales Minimum bei $x = 0$.

Mit $f(-\pi) = \pi^2 - 1$, $f(\pi) = \pi^2 - 1$ und $f(0) = 1$ erhält man die Extrempunkte $H_1(-\pi\,|\,\pi^2 - 1)$, $H_2(\pi\,|\,\pi^2 - 1)$ und $T(0\,|\,1)$.

16

Nach Voraussetzung gilt $f(0) = 1$ und $f'(0) = 0$.

Untersuchung von g:

Es ist $g'(x) = f'(x) \cdot \cos(x) - f(x) \cdot \sin(x)$.

Damit gilt $g(0) = f(0) \cdot \cos(0) = 1 \cdot 1 = 1$ und

$g'(0) = f'(0) \cdot \cos(0) - f(0) \cdot \sin(0) = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 0$.

Der Graph von g hat im Punkt $P(0\,|\,1)$ ebenfalls eine waagerechte Tangente.

Untersuchung von h:

Es ist $h'(x) = f(x) + (x + 1) \cdot f'(x)$.

Damit gilt $h(0) = (0 + 1) \cdot f(0) = 1 \cdot 1 = 1$ und

$h'(0) = f(0) + (0 + 1) \cdot f'(0) = 1 + (0 + 1) \cdot 0 = 1$.

Der Graph von h hat im Punkt $P(0\,|\,1)$ keine waagerechte Tangente.

G 19

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Summen s_i durch 3 teilbar sind, ist jeweils $\frac{1}{3}$. Also gilt $P(\text{„Mia gewinnt.“}) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.

Seite 23

6

a) $f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x)) = 3x^2 + 1$

$D_f = \mathbb{R}$

$g(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x)) = (3x + 1)^2$

$D_g = \mathbb{R}$

b) $f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x)) = \cos(x)$

$D_f = \mathbb{R}$

$g(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x)) = \cos(x + 1) - 1$

$D_g = \mathbb{R}$

c) $f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x)) = \frac{1}{x^2 + 1}$

$D_f = \mathbb{R}$

$g(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x)) = \frac{1}{x^2} + 1$

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

d) $f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x)) = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 - 1}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

$g(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x)) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1 = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Seite 24

14

Zum Graphen (1) gehört die Verkettung $q \circ g$ mit $(q \circ g)(x) = -x - 1$.

Zum Graphen (2) gehört die Verkettung $f \circ g$ mit $(f \circ g)(x) = (x + 1)^2$.

Zum Graphen (3) gehört die Verkettung $g \circ f$ mit $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$.

Zum Graphen (4) gehört die Verkettung $g \circ h$ mit $(g \circ h)(x) = \sin(x) + 1$.

Zum Graphen (5) gehört die Verkettung $f \circ h$ mit $(f \circ h)(x) = (\sin(x))^2$.

Zum Graphen (6) gehört die Verkettung $q \circ f$ mit $(q \circ f)(x) = -x^2$.

Zum Graphen (7) gehört die Verkettung $g \circ p$ mit $(g \circ p)(x) = 3^x - 3$.

G 16

a) $x = \frac{1}{3}$ und $x = -2$

b) $t = 0$, $t = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ und $t = \frac{2}{\sqrt{3}}$

c) $(x + 1) \cdot (3x - 3) = 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x + 3x - 3 = 3 \Leftrightarrow 3x^2 = 6$
$\Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$ oder $x = \sqrt{2}$

d) Ausklammern: $3x^4 + 9x^3 + 6x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2(x^2 + 3x + 2) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ oder $x^2 + 3x + 2 = 0$

Lösen von $x^2 + 3x + 2 = 0$:

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 1}{2}$, also $x_1 = -2$ und $x_2 = -1$

e) Ausklammern: $x^2 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^x = 0 \Leftrightarrow 2^x(x^2 - 4) = 0$
$\Leftrightarrow x = -2$ oder $x = 2$

f) Ausklammern: $(4^t \cdot t^2 - 4^t)(2^t - 8) = 0 \Leftrightarrow 4^t(t^2 - 1)(2^t - 8) = 0$
$\Leftrightarrow t = -1$ oder $t = 1$ oder $t = 3$

g) Ausklammern: $3x^3 - x = 2x^2 \Leftrightarrow 3x^3 - 2x^2 - x = 0$
$\Leftrightarrow x(3x^2 - 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $3x^2 - 2x - 1 = 0$

Lösen von $3x^2 - 2x - 1 = 0$:

$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6}$,

also $x_1 = -\frac{1}{3}$ und $x_2 = 1$

h) $3x^2 - 6x^{-2} + 2 = 2 \Leftrightarrow 3x^2 - \frac{6}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 3x^4 - 6 = 0$
$\Leftrightarrow x^4 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt[4]{2}$ oder $x = \sqrt[4]{2}$

i) $(t - 1) \cdot (t - 3) - 3t = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t - t + 3 - 3t = 0$
$\Leftrightarrow t^2 - 7t + 3 = 0$

Also: $t_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{37}}{2}$ und somit

$t_1 = \frac{7 + \sqrt{37}}{2}$ und $t_2 = \frac{7 - \sqrt{37}}{2}$

Seite 27

7

a) $f'(x) = 8 \cdot (2x + 5)^7 \cdot 2 = 16 \cdot (2x + 5)^7$

b) $f'(x) = 2\left(-\sin(x^2) \cdot 2x\right) = -4x\sin(x^2)$

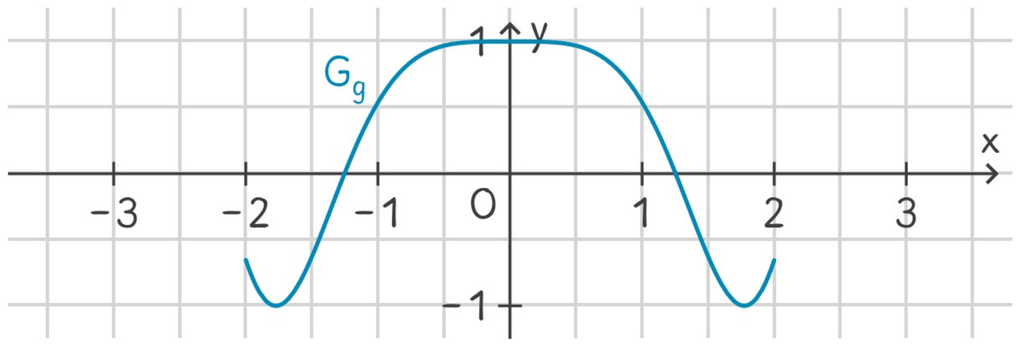
c) $f'(z) = \frac{3}{4} - \cos(3z - 1) \cdot 3 = \frac{3}{4} - 3 \cdot \cos(3z - 1)$

d) $f'(t) = 2(t^3) \cdot 3t^2 = 6t^5$

Seite 28

18

a)



Wertemenge: $W_g = [-1; 1]$.

b) Nullstellen: $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{\pi}{2}$ oder $x^2 = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ oder $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

c) $g'(x) = -2x \cdot \sin(x^2)$

Extremstellen: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x^2 = \pi \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = -\sqrt{\pi}$ oder $x = \sqrt{\pi}$.

Eine Untersuchung des Vorzeichens von $g'(x)$ zeigt, dass bei $-\sqrt{\pi}$ und bei $\sqrt{\pi}$ lokale Minima vorliegen (VZW von − nach +) und bei 0 ein lokales Maximum (VZW von + nach −). Mit $g\left(-\sqrt{\pi}\right) = -1$, $g(0) = 1$ und $g\left(\sqrt{\pi}\right) = -1$ folgt $T_1\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}} \,\middle|\, -1\right)$, $H(0\,|\,1)$, und $T_2\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \,\middle|\, -1\right)$.

G 22

Nach dem Hinweis gilt $a + b = 3$ und $ab = 1$. Es folgt

$27 = (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

$= a^3 + b^3 + 9$, also $a^3 + b^3 = 27 - 9 = 18$.

Seite 33

1

a) $f': x \mapsto 12x^2 + 2$ und $F: x \mapsto x^4 + x^2 - x$

b) $f': x \mapsto 4x - 9x^2$ und $F: x \mapsto \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^4$

c) $f': x \mapsto -6x^2 + 8x$ und $F: x \mapsto -\frac{1}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 5$

d) $f': x \mapsto -3 + \cos(x)$ und $F: x \mapsto -\frac{3}{2}x^2 - \cos(x)$

e) $f': x \mapsto 5x^4 - \sin(x)$ und $F: x \mapsto \frac{1}{6}x^6 + \sin(x)$

f) $f': x \mapsto 8x + 3x^2$ und $F: x \mapsto \frac{4}{3}x^3 - 2x + \frac{1}{4}x^4$

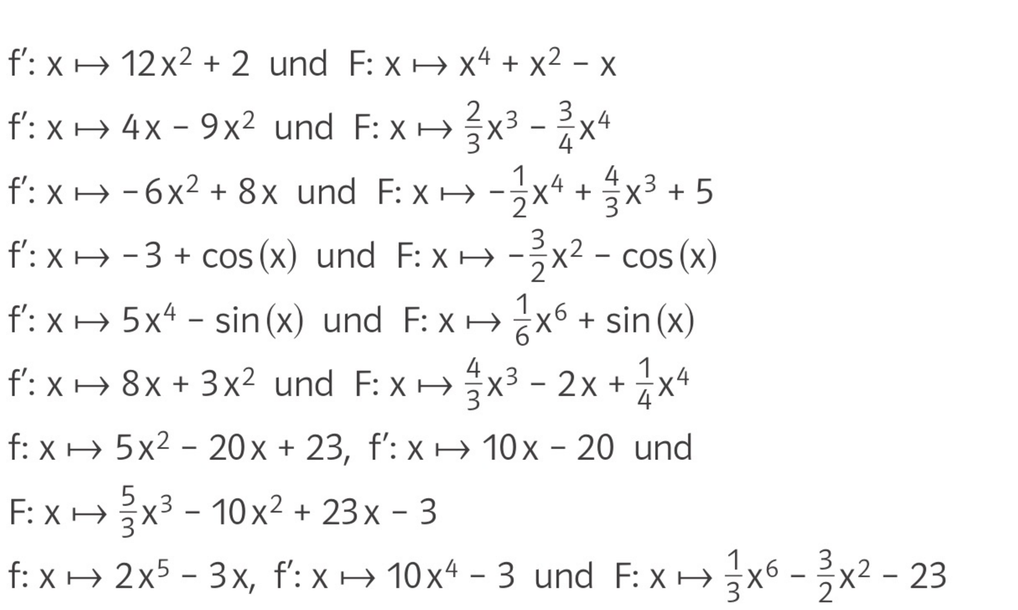
g) $f: x \mapsto 5x^2 - 20x + 23$, $f': x \mapsto 10x - 20$ und $F: x \mapsto \frac{5}{3}x^3 - 10x^2 + 23x - 3$

h) $f: x \mapsto 2x^5 - 3x$, $f': x \mapsto 10x^4 - 3$ und $F: x \mapsto \frac{1}{3}x^6 - \frac{3}{2}x^2 - 23$

i) $f: x \mapsto 2\sin(x) - 3\cos(x)$, $f': x \mapsto 2\cos(x) + 3\sin(x)$ und $F: x \mapsto -2\cos(x) - 3\sin(x)$

2

a), **b)** und **c)**



3

a) $f(x) = u(v(x)) = 1 - x^3$, $D_f = \mathbb{R}$

$g(x) = v(u(x)) = (1 - x)^3$ und $D_g = \mathbb{R}$

b) $f(x) = u(v(x)) = \sin(2x + 5)$, $D_f = \mathbb{R}$

$g(x) = v(u(x)) = \sin(2x + 3) + 1$ und $D_g = \mathbb{R}$

c) $f(x) = u(v(x)) = \frac{1}{x^4}$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$g(x) = v(u(x)) = \frac{1}{x^4}$ und $D_g = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

d) $f(x) = u(v(x)) = 4x^3 + 8 - \frac{3}{2x^3 + 4}$

$2x^3 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -2 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{2}$, also $D_f = \mathbb{R}\backslash\left\{-\sqrt[3]{2}\right\}$.

$g(x) = v(u(x)) = 2\left(2x - \frac{3}{x}\right)^3 + 4$ und $D_g = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

4

a) $f_t(x) = x^3 + 3tx^2 + t$

Es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} f_t(x) = +\infty$.

Die Graphen (1) und (4) kommen also nicht infrage.

Der Graph von f_t verläuft durch $P(0\,|\,t)$. Für $t = 0$ wäre das der Graph der Funktion g mit $g(x) = x^3$, der keine Extrempunkte hat. Für $t \neq 0$ verläuft der Graph nicht durch den Ursprung. Graph (3) ist es somit auch nicht.

Der gesuchte Graph ist in (2) zu sehen.

Da $f_t(0) = t$ ist und der Graph (2) durch $P(0\,|\,1)$ verläuft, gilt $t = 1$.

b) $f_t'(x) = 3x^2 + 6tx$

$f_t''(x) = 6x + 6t$

Mögliche Extremstellen:

$f_t'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6tx = 0 \Leftrightarrow x(3x + 6t) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ oder $x = -2t$.

Überprüfung der möglichen Extremstellen:

$f_t''(0) = 6t > 0$ für $t > 0$;

$f_t''(0) = 6t < 0$ für $t < 0$

$f_t''(-2t) = -6t < 0$ für $t > 0$

$f_t''(-2t) = -6t > 0$ für $t < 0$

Somit haben die Graphen G_{f_t} für $t > 0$ den Tiefpunkt $T(0\,|\,t)$ und den Hochpunkt $H(-2t\,|\,4t^3 + t)$ sowie für $t < 0$ den Hochpunkt $H(0\,|\,t)$ und den Tiefpunkt $T(-2t\,|\,4t^3 + t)$. Für $t = 0$ gibt es keine Extrempunkte.

c) Wendepunkte: $f_t''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 6t = 0 \Leftrightarrow x = -t$.

$f_t'''(x) = 6 \neq 0$; $W(-t\,|\,2t^3 + t)$

Es ist $g(-t) = 2t^3 + t$. Somit liegen alle Wendepunkte von G_{f_t} auf dem Graphen der Funktion g.

5

Schnittpunkte:

Der Ansatz $f(x) = g(x)$ führt mit $f(x) \neq 0$ auf $x = 1$ oder $x = -1$.

Steigungen:

Ableitung von g: $g'(x) = 2x \cdot f(x) + x^2 \cdot f'(x)$.

Es ist $g'(1) = 2 \cdot f(1) + f'(1) \neq f'(1)$, da $f(1) \neq 0$.

Es ist $g'(-1) = -2 \cdot f(-1) + f'(-1) \neq f'(-1)$, da $f(-1) \neq 0$.

Ergebnis: Die Graphen von f und g haben genau zwei Schnittpunkte $S_1(1\,|\,f(1))$ und $S_2(-1\,|\,f(-1))$.

Da die Steigungen der Graphen sich in diesen beiden Stellen unterscheiden, berühren sie sich dort aber nicht.

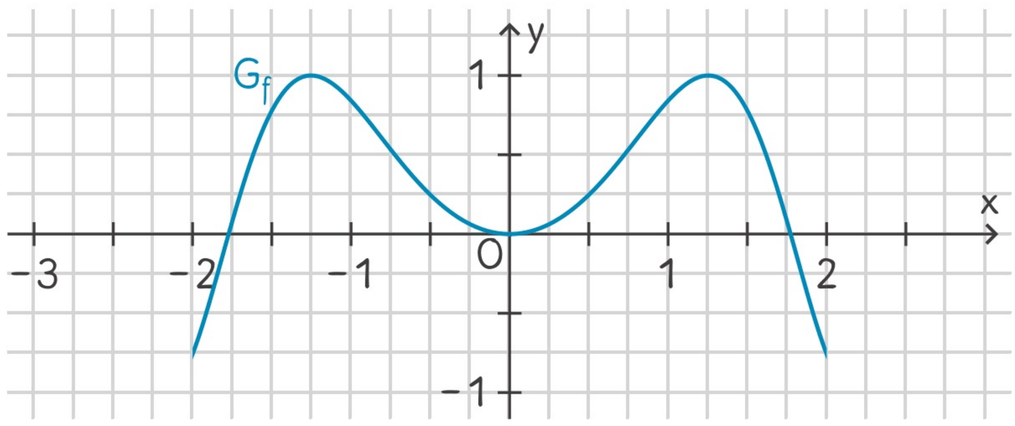
6

$f'(x) = \cos(x)(x^2 + 2)$

Also gilt $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{3}{2}\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right\}$. Eine Untersuchung des Vorzeichens von $f'(x)$ zeigt, dass bei $-\frac{3}{2}\pi$ und bei $\frac{\pi}{2}$ lokale Maxima vorliegen (VZW von + nach −) und bei $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3}{2}\pi$ lokale Minima (VZW von − nach +). Mit $f\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{9}{4}\pi^2$, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$ und $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -\frac{9}{4}\pi^2$ folgt $H_1\left(-\frac{3}{2}\pi \,\middle|\, \frac{9}{4}\pi^2\right)$, $T_1\left(-\frac{\pi}{2} \,\middle|\, -\frac{\pi^2}{4}\right)$, $H_2\left(\frac{\pi}{2} \,\middle|\, \frac{\pi^2}{4}\right)$ und $T_2\left(\frac{3}{2}\pi \,\middle|\, -\frac{9}{4}\pi^2\right)$.

7

a) $W_g = [\approx -0{,}76; 1]$



b) $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 \in \{0; \pi\} \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = \sqrt{\pi}$ oder $x = -\sqrt{\pi}$.

c) Es ist $g'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$. Also gilt $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x^2) = 0$ oder $x = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{\pi}{2}$ oder $x = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ oder $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ oder $x = 0$.

Eine Untersuchung des Vorzeichens von $g'(x)$ zeigt, dass g lokale Maxima an den Stellen $x = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ und $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (VZW von + nach −) und ein lokales Minimum an der Stelle $x = 0$ (VZW von − nach +) besitzt. Mit $f\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 1$, $f(0) = 0$ und $f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 1$ folgt $H_1\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}} \,\middle|\, 1\right)$, $T(0\,|\,0)$, und $H_2\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \,\middle|\, 1\right)$.

8

a) $f(1) = u(v(1)) = u(-1) = 0$

Mit $v(3) = 1$ und $u(1) = 0$ folgt $f(3) = 0$. Eine weitere Stelle mit diesem Funktionswert ist also $x = 3$.

b) Es ist $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$, also

$f'(1) = u'(v(1)) \cdot v'(1) = u'(-1) \cdot v'(1) \approx 2 \cdot 3 = 6$.

Gleichung der Normalen: $y = -\frac{1}{6}(x - 1) + f(1) = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}$.

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

$S_y\left(0 \,\middle|\, \frac{1}{6}\right)$ und $S_x(1\,|\,0)$.

Flächeninhalt des Dreiecks, das die Normale mit den Koordinatenachsen einschließt: $A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

II Natürliche Exponentialfunktion

Seite 39

8

a) $f': x \mapsto 2{,}5e^x$; $f'': x \mapsto 2{,}5e^x$; $F: x \mapsto 2{,}5e^x - 1{,}5x$

b) $f': x \mapsto \cos(x) - 0{,}5e^x$; $f'': x \mapsto -\sin(x) - 0{,}5e^x$;
$F: x \mapsto -\cos(x) - 0{,}5e^x$

c) $f': x \mapsto 4x^3 + 4x + 3e^x$; $f'': x \mapsto 12x^2 + 4 + 3e^x$;
$F: x \mapsto \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + 3e^x$

9

Der Graph von f entsteht aus dem Graphen der natürlichen Exponentialfunktion durch Spiegelung an der x-Achse und anschließende Verschiebung um 5 in y-Richtung (also um 5 nach oben).
Der Graph von g entsteht aus dem Graphen der natürlichen Exponentialfunktion durch

- Streckung mit dem Faktor 5 in y-Richtung $(g_1(x) = 5e^x)$,
- anschließende Verschiebung um 3 in x-Richtung (also um 3 nach rechts; $g_2(x) = 5e^{x-3}$) und
- anschließende Verschiebung um 1 in y-Richtung (also um 1 nach oben; $g_3(x) = 5e^{x-3} + 1 = g(x)$).

10

a) Die Aussage ist wahr, da für x in $f: x \mapsto e^x$ jeder beliebige Wert eingesetzt werden darf.

b) Die Aussage ist falsch, da $e^x > 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Wertemenge der natürlichen Exponentialfunktion ist demnach $\mathbb{R}^+$.

c) Die Aussage ist falsch, da für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $e^x > 0$ (vgl. Teilaufgabe b)). Für $x < 0$ gilt zudem $e^x < 1$.

d) Die Aussage ist wahr. Sie gilt für alle Funktionen f_1 und f_2 mit gleicher Definitionsmenge, für die $f_1(x) = f_2(-x)$ gilt. Mit $f_1(x) = e^x$ und $f_2(x) = e^{-x}$ ergibt sich die Aussage.

e) Die Aussage ist falsch. Die zweite Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion ist zwar für alle $x \in D$ größer null, weswegen der Graph der natürlichen Exponentialfunktion aber linksgekrümmt ist.

Seite 40

19

a) $f_a'(x) = a \cdot e^x$

b) Gleichung der Tangente: $y = mx + t$.

Mit $m = f_a'(0) = a$, $x = 0$ und $y = f_a(0) = a + 2$ folgt

$a + 2 = a \cdot 0 + t \Leftrightarrow t = a + 2$.

Damit folgt für die Tangentengleichung $y = a \cdot x + a + 2$.

Mit $x = -1{,}5$ und $y = 0$ folgt $0 = a \cdot (-1{,}5) + a + 2 \Leftrightarrow a = 4$.

G 21

Die Gleichungen (1), (3), (5), (6) und (7) lassen sich ohne Verwendung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen geschickt lösen.

Gleichung (1):

$x^2 - x = 2x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 3$

Gleichung (3):

$2t^2 = \frac{1}{4}t^2 \Leftrightarrow 8t^2 = t^2 \Leftrightarrow 7t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$

Gleichung (5):

$x - 2x^2 = 3x^2 + 4x \Leftrightarrow 5x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(5x + 3) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ oder $x = -\frac{3}{5}$

Gleichung (6):

$0 = 2(1 - 3x)^2 \Leftrightarrow 1 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

Gleichung (7):

$(x + 2)(x - 2) = 5 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3$ oder $x = 3$

Seite 44

10

a) $f': x \mapsto 4 - e^{-x^2} \cdot (-2x) = 4 + 2x \cdot e^{-x^2}$

b) $f': x \mapsto (6x^2 - 1) \cdot e^x + (2x^3 - x) \cdot e^x = (2x^3 + 6x^2 - x - 1) \cdot e^x$

c) $f': x \mapsto -2 \cdot e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)$

11

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\underset{\to +\infty}{x^4} \cdot \underset{\to +\infty}{e^x}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 \cdot e^x) = 0$, da die e-Funktion dominiert.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^5 + 2x^2 - x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left((3x^5 + 2x^2 - x) \cdot e^{-x}\right) = 0$, da die e-Funktion dominiert.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^5 + 2x^2 - x}{e^x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\underset{\to -\infty}{(3x^5 + 2x^2 - x)} \cdot \underset{\to +\infty}{e^{-x}}\right) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}e^x - 2x^2\right) = +\infty$, da die e-Funktion stärker wächst als x^2.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\underset{\to 0^+}{\frac{1}{2}e^x} - \underset{\to +\infty}{2x^2}\right) = -\infty$

Seite 45

17

$f'_a: x \mapsto e^{ax} + xe^{ax} \cdot a = (1 + ax) \cdot e^{ax}$

$f'_a(2) = (1 + 2a) \cdot e^{2a} = 0 \iff 1 + 2a = 0 \iff a = -\frac{1}{2}$

18

Es gilt $f'(x) = e^{g(x)} > 0$ für alle Werte von $g(x)$, d.h., der Graph von f hat keinen Extrempunkt.

Es gilt $f''(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$, d.h. $f''(x) = 0 \iff g'(x) = 0$. Der Graph von f hat also genau an der Stelle einen Wendepunkt, an der G_g den Hochpunkt hat.

G 21

Da die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind, gilt $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$. Mit $P(A) = 0{,}3$ und $P(A \cap B) = 0{,}12$ erhält man $P(B) = \frac{0{,}12}{0{,}3} = 0{,}4$. Damit ergeben sich alle fehlenden Werte.

	A	$\overline{A}$	
B	0,12	**0,28**	**0,4**
$\overline{B}$	**0,18**	**0,42**	**0,6**
	0,3	**0,7**	**1**

Seite 49

7

a) $\ln(e^7) = 7$

b) $e^{\ln(4x)} = 4x$

c) $2\ln\left(\sqrt{e^{-x}}\right) = -x$

d) $2 \cdot \ln\left(e^x \cdot \sqrt{e}\right) = 2x + 1$

8

a) $x = \ln(12) \approx 2{,}485$

b) $x = \frac{1}{2} \cdot \ln(2) \approx 0{,}347$

c) $x = 2 \cdot (\ln(4) + 3) \approx 8{,}773$

d) $x = \frac{1}{4} \cdot \left(\ln\left(\frac{1}{4}\right) + 2\right) \approx 0{,}153$

9

a) $f(x) = 4e^{-x} + 12x$; $f'(x) = -4e^{-x} + 12$; $f''(x) = 4e^{-x}$

Mögliche Extremstellen:

$f'(x) = 0 \iff -4e^{-x} + 12 = 0 \iff x = -\ln(3)$.

Untersuchung von $x = -\ln(3)$: $f''(-\ln(3)) = 4 \cdot e^{\ln(3)} = 12 > 0$, also Minimumstelle.

b) $f(x) = (3x - 9) \cdot e^{0{,}5x}$

$f'(x) = 3 \cdot e^{0{,}5x} + (3x - 9) \cdot 0{,}5 \cdot e^{0{,}5x} = \frac{3}{2}e^{0{,}5x}(x - 1)$

$f''(x) = \frac{3}{2}e^{0{,}5x}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)$

Mögliche Extremstellen:

$f'(x) = 0 \iff \frac{3}{2}e^{0{,}5x}(x - 1) = 0 \iff x = 1$.

Untersuchung von $x = 1$: $f''(1) = \frac{3}{2}e^{0{,}5} > 0$, also Minimumstelle.

c) $f(x) = e^{5x} - 4e^x$; $f'(x) = 5 \cdot e^{5x} - 4e^x = e^x \cdot (5e^{4x} - 4)$;

$f''(x) = 25 \cdot e^{5x} - 4e^x = e^x \cdot (25e^{4x} - 4)$

Mögliche Extremstellen:

$f'(x) = 0 \iff e^x \cdot (5e^{4x} - 4) = 0 \iff 5e^{4x} - 4 = 0 \iff x = \frac{1}{4} \cdot \ln(0{,}8)$.

Untersuchung von $x = \frac{1}{4} \cdot \ln(0{,}8)$:

$f''\left(\frac{1}{4} \cdot \ln(0{,}8)\right) = \left(e^{\ln(0{,}8)}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot (25e^{\ln(0{,}8)} - 4) = \sqrt[4]{0{,}8} \cdot 16 > 0$,

also Minimumstelle.

Seite 51

20

a) Symmetrie: Da $f(-x) = -2 \cdot e^{-2(-x)^2 + 1} = -2 \cdot e^{-2x^2 + 1} = f(x)$ ist, ist G_f symmetrisch zur y-Achse. Aus Symmetriegründen muss G_f damit bei $x = 0$ einen Extrempunkt besitzen.

Es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-2 \cdot \underset{\to -\infty}{\underset{\to 0}{e^{-2x^2 + 1}}}\right) = 0$ und entsprechend

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-2 \cdot e^{-2x^2 + 1}\right) = 0$, d.h., die x-Achse ist waagerechte Asymptote.

b) $f'(x) = 8x \cdot e^{-2x^2 + 1} = 0 \iff x = 0$. Also ist bei $x = 0$ der einzige Extrempunkt von G_f. Da $f(x) = -2 \cdot e^{-2x^2 + 1} < 0$ gilt, muss es sich um einen Tiefpunkt handeln: $T(0 \mid -2 \cdot e)$.

c) $f''(x) = 8 \cdot e^{-2x^2 + 1} + 8x \cdot e^{-2x^2 + 1} \cdot (-4x) = 8 \cdot (1 - 4x^2) \cdot e^{-2x^2 + 1} = 0$

$\iff 1 - 4x^2 = 0 \iff x = 0{,}5$ oder $x = -0{,}5$. Da $1 - 4x^2$ der Term einer nach unten offenen Parabel ist und $e^{-2x^2 + 1} > 0$ gilt, ergibt sich folgendes Krümmungsverhalten:

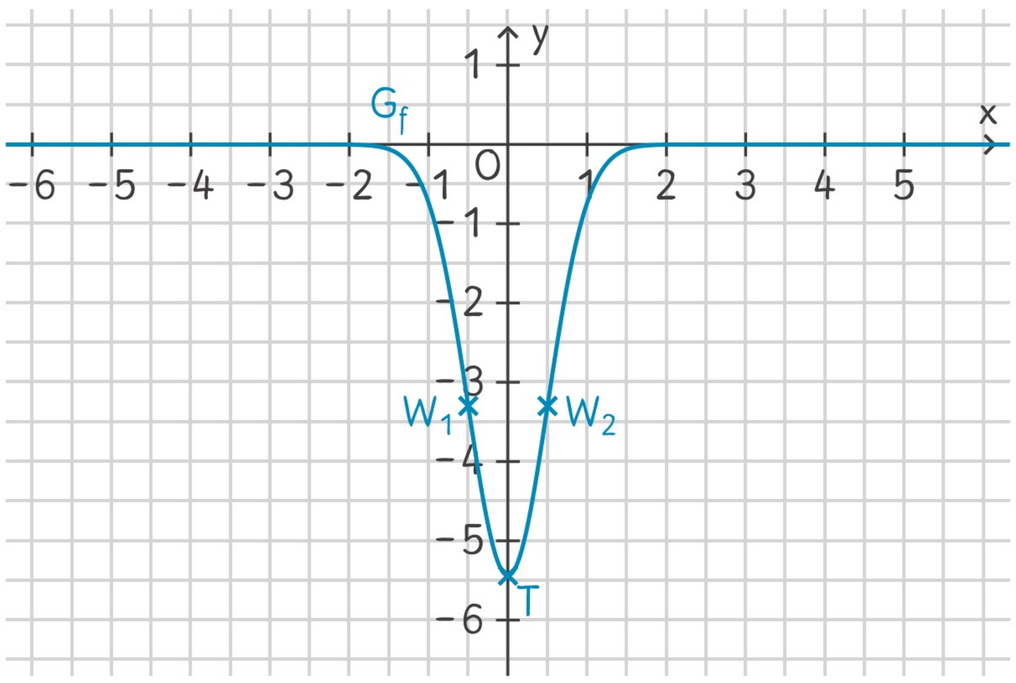
G_f ist rechtsgekrümmt in $]-\infty; -0{,}5]$, da $f''(x) < 0$ ist für $x < -0{,}5$.

G_f ist linksgekrümmt in $[-0{,}5; 0{,}5]$, da $f''(x) > 0$ ist für $-0{,}5 < x < 0{,}5$.

G_f ist rechtsgekrümmt in $[0{,}5; +\infty[$, da $f''(x) < 0$ ist für $x > 0{,}5$.

Mit $f(-0{,}5) = f(0{,}5) = -2\sqrt{e}$ ergeben sich die Wendepunkte $W_1(-0{,}5 \mid -2\sqrt{e})$ und $W_2(0{,}5 \mid -2\sqrt{e})$.

d)



21

a) $f_b(x) = e^{x-b} - x + 2$; $f'_b(x) = e^{x-b} - 1$; $f''_b(x) = e^{x-b}$

Mögliche Extremstellen: $f'_b(x) = e^{x-b} - 1 = 0 \iff x = b$.

Überprüfung: $f''_b(b) = 1 > 0$, also Minimum.

$f_b(b) = e^{b-b} - b + 2 = 3 - b$, also $T_b(b \mid 3 - b)$.

b) T_b liegt auf der x-Achse für $b = 3$.

c) Schnittpunkt mit der y-Achse: $S(0 \mid f_b(0)) = S(0 \mid e^{-b} + 2)$.

Die Steigung in S ist $f'_b(0) = e^{-b} - 1$. Die Tangente in S ist parallel zur Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten, wenn $f'_b(0) = 1$, also $e^{-b} - 1 = 1 \iff b = -\ln(2)$ gilt.

G 23

a) $-5x + 3 \geq 1 \iff -5x \geq -2 \iff x \leq \frac{2}{5}$
$L = \left]-\infty; \frac{2}{5}\right]$

b) $5 - 2x \leq 4x - 3 \iff 8 \leq 6x \iff x \geq \frac{4}{3}$
$L = \left[\frac{4}{3}; +\infty\right[$

c) $3x + 4 > 3x + 2 \iff 4 > 2$. Die Aussage ist allgemeingültig.
$L = \mathbb{R}$

d) $-x^2 + 5x - 4 = 0$, also $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-5 \pm 3}{-2}$,
$x_1 = 4$ und $x_2 = 1$
$-x^2 + 5x - 4$ ist der Term einer nach unten offenen Parabel. Dieser nimmt im Intervall zwischen den Nullstellen positive Werte an. Also folgt für die Ungleichung $L =]1; 4[$.

c) Wegen $80 \cdot e^{-0,1t} \to 0$ für $t \to +\infty$ strebt $f(t) = 100 - 80 \cdot e^{-0,1t}$ für $t \to +\infty$ gegen $S = 100$.

d) $f'(t) = 8 \cdot e^{-0,1t}$
$= 10 - (10 - 8 \cdot e^{-0,1t})$
$= 0,1 \cdot 100 - 0,1 \cdot (100 - 80 \cdot e^{-0,1t})$
$= 0,1 \cdot (S - f(t))$

G 18

Individuelle Lösung, z. B.:

a) „Keine Sechs."

b) „Mindestens eine Sechs."

c) „Genau eine Sechs."

d) „Höchstens eine Sechs."

Seite 56

9

a) Die Werte der Quotienten $\frac{f(t+10)}{f(t)}$ aus jeweils aufeinanderfolgenden Zeitschritten betragen alle ca. 2,6 und sind damit konstant. Dies deutet auf ein exponentielles Wachstum hin.

b) Mit dem Ansatz $f(t) = b \cdot e^{kt}$ als Funktionsterm der Funktion f ergibt sich mithilfe des ersten bzw. letzten Wertepaares
$f(10) = b \cdot e^{10k} = 104$ (I) und $f(50) = b \cdot e^{50k} = 4696$ (II).
Aus (II) : (I) erhält man $\frac{b \cdot e^{50k}}{b \cdot e^{10k}} = \frac{4696}{104} \iff e^{40k} = \frac{587}{13}$
$\iff 40k = \ln\left(\frac{587}{13}\right) \iff k = 0,025 \cdot \ln\left(\frac{587}{13}\right)$.
k in (I) einsetzen: $b = \frac{104}{e^{0,25 \cdot \ln\left(\frac{587}{13}\right)}} = \frac{104}{\left(\frac{587}{13}\right)^{0,25}} \approx 40$. Damit erhält man $f: t \mapsto \frac{104}{\left(\frac{587}{13}\right)^{0,25}} \cdot e^{0,025 \cdot \ln\left(\frac{587}{13}\right) \cdot t} \approx 40 \cdot e^{0,025 \cdot \ln\left(\frac{587}{13}\right) \cdot t}$.

c) Verdopplungszeit: $T_V = \frac{\ln(2)}{k} = 40 \cdot \frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{587}{13}\right)} \approx 7,28$.
Die Verdopplungszeit beträgt ca. 7,28 s.

10

a) Der Anfangsbestand beträgt 140.

b) Da $1,02 > 1$ ist, handelt es sich um eine exponentielle Zunahme.

c) $f(t) = 140 \cdot e^{\ln(1,02) \cdot t} \approx 140 \cdot e^{0,0198 \cdot t}$

d) $T_V \approx \frac{1}{0,0198} \cdot \ln(2) \approx 35$. Die Verdopplungszeit beträgt ca. 35 Jahre.

Seite 57

15

a) Zu Beginn ist die Temperatur $T(0) = 20 + 70 = 90$, also 90 °C. Langfristig erreicht die Kaffeetemperatur Raumtemperatur. Da $T(t) \to 20$ für $t \to \infty$ gilt, beträgt die Raumtemperatur 20 °C.

b) Es ist $T(30) = 20 + 70 \cdot e^{-30k} = 35,6$ und somit
$k = -\frac{1}{30} \cdot \ln\left(\frac{15,6}{70}\right) \approx 0,05$.

c) Es ist $T'(t) = -3,5 \cdot e^{-0,05t} = -1$ und somit
$t = -20 \cdot \ln\left(\frac{1}{3,5}\right) \approx 25,06$. Nach ca. 25 Minuten ist die momentane Änderungsrate der Kaffeetemperatur $-1 \frac{°C}{min}$.

16

a) Es ist $f'(t) = 8 \cdot e^{-0,1t} > 0$. Also nimmt die Karpfenanzahl nie ab.

b) Da $80 \cdot e^{-0,1t} > 0$ ist, ist $f(t) = 100 - 80 \cdot e^{-0,1t} < 100$ für alle $t > 0$.

Seite 65

1

a) $f'(x) = -28e^{-4x} + 10x$

b) $f'(x) = 2e^{10x-3} - 2 \cdot \sin(-2x)$

c) $f_a'(x) = e^{-x^2} \cdot (a - 2ax^2 - 6x)$

2

a) $x_1 = \frac{1}{2} \cdot \ln(5)$, $x_2 = -2$

b) $9e^{-x} + e^x = 8 \iff e^{2x} - 8e^x + 9 = 0$. Substitution: $u = e^x$.
$u^2 - 8u + 9 = 0$, also $u_{1,2} = 4 \pm \sqrt{7}$.
Lösung aus Rücksubstitution:
$x_1 = \ln(4 + \sqrt{7})$ und $x_2 = \ln(4 - \sqrt{7})$.

c) $e^{3x} - 4e^x = 0 \iff e^x \cdot (e^{2x} - 4) = 0$. Lösung: $x = \frac{1}{2} \cdot \ln(4)$.

3

a) Man liest die Gleichung der waagerechten Asymptote ab: $y = -1$. Da der Graph von f mit $f(x) = a \cdot e^{bx} + c$ die waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y = c$ hat, folgt $c = -1$.
Aus $f(0) = a + c = 1$ folgt $a = 2$.

b) Aus $f(-1) = a \cdot e^{-b} + c = 2 \cdot e^{-b} - 1 = 0$ folgt $e^{-b} = \frac{1}{2}$.
Somit ist $b = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$.

c) Es ist $f(x) = 2 \cdot e^{\ln(2)x} - 1$ und $f'(x) = 2 \cdot \ln(2) \cdot e^{\ln(2)x}$.
Damit gilt $f'(0) = 2 \cdot \ln(2)$ und
$f'(-1) = 2 \cdot \ln(2) \cdot e^{-\ln(2)} = \frac{2 \cdot \ln(2)}{e^{\ln(2)}} = \frac{2 \cdot \ln(2)}{2} = \ln(2)$.
Somit ist $f'(0) = 2 \cdot f'(-1)$.

4

a) Nullstellen: $f(x) = 0 \iff 4x \cdot e^{-0,5x} = 0 \iff x = 0$.
(Es ist $e^{-0,5x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.)

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (4x \cdot e^{-0,5x}) = 0$, da $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^n \cdot e^{-x}) = 0$ gilt.
$\lim\limits_{x \to -\infty} (\underbrace{4x}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{e^{-0,5x}}_{\to +\infty}) = -\infty$

c) $f'(x) = 4 \cdot e^{-0,5x} - 2x \cdot e^{-0,5x} = (4 - 2x) \cdot e^{-0,5x}$
$f'(x) = 0 \iff (4 - 2x) \cdot e^{-0,5x} = 0 \iff x = 2$.
(Es ist $e^{-0,5x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.)
$f'(x)$ wechselt bei $x = 2$ das Vorzeichen von + nach −, d. h., G_f hat den Hochpunkt H bei $\left(2 \middle| \frac{8}{e}\right) \approx (2 | 2,9)$.

d) $f''(x) = -2 \cdot e^{-0,5x} - 0,5 \cdot (4 - 2x) \cdot e^{-0,5x} = (x - 4) \cdot e^{-0,5x}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 4) \cdot e^{-0,5x} = 0 \Leftrightarrow x = 4$

$x = 4$ ist die einzige mögliche Wendestelle, da $e^{-0,5x} > 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$.

$f''(x)$ wechselt bei $x = 4$ das Vorzeichen, d. h., G_f hat den Wendepunkt W bei $\left(4 \left| \frac{16}{e^2}\right.\right) \approx (4 \mid 2,2)$.

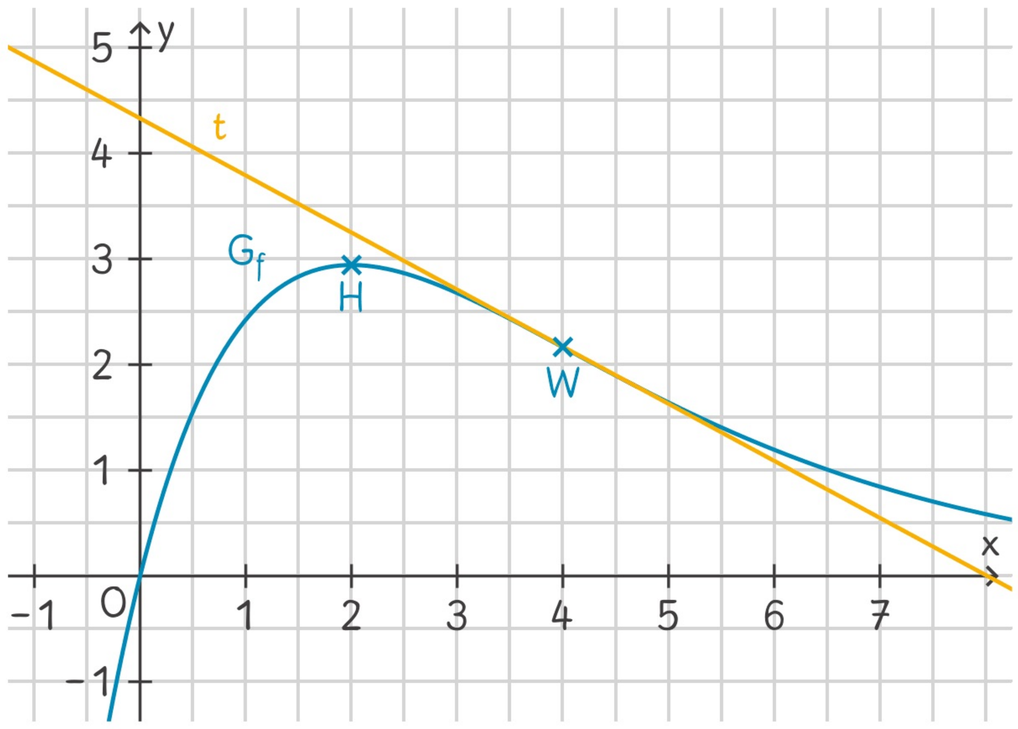
Gleichung der Wendetangente: $y = mx + t$.

Mit $m = f'(4) = -4 \cdot e^{-2} \approx -0,54$ und $W\left(4 \left| \frac{16}{e^2}\right.\right)$ folgt

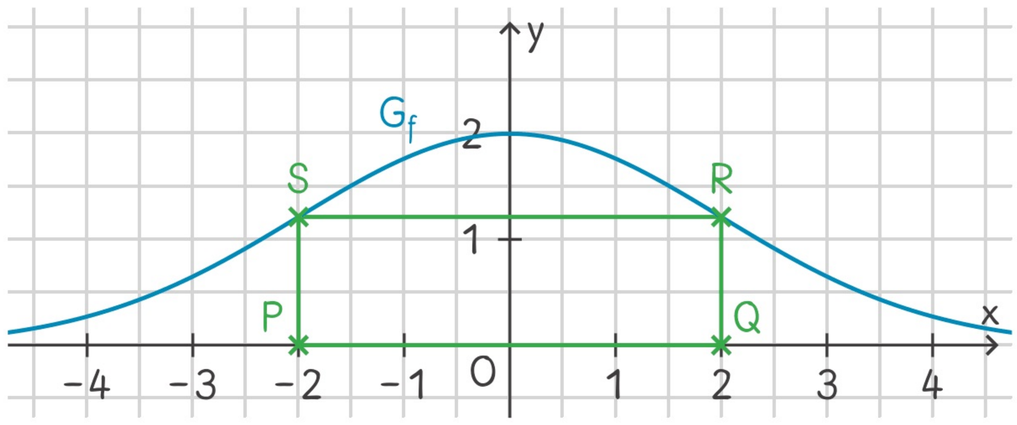
$t = y - mx = \frac{16}{e^2} - \frac{-4}{e^2} \cdot 4 = \frac{32}{e^2} \approx 4,33$.

Gleichung der Wendetangente: $y = -\frac{4}{e^2}x + \frac{32}{e^2}$.

e) Graph:



c)



d) $f(c) = 2e^{-\frac{1}{8}c^2} = 1 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{8}c^2} = 0,5 \Leftrightarrow -\frac{1}{8}c^2 = \ln(0,5)$

$\Leftrightarrow c = \sqrt{-8 \cdot \ln(0,5)}$

e) Seitenlängen des Rechtecks PQRS: $2c$ und $f(c) = 2e^{-\frac{1}{8}c^2}$.

$A(c) = 2c \cdot 2e^{-\frac{1}{8}c^2} = 4c \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2}$

f) $A'(c) = 4 \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2} + 4c \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2} \cdot \left(-\frac{1}{4}c\right) = 4 \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2} - c^2 \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2}$

$= (4 - c^2) \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2}$

$A'(c) = 0 \Leftrightarrow 4 - c^2 = 0 \Leftrightarrow c = 2$ (da $c \in \mathbb{R}^+$)

A' wechselt bei $c = 2$ das Vorzeichen von + nach −. Also wird der Flächeninhalt für $c = 2$ maximal.

III Zufallsgrößen und Binomialverteilung

5

a) $b = f(0) = 400$

$f(30) = 400 \cdot e^{k \cdot 30} = 520 \Leftrightarrow e^{k \cdot 30} = 1,3 \Leftrightarrow k = \frac{\ln(1,3)}{30} \approx 0,0087455$

Damit erhält man $f: t \mapsto 400 \cdot e^{\frac{\ln(1,3)}{30} \cdot t}$.

$f(t) = 1000 \Leftrightarrow 400 \cdot e^{\frac{\ln(1,3)}{30} \cdot t} = 1000 \Leftrightarrow e^{\frac{\ln(1,3)}{30} \cdot t} = 2,5$

$\Leftrightarrow t = 30 \cdot \frac{\ln(2,5)}{\ln(1,3)} \approx 104,8$

Nach ca. 105 Tagen kann man mit 1000 Fischen rechnen.

b) Verdopplungszeit: $T_V = \frac{\ln(2)}{k} = 30 \cdot \frac{\ln(2)}{\ln(1,3)} \approx 79,3$.

Die Verdopplungszeit beträgt ca. 79 Tage.

c) Wachstumsgeschwindigkeit:

$f'(t) = 400 \cdot \frac{\ln(1,3)}{30} \cdot e^{\frac{\ln(1,3)}{30} \cdot t} = \frac{40}{3} \cdot \ln(1,3) \cdot e^{\frac{\ln(1,3)}{30} \cdot t}$.

Zu Beginn: $f'(0) = \frac{40}{3} \cdot \ln(1,3) \approx 3,5$.

Nach einem halben Jahr:

$f'(182,5) = \frac{40}{3} \cdot \ln(1,3) \cdot e^{\frac{\ln(1,3)}{30} \cdot 182,5} \approx 17,3$.

Die Wachstumsgeschwindigkeit beträgt zu Beginn ca. 3 Fische pro Tag und nach einem halben Jahr ca. 17 Fische pro Tag.

6

a) $f(0) = 2 \cdot e^0 = 2$, d. h., $(0 \mid 2)$ ist der Schnittpunkt von G_f mit der y-Achse.

$f(-x) = 2e^{-\frac{1}{8}(-x)^2} = 2e^{-\frac{1}{8}x^2} = f(x)$, d. h., G_f ist symmetrisch bezüglich der y-Achse.

b) $f'(x) = 2e^{-\frac{1}{8}x^2} \cdot \left(-\frac{1}{4}x\right) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{-\frac{1}{8}x^2}$

Gleichung der Wendetangente w: $y = mx + t$.

Mit $m = f'(-2) = e^{-\frac{1}{2}}$ und $W\left(-2 \left| 2e^{-\frac{1}{2}}\right.\right)$ folgt

$2e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2) + t \Leftrightarrow t = 4e^{-\frac{1}{2}}$.

Gleichung von w: $y = e^{-\frac{1}{2}} \cdot x + 4e^{-\frac{1}{2}}$.

Schnittstelle mit der x-Achse: $e^{-\frac{1}{2}} \cdot x + 4e^{-\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

6

a) Ergebnismenge: $\Omega = \{ABC; ACB; BAC; BCA; CAB; CBA\}$.

Wertetabelle:

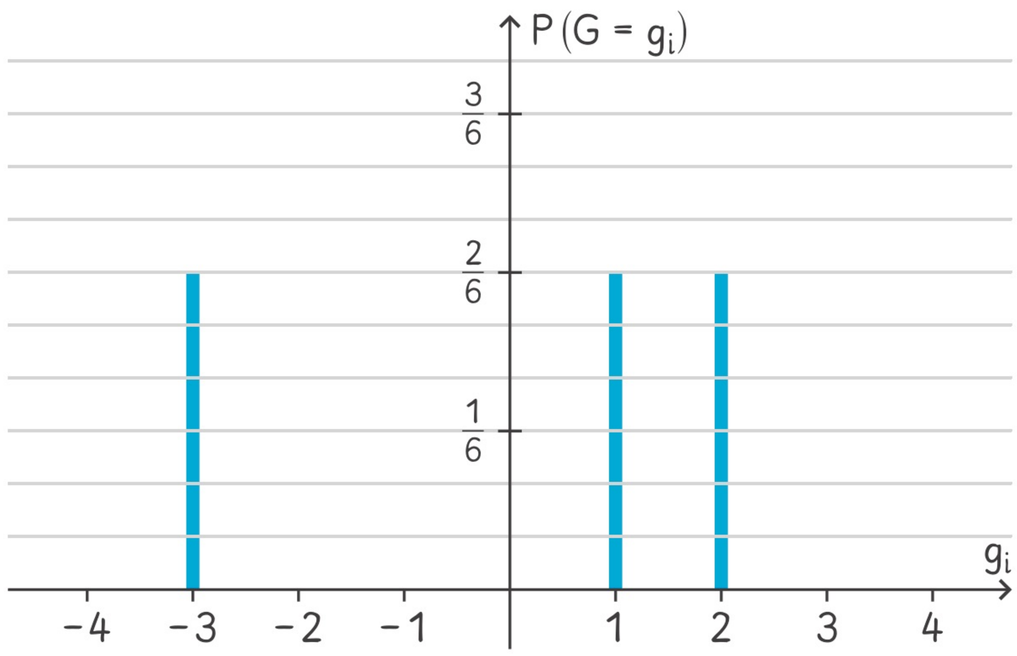
ω_i	ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA
$G(\omega_i)$	2	2	1	−3	1	−3

b) $G = 2$: Man gewinnt 2 €, wenn A als erster Buchstabe gezogen wird.

$G = -3$: Man verliert 3 €, wenn A als letzter Buchstabe gezogen wird.

$G \leq 2$: Jedes Ereignis kann eintreten.

c) $P(G = -3) = \frac{2}{6}$; $P(G = 1) = \frac{2}{6}$; $P(G = 2) = \frac{2}{6}$



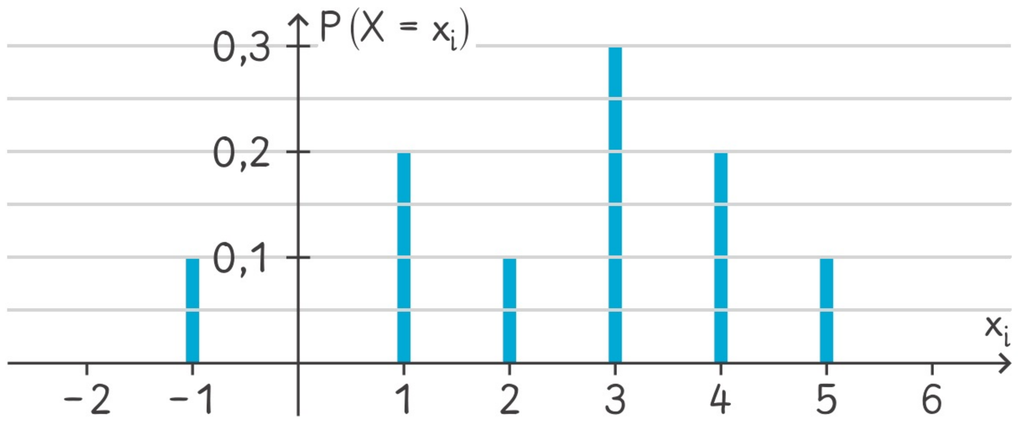
Seite 72

13

a) $P(X < 3) = 0{,}4$; $P(X = 3) = 0{,}3$; $P(X \leq 3) = 0{,}7$;
$P(X = 3{,}5) = 0$; $P(X \leq 3{,}5) = 0{,}7$

b) $P(1 < X \leq 3) = 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}4$;
$P(1 \leq X \leq 3) = 0{,}7 - 0{,}1 = 0{,}6$

c)



G 15

a) $f(1) = 1$; $f(2) = 20$; mittlere Änderungsrate in $I = [1; 2]$:

$m = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{20 - 1}{1} = 19.$

$f'(x) = 9x^2 - 2$; $f'(x) = 19 \Leftrightarrow 9x^2 - 2 = 19 \Leftrightarrow x^2 = \frac{19 + 2}{9} = \frac{7}{3}$

$\Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{7}{3}}$ oder $x = \sqrt{\frac{7}{3}}$

Wegen $\sqrt{\frac{7}{3}} \in [1; 2]$ und $-\sqrt{\frac{7}{3}} \notin [1; 2]$ gilt $x_m = \sqrt{\frac{7}{3}}$.

b) $f(0) = 2$; $f(4) = e^2 + 1$; mittlere Änderungsrate in $I = [0; 4]$:

$m = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{e^2 + 1 - 2}{4} = \frac{e^2 - 1}{4}$.

$f'(x) = 0{,}5 \cdot e^{0{,}5x}$

$f'(x) = \frac{e^2 - 1}{4} \Leftrightarrow 0{,}5 \cdot e^{0{,}5x} = \frac{e^2 - 1}{4} \Leftrightarrow e^{0{,}5x} = \frac{e^2 - 1}{2}$

$\Leftrightarrow 0{,}5x = \ln\left(\frac{e^2 - 1}{2}\right) \Leftrightarrow x = 2\ln\left(\frac{e^2 - 1}{2}\right)$

Wegen $2\ln\left(\frac{e^2 - 1}{2}\right) \in [0; 4]$ gilt $x_m = 2\ln\left(\frac{e^2 - 1}{2}\right)$.

Seite 76

9

a) $P(X \geq 1) = 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}7$

b) $\mu = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}1 = 1{,}4$
Interpretation des Erwartungswerts: Auf lange Sicht sind im Mittel in 1,4 Haushalten um die Mittagszeit Personen anzutreffen.

c) $\sigma^2 = (0 - 1{,}4)^2 \cdot 0{,}3 + (1 - 1{,}4)^2 \cdot 0{,}3 + (2 - 1{,}4)^2 \cdot 0{,}2 + (3 - 1{,}4)^2 \cdot 0{,}1$
$+ (4 - 1{,}4)^2 \cdot 0{,}1 = 1{,}64$
$\sigma \approx 1{,}28$

Seite 77

23

E: „Das Teil ist einwandfrei."
$\overline{E}$: „Das Teil ist nicht einwandfrei."
$P(E) = 0{,}95$ und $P(\overline{E}) = 0{,}05$.
V: Verkaufspreis (in €).
Gewinn für ein einwandfreies Teil (in €): $V - 10$.
Gewinn für ein nicht einwandfreies Teil (in €): $V - 2 \cdot 10 = V - 20$.
Erwünschter Gewinn für ein Teil (in €): 0,5.
Erwartungswert: $\mu = (V - 10) \cdot 0{,}95 + (V - 20) \cdot 0{,}05$.
$0{,}5 = \mu \Leftrightarrow 0{,}5 = (V - 10) \cdot 0{,}95 + (V - 20) \cdot 0{,}05 \Leftrightarrow 0{,}5 = V - 10{,}5$
$\Leftrightarrow 11 = V$
Die Firma muss ihre Teile zu 11 € pro Teil anbieten.

G 25

a) $|\overline{AB}| = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2} = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (1 - 4)^2} = 5$

$|\overline{BC}| = \sqrt{(y_C - y_B)^2 + (x_C - x_B)^2} = \sqrt{(-3 - 3)^2 + (-7 - 1)^2} = 10$

$|\overline{AC}| = \sqrt{(y_C - y_A)^2 + (x_C - x_A)^2} = \sqrt{(-3 - (-1))^2 + (-7 - 4)^2} = \sqrt{125}$
$= 5\sqrt{5}$

b) Das Dreieck ist rechtwinklig, wenn $|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 = |\overline{AC}|^2$ gilt.
$|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 = 5^2 + 10^2 = 125 = |\overline{AC}|^2$

Seite 80

5

a) $10^4 = 10\,000$ mögliche Reihenfolgen

b) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ mögliche Reihenfolgen

Seite 81

11

a) $2^{10} = 1024$ **b)** (1) $\frac{2}{2^{10}} = \frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}$ (2) $\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$ (3) $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$

12

a) $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$

$\frac{8!}{(8 - 5)!} = \frac{8!}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$

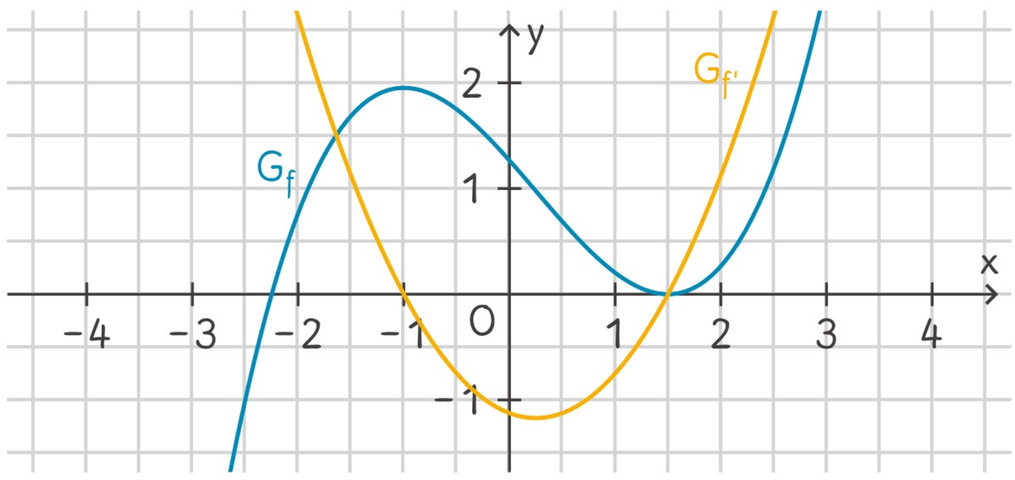
b) $\frac{n!}{(n - k)!} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n - k) \cdot (n - k - 1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$

$= \frac{n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1) \cdot (n - k) \cdot (n - k - 1) \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n - k) \cdot (n - k - 1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$

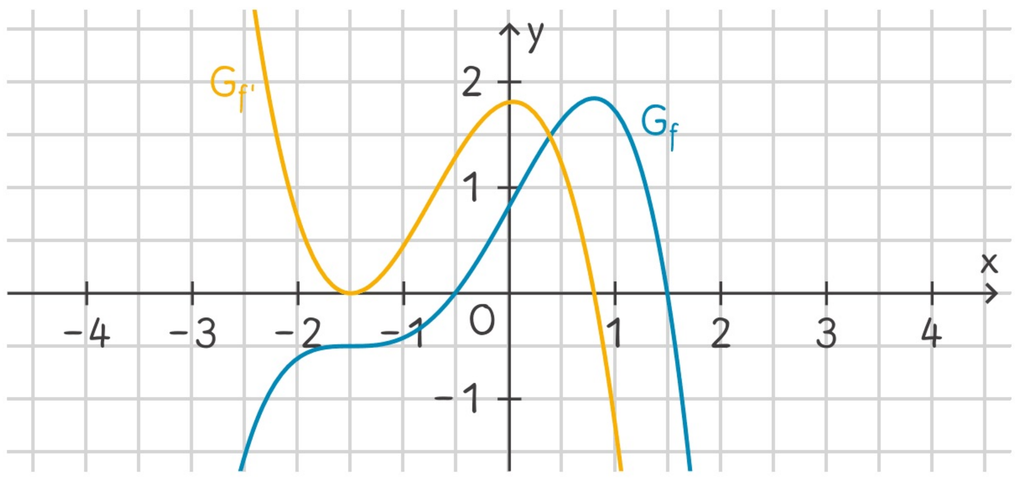
$= n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1)$

G 14

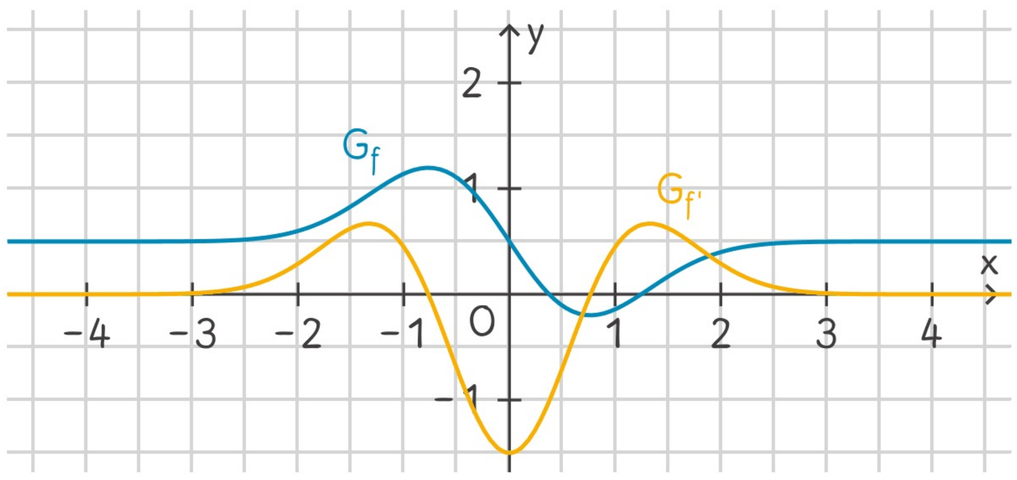
a)



b)



c)



Seite 84

5

a) Urnenmodell: Ziehen von fünf aus neun Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge.

Es gibt $\binom{9}{5} = 126$ verschiedene Wurfbilder.

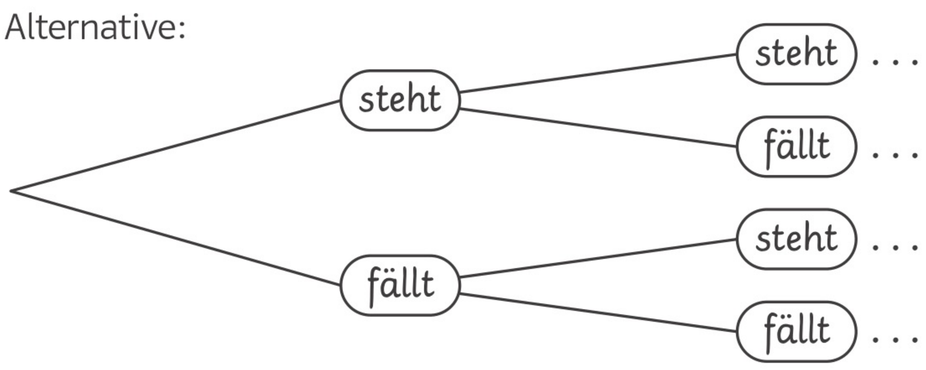
b) $\binom{9}{4} = 126$ verschiedene Wurfbilder.

c) $\binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \ldots + \binom{9}{9} = \frac{9!}{0!\,9!} + \frac{9!}{1!\,8!} + \ldots + \frac{9!}{8!\,1!} + \frac{9!}{9!\,0!}$

$= 1 + 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 + 9 + 1 = 512 = 2^9$

Es gibt 2^9 verschiedene Wurfbilder.

Alternative:



Es gibt also 2^9 verschiedene Wurfbilder.

Seite 85

14

a) $10 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{100}$

b) $1 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} = \frac{72}{100}$

c) $\frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{7}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{120}$

d) $\frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{6}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$

G 16

a) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

$c^2 = 5^2 + 3{,}5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3{,}5 \cdot \cos 75° = 28{,}19\ldots \Rightarrow c = 5{,}31\ldots$

Die Seite c ist ungefähr 5,3 cm lang.

$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{a}{c}$; $\frac{\sin\alpha}{\sin 75°} \approx \frac{5}{5{,}31} \Rightarrow \sin\alpha \approx \frac{5}{5{,}31} \cdot \sin 75° \Rightarrow \alpha \approx 65°$

$\beta = 180° - \alpha - \gamma \approx 180° - 65° - 75° = 40°$

b) $\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{c}{b}$; $\sin\gamma = \frac{3{,}5}{6} \cdot \sin 70° \Rightarrow \gamma \approx 33°$

$\alpha = 180° - \gamma - \beta \approx 180° - 33° - 70° = 77°$

$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb \cdot \cos\alpha$

$a^2 \approx 3{,}5^2 + 6^2 - 2 \cdot 3{,}5 \cdot 6 \cdot \cos 77° = 38{,}80\ldots \Rightarrow a = 6{,}22\ldots$

Die Seite a ist ungefähr 6,2 cm lang.

Seite 88

4

1: Besserung.

0: Keine Besserung.

a) $P(11101) = 0{,}7^3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}7^4 \cdot 0{,}3 = 0{,}072\,03 \approx 7\,\%$

b) $P(11111) = 0{,}7^5 = 0{,}168\,07 \approx 17\,\%$

c) $P(11100) = 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^2 = 0{,}030\,87 \approx 3\,\%$

d) $P(10000;\ 01000;\ 00100;\ 00010;\ 00001) = 0{,}7 \cdot 0{,}3^4 \cdot 5 \approx 3\,\%$

9

$P(A) = 0{,}15 \cdot 0{,}85^4 \approx 7{,}8\,\%$

$P(B) = 0{,}15 \cdot 0{,}85^4 \cdot 5 \approx 39{,}2\,\%$

$P(C) = 0{,}85^4 \approx 52{,}2\,\%$

$P(D) = P(B) = 0{,}15 \cdot 0{,}85^4 \cdot 5 \approx 39{,}2\,\%$

$P(E) = P(A) = 0{,}15 \cdot 0{,}85^4 \approx 7{,}8\,\%$

G 11

a) $x = 5$

b) $e^{t+1} = 9 \Leftrightarrow t + 1 = \ln(9) \Leftrightarrow t = \ln(9) - 1$

c) $n = \log_{\frac{5}{6}}(0{,}99)$

d) $e^{2x} = -9$. Die Gleichung hat keine Lösung.

e) $x = -3$ oder $x = 3$

f) $1 - p = \sqrt[10]{0{,}9} \Leftrightarrow p = 1 - \sqrt[10]{0{,}9}$

g) $t^3 = -1 \Leftrightarrow t = -1$

h) $\frac{1}{3}x^4 = -5$. Die Gleichung hat keine Lösung.

Seite 93

10

a) Der Term beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es unter zehn Versuchen mit der Trefferwahrscheinlichkeit 0,2 genau vier Treffer gibt.

$B(10;\ 0{,}2;\ 4) = 0{,}088\,08\ldots \approx 8{,}8\,\%$

b) Der Term beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es unter neun Versuchen mit der Trefferwahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ höchstens drei Treffer gibt.

$P^9_{\frac{1}{3}}(X \leq 3) = \sum_{i=0}^{3} B\left(9;\ \frac{1}{3};\ i\right) = 0{,}650\,30\ldots \approx 65{,}0\,\%$

c) Der Term beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es unter zehn Versuchen mit der Trefferwahrscheinlichkeit 0,2 mehr als 2 und höchstens 4 Treffer gibt.

$P^{10}_{0,2}(2 < X \leq 4) = P^{10}_{0,2}(X = 3) + P^{10}_{0,2}(X = 4) = 0{,}289\,40\ldots \approx 28{,}9\,\%$

d) Der Term beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es unter acht Versuchen mit der Trefferwahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ mindestens sechs Treffer gibt.

$P^8_{\frac{3}{4}}(X \geq 6) = \sum_{i=6}^{8} B\left(8;\ \frac{3}{4};\ i\right) = 0{,}678\,54\ldots \approx 67{,}9\,\%$

11

Individuelle Lösung, z. B.:

Aus einer Urne mit einer schwarzen und drei weißen Kugeln wird fünfmal mit Zurücklegen gezogen.

Ereignis zum Term $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$:

Die ersten beiden gezogenen Kugeln sind schwarz und die restlichen weiß.

Ereignis zum Term $\binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$:

Zwei der gezogenen Kugeln sind schwarz und drei weiß.

Seite 94

21

Individuelle Lösung, z. B.:

Es ist p die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer und $1 - p$ die Wahrscheinlichkeit für eine Niete.

Wenn man $n - k$ Nieten erhält, ist das gleichbedeutend damit, k Treffer zu erhalten. Damit ist die Wahrscheinlichkeit $B(n;\ 1 - p;\ n - k)$ für $n - k$ Nieten genau gleich groß wie die Wahrscheinlichkeit $B(n;\ p;\ k)$ für k Treffer.

22

a) Treffer bedeute, dass ein Ei beschädigt ist. Es ist $n = 10$ und $p = 0{,}1$.

$B(10;\ 0{,}1;\ 0) = 0{,}348\,67\ldots \approx 35\,\%$

b) Treffer bedeute, dass ein Kunde eine Schachtel mit ausschließlich unbeschädigten Eiern erhält. Es ist $n = 12$ und $p \approx 0{,}35$ (aus Teilaufgabe a)).

$B(12;\ 0{,}35;\ 2) = 0{,}108\,84\ldots \approx 11\%$

G 24

a) $\frac{2{,}5}{3} = \frac{2}{n} \Leftrightarrow n = \frac{3}{2{,}5} \cdot 2 = \frac{12}{5} = 2{,}4 \qquad \frac{2{,}5+3}{3} = \frac{m}{1} \Leftrightarrow m = \frac{5{,}5}{3} = \frac{11}{6} = 1{,}8\overline{3}$

b) $\frac{A_{ABC}}{A_{ADE}} = \left(\frac{1}{m}\right)^2 = \left(\frac{6}{11}\right)^2 = \frac{36}{121}$

Seite 98

12

a) Die Wahrscheinlichkeit für das Keimen einer Blumenzwiebel ist unabhängig davon, wie die anderen Blumenzwiebeln keimen, und die Wahrscheinlichkeit für das Keimen ist bei allen Blumenzwiebeln konstant 90 %.
X: „Anzahl der keimenden Blumenzwiebeln“, $n = 20$ und $p = 0{,}9$.
(1) $P_{0,9}^{20}(X = 16) = 0{,}089\,77\ldots \approx 9\,\%$
(2) $P_{0,9}^{20}(X \geq 16) = 1 - P_{0,9}^{20}(X \leq 15) = 0{,}956\,82\ldots \approx 96\,\%$
(3) $P_{0,9}^{20}(X \leq 14) = 0{,}011\,25\ldots \approx 1\,\%$
(4) $P_{0,9}^{20}(X = 20) = 0{,}121\,57\ldots \approx 12\,\%$

b) X: „Anzahl der keimenden Blumenzwiebeln“, $n = 16$ und $p = 0{,}9$.
Durch Probieren:
$P_{0,9}^{16}(X \geq 12) = 1 - P_{0,9}^{16}(X \leq 11) = 0{,}982\,99\ldots > 95\,\%$
$P_{0,9}^{15}(X \geq 12) = 1 - P_{0,9}^{15}(X \leq 11) = 0{,}944\,44\ldots < 95\,\%$
Wenn man 16 Blumenzwiebeln pflanzt, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wenigstens zwölf Blumen blühen, größer als 95 %, bei 15 und weniger Blumenzwiebeln ist die Wahrscheinlichkeit kleiner als 95 %. Also muss man mindestens 16 Blumenzwiebeln pflanzen.

Seite 100

23

a) X: „Anzahl der roten Gummibärchen in einer Tüte“, $n = 50$ und $p = 25\,\%$.
$50 \cdot \frac{1}{3} = 16\frac{2}{3}$
$P_{0,25}^{50}(X \geq 17) = 1 - P_{0,25}^{50}(X \leq 16) = 0{,}098\,30\ldots \approx 10\,\%$
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer zufällig ausgewählten Tüte mehr als ein Drittel der Gummibärchen rot ist, beträgt etwa 10 %.

b) Individuelle Lösung, z. B.:
Ereignis: „Spätestens das vierte aus dem Verpackungsautomaten fallende Gummibärchen ist rot.“

c) Y: „Anzahl der gelben Gummibärchen in einer Tüte“ und $n = 50$. p ist gesucht.
$P_p^{50}(Y > 0) = 1 - P_p^{50}(Y = 0) = 1 - (1-p)^{50} \geq 0{,}95$
$1 - 0{,}95 \geq (1-p)^{50} \Leftrightarrow 0{,}05 \geq (1-p)^{50} \Leftrightarrow \sqrt[50]{0{,}05} \geq 1 - p$
$\Leftrightarrow p \geq 1 - \sqrt[50]{0{,}05} = 0{,}058\,15\ldots$
Der Anteil an gelben Gummibärchen muss mindestens 5,8 % betragen.

G 25

a) $4x - 7x + 3 - 9 + 3x = -6$

b) $6x^3 + 30x^2 - 24x - 30x^2 = 6x^3 - 24x$

c) $12x^2 - 6 - 12x^2 + 8x = 8x - 6$

d) $2x^3 + 6x^2 - (2x^3 + 3x^2 - 2x - 3)$
$= 2x^3 + 6x^2 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 3 = 3x^2 + 2x + 3$

e) $2z - (z^2 + 3z + z + 3) + z^2 - 9z$
$= 2z - z^2 - 3z - z - 3 + z^2 - 9z = -11z - 3$

f) $4t^2 - 6t + 26 - 6t + 12t = 4t^2 + 26$

Seite 104

11

a) Es ist $n = 200$ und $p = 0{,}04$.
$\mu = 200 \cdot 0{,}04 = 8$
Auf lange Sicht trifft die Kontrolleurin bei 200 Kontrollen im Durchschnitt acht Fehlentscheidungen.

b) $\sigma^2 = 8 \cdot (1 - 0{,}04) = 7{,}68;\ \sigma = \sqrt{7{,}68} \approx 2{,}77$
$\mu - \sigma \approx 5{,}23;\ \mu + \sigma \approx 10{,}77$
$P_{0,04}^{200}(5{,}23 \leq X \leq 10{,}77) = P_{0,04}^{200}(6 \leq X \leq 10)$
$= P_{0,04}^{200}(X \leq 10) - P_{0,04}^{200}(X \leq 5)$
$= 0{,}634\,32\ldots \approx 63\,\%$

Seite 106

24

X: „Anzahl der Reparaturen mit Beschwerden“, $n = 50$ und $p = 0{,}2$.
$\mu = 50 \cdot 0{,}2 = 10;\ \sigma = \sqrt{10 \cdot 0{,}8} \approx 2{,}83;\ \mu - \sigma \approx 10 - 2{,}83 = 7{,}17$
Die Chefin wäre zufrieden, wenn in der Stichprobe höchstens sieben Beschwerden wären.
Y: „Anzahl der Reparaturen mit Beschwerden“, $n = 50$ und $p = 0{,}1$ (halbe Anzahl an Beschwerden).
$P_{0,1}^{50}(Y \geq 8) = 1 - P_{0,1}^{50}(Y \leq 7) = 0{,}122\,14\ldots$
Die Chefin ist mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 12 % weiter unzufrieden.

G 26

Zylinder: Es gilt $\frac{V_Z}{V_W} = \frac{\pi r^2 \cdot 2r}{(2r)^3} = \frac{\pi}{4} \approx 79\,\%$.

Kegel: Es gilt $\frac{V_{Ke}}{V_W} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 2r}{(2r)^3} = \frac{\pi}{12} \approx 26\,\%$.

Kugel: Es gilt $\frac{V_{Ku}}{V_W} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{(2r)^3} = \frac{\pi}{6} \approx 52\,\%$.

Seite 110

5

a) Frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff, da der Wert einer statistischen Erhebung erhoben wird, d. h., das Zufallsexperiment „Paket wird verspätet zugestellt“ wurde sehr häufig durchgeführt.

b) Laplace’scher Wahrscheinlichkeitsbegriff, da das Ergebnis WZW einer von acht gleichwahrscheinlichen Ausgängen ist.

c) Subjektiver Wahrscheinlichkeitsbegriff, da jemand anderes die Situation anders beurteilen kann.

d) Frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff, da der Wert einer statistischen Erhebung erhoben wird, d. h., das Zufallsexperiment „Getriebe fällt bei einer Laufleistung von unter 200 000 km aus“ wurde sehr häufig durchgeführt, da nahezu alle Fahrzeuge mit diesem Getriebe in die Statistik eingehen.

6

$P(\omega_2) = 1 - 0{,}2 - 0{,}45 = 0{,}35 \qquad P(\omega_1) = 0{,}2 \qquad P(\omega_3) = 0{,}45$
$P(\{\omega_1; \omega_2\}) = 0{,}2 + 0{,}35 = 0{,}55 \qquad P(\{\omega_1; \omega_3\}) = 0{,}2 + 0{,}45 = 0{,}65$
$P(\{\omega_2; \omega_3\}) = 0{,}35 + 0{,}45 = 0{,}8 \qquad P(\{\,\}) = 0 \qquad P(\Omega) = 1$

13

I $P(A) + P(B) = 0{,}4$
II $P(B) + P(C) = 0{,}9$
III $P(A) + P(C) = 0{,}7$

$I - II + III : 2 \cdot P(A) = 0{,}2 \iff P(A) = 0{,}1$
Aus I: $P(B) = 0{,}3$
Aus III: $P(C) = 0{,}6$

14

$E_1 \cup E_2 = E_1 \backslash E_2 \cup E_2 = (E_1 \cap \overline{E_2}) \cup E_2$
$\Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = P((E_1 \cap \overline{E_2}) \cup E_2) = P(E_1 \cap \overline{E_2}) + P(E_2)$,
da $(E_1 \cap \overline{E_2}) \cap E_2 = \{\ \}$
$\Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = P(E_1 \cap \overline{E_2}) + P(E_2) \leq P(E_1 \cap \overline{E_2}) + P(E_1 \cap E_2) + P(E_2)$,
da $P(E_1 \cap E_2) \geq 0$
$\Rightarrow P(E_1 \cup E_2) \leq P(E_1) + P(E_2)$, da $(E_1 \cap \overline{E_2}) \cap (E_1 \cap E_2) = \{\ \}$ und
$(E_1 \cap \overline{E_2}) \cup (E_1 \cap E_2) = E_1$

G 16

a) $\frac{8x-1}{3x+2} + \frac{5-2x}{3x+2} = \frac{8x-1+5-2x}{3x+2} = \frac{6x+4}{3x+2} = \frac{2(3x+2)}{3x+2} = 2$

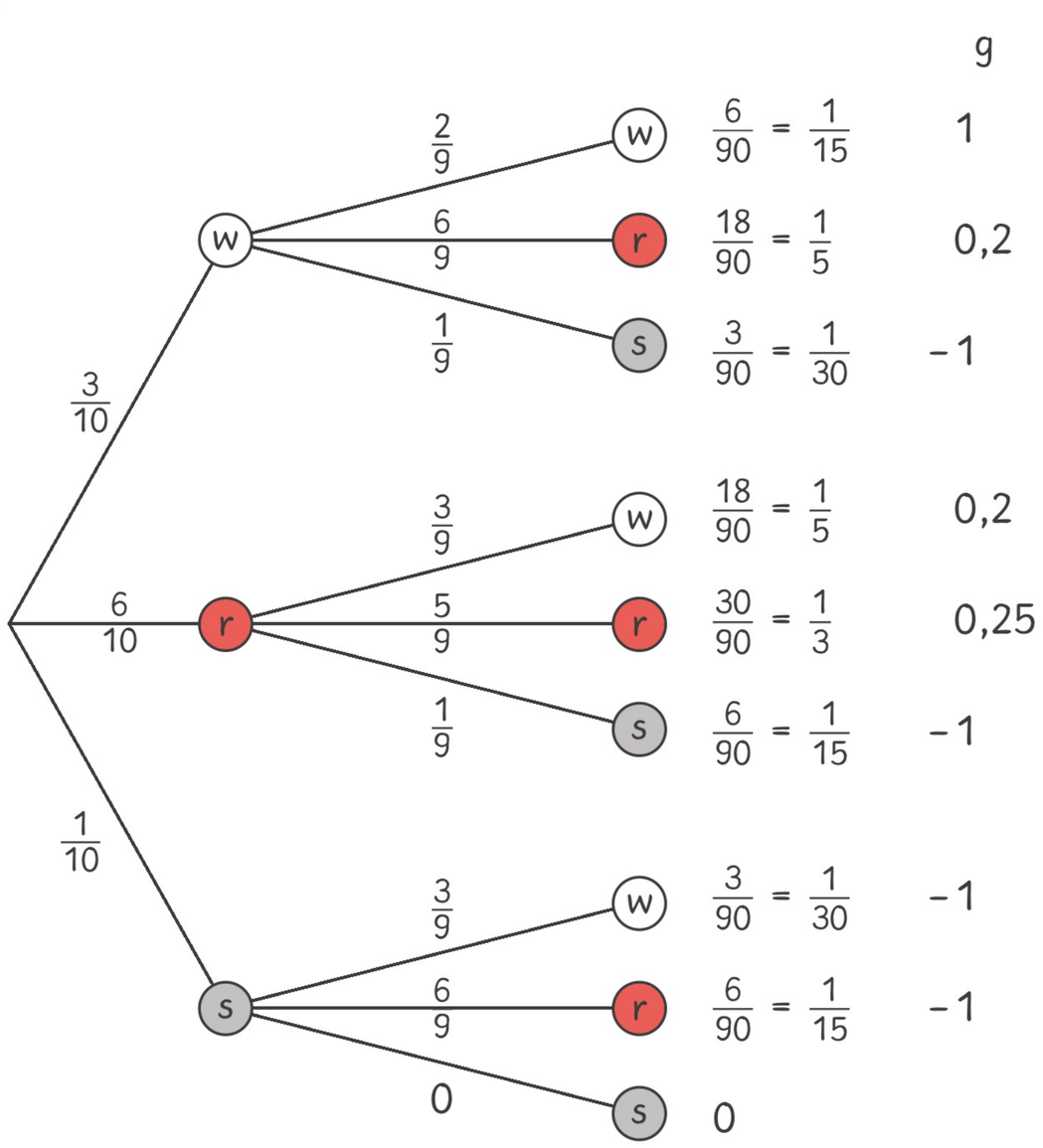
b) $\frac{1-2x^2}{x^2+1} + 3 = \frac{1-2x^2}{x^2+1} + \frac{3(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1-2x^2+3x^2+3}{x^2+1} = \frac{x^2+4}{x^2+1}$

c) $x + \frac{6x}{0{,}5x-3} = \frac{x(0{,}5x-3)}{0{,}5x-3} + \frac{6x}{0{,}5x-3} = \frac{0{,}5x^2-3x}{0{,}5x-3} + \frac{6x}{0{,}5x-3} = \frac{0{,}5x^2+3x}{0{,}5x-3}$

d) $2x - 1 - \frac{x-2}{x+2} = \frac{(2x-1)(x+2)}{x+2} - \frac{x-2}{x+2}$
$= \frac{2x^2+4x-x-2-(x-2)}{x+2} = \frac{2x^2+4x-x-2-x+2}{x+2} = \frac{2x^2+2x}{x+2}$

Seite 119

1



G: „Gewinn des Spielers“
Wahrscheinlichkeitsverteilung für G:

g_i	−1	0,2	0,25	1
$P(G = g_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$

2

Ellas Behauptung ist falsch, da jedes Ergebnis beim 6-fachen Münzwurf mit der Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^6$ eintritt. Sie hat dies eventuell mit den Wahrscheinlichkeiten für 6-mal Zahl und 3-mal Zahl beim 6-fachen Münzwurf verwechselt.

3

X: „Anzahl der Räder, die einen Defekt aufweisen“, $n = 8$ und $p = 0{,}05$.

(1) $P(X = 2) = \binom{8}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^6 \approx 5{,}1\%$

(2) $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F^8_{0{,}05}(1) \approx 5{,}7\%$

(3) $P(\text{„Defekt nur bei den Rädern der Erwachsenen.“}) = 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^6 \approx 0{,}18\%$

4

a) Da der Erwartungswert ganzzahlig ist, gilt $\mu = 12$ und damit $\mu = 12 = 20 \cdot p \iff p = \frac{3}{5}$.

b) (1) Die Aussage ist wahr. Aus dem Histogramm erkennt man:
$P^{20}_p(X = 9) < P^{20}_p(X = 15)$, $P^{20}_p(X = 10) < P^{20}_p(X = 14)$ und
$P^{20}_p(X = 11) < P^{20}_p(X = 13)$.
Somit ist $P^{20}_p(X = 9) + P^{20}_p(X = 10) + P^{20}_p(X = 11) < P^{20}_p(X = 13) + P^{20}_p(X = 14) + P^{20}_p(X = 15)$,
also $P^{20}_p(9 \leq X \leq 11) < P^{20}_p(13 \leq X \leq 15)$.

(2) Die Aussage ist falsch, da nach dem Histogramm $P^{20}_p(X = 11) > 0{,}1$ gilt.
Damit folgt $P^{20}_p(X \neq 11) = 1 - P^{20}_p(X = 11) < 0{,}9$.

5

a) X ist die Anzahl der gewürfelten Einsen bei zehn Würfen, $n = 10$ und $p = 0{,}2$.

(1) $P(\text{„Nur der erste Wurf und der letzte Wurf zeigen eine Eins.“}) = 0{,}2 \cdot 0{,}8^8 \cdot 0{,}2 \approx 0{,}7\%$

(2) $P(X = 2) = B(10;\ 0{,}2;\ 2) \approx 30{,}2\%$

(3) $P(X \geq 2) = 1 - F^{10}_{0{,}2}(1) \approx 62{,}4\%$

b) Ein Besucher wirft 30-mal mit einem gezinkten Würfel und erhält dabei mindestens fünf und höchstens acht Sechsen.

c) X ist die Anzahl der gewürfelten Einsen bei 200 Würfen.
$\mu = 200 \cdot 0{,}2 = 40$; $\sigma = \sqrt{200 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = \sqrt{32} \approx 5{,}7$
$P^{200}_{0{,}2}(40 - 5 \leq X \leq 40 + 5) = P^{200}_{0{,}2}(35 \leq X \leq 45) = F^{200}_{0{,}2}(45) - F^{200}_{0{,}2}(34)$
$\approx 0{,}67 < 0{,}70 = 70\%$

d) X ist die Anzahl der gewürfelten Einsen bei n Würfen.
$P^n_{0{,}2}(X \geq 1) = 1 - P^n_{0{,}2}(X = 0) = 1 - 0{,}8^n$
Es soll $1 - 0{,}8^n \geq 0{,}99$ gelten.
$1 - 0{,}8^n \geq 0{,}99 \iff 0{,}8^n \leq 0{,}01 \iff \ln(0{,}8^n) \leq \ln(0{,}01)$
$\iff n \cdot \ln(0{,}8) \leq \ln(0{,}01) \iff n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)} \approx 20{,}6$
Man muss mindestens 21-mal würfeln

e) (1) Y ist die Anzahl der gewürfelten Sechsen bei 200 Würfen mit einem fairen Würfel, also $n = 200$ und $p = \frac{1}{6}$.
$P^{200}_{\frac{1}{6}}(Y < 30) = P^{200}_{\frac{1}{6}}(Y \leq 29) = F^{200}_{\frac{1}{6}}(29) \approx 0{,}24$

(2) Z ist die Anzahl der gewürfelten Sechsen bei 200 Würfen mit einem der gezinkten Würfel, also $n = 200$ und $p = 0{,}15$.
$P^{200}_{0{,}15}(Z \geq 30) = 1 - P^{200}_{0{,}15}(Z \leq 29) = 1 - F^{200}_{0{,}15}(29) \approx 0{,}53$

f) S ist die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.
Ziehen ohne Zurücklegen:

$$P(S \geq 2) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{2}$$

Ziehen mit Zurücklegen: $P^3_{\frac{1}{2}}(S \geq 2) = 1 - F^3_{\frac{1}{2}}(1) = \frac{1}{2}$

Somit ist es nicht von Bedeutung, ob man mit oder ohne Zurücklegen zieht.

IV Beurteilende Statistik

Seite 125

5

a) Testgröße Z: „Anzahl der keimenden Samenkörner."
Nullhypothese H_0: $p = 0{,}75$; Gegenhypothese H_1: $p > 0{,}75$.
Ablehnungsbereich: $K = \{80; 81; \ldots; 100\}$.
Nichtkritischer Bereich: $\overline{K} = \{0; 1; \ldots; 79\}$.

b) Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test, da der Ablehnungsbereich rechts liegt, d.h., viele keimende Samenkörner sprechen gegen die Nullhypothese.

c) $P^{100}_{0{,}75}(Z \geq 80) = 1 - P^{100}_{0{,}75}(Z \leq 79) = 1 - 0{,}85116\ldots \approx 14{,}9\,\%$

Seite 126

9

a) Testgröße Z: „Anzahl der korrekten Zuordnungen."
Nullhypothese H_0: $p = 0{,}5$; Gegenhypothese H_1: $p > 0{,}5$.
Ablehnungsbereich: $K = \{10; 11; 12; 13\}$.
Nichtkritischer Bereich: $\overline{K} = \{0; 1; \ldots; 9\}$.
Ohne die Annahme, dass es sich bei der Stichprobe um eine Bernoulli-Kette handelt, wäre eine Berechnung auf Basis der Binomialverteilung nicht möglich.

b) Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test, da der Ablehnungsbereich rechts liegt, d.h., viele korrekte Zuordnungen der bestimmten Kaffeesorte sprechen gegen die Nullhypothese.

c) $P^{13}_{0{,}5}(Z \geq 10) = 1 - P^{13}_{0{,}5}(Z \leq 9) = 1 - 0{,}95385\ldots \approx 4{,}6\,\%$
Die Wahrscheinlichkeit, dem Kaffeekenner die Fähigkeit irrtümlich zuzuschreiben, liegt tatsächlich unter 5 %.

d) Individuelle Lösung, z.B.:
Wenn der Kaffeekenner die Vergleiche „am Stück" durchführt, schmeckt er „seine" Kaffeesorte immer wieder unmittelbar hintereinander, sodass er sich ihren Geschmack möglicherweise einprägen kann und somit die Vergleiche nicht unabhängig voneinander sind. Zudem ist nicht festgelegt, welche anderen Kaffeesorten zum Vergleich herangezogen werden. Es ist damit zu rechnen, dass es Sorten gibt, die sich leichter voneinander unterscheiden lassen als andere.

e) Abgesehen von den in Teilaufgabe d) genannten Punkten ist es zwar nicht wahrscheinlich, aber dennoch nicht ausgeschlossen, dass der Kaffeekenner 13-mal richtig rät. Seine Fähigkeit, die Kaffeesorte herausschmecken zu können, ist somit nicht zweifelsfrei bewiesen.

G 11

a) $D = \mathbb{R}\setminus\{2\}$
Polstelle von f: $x = 2$.
Nullstellen von f:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x+1}{3x-6} = 0 \Leftrightarrow 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$.

b) $D = \mathbb{R}\setminus\{-4\}$
Polstelle von f: $t = -4$.
Nullstellen von f:
$f(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{t+4} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{t+4} = 2 \Leftrightarrow 1 = t + 4 \Leftrightarrow t = -3$.

c) $D = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$
Polstelle von f: $x = -2$.
Nullstellen von f:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{0{,}5x + 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$.

d) $D = \mathbb{R}$
f hat keine Polstelle.
Nullstellen von f: $f(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 1$
$\Leftrightarrow t = -1$ oder $t = 1$.

e) $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$
Polstelle von f: $x = 1$.
Nullstellen von f:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 + \frac{4}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{(2x+4)(x-1)+4}{x-1} = 0$
$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 4x - 2x - 4 + 4}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 2x}{x-1} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x = 0$
$\Leftrightarrow 2x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = -1$.

f) $D = \mathbb{R}\setminus\{-4; 2\}$
Polstellen von f: $x = -4$ und $x = 2$.
Nullstellen von f:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5x^2}{(x-2)(x+4)} = 0 \Leftrightarrow 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

g) $D = \mathbb{R}\setminus\{-2; 2\}$
Polstellen von f: $t = -2$ und $t = 2$.
Nullstellen von f:
$f(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{t^2}{t^2 - 4} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 + t^2 - 4}{t^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow \frac{2t^2 - 4}{t^2 - 4} = 0$
$\Leftrightarrow 2t^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 2 \Leftrightarrow t = -\sqrt{2}$ oder $t = \sqrt{2}$.

h) $D = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}; 0\right\}$
Polstellen von f: $x = -\frac{1}{3}$ und $x = 0$.
Nullstellen von f: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 1}{3x^2 + x} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 1 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ oder $x = \frac{1}{2}$.

Seite 132

7

a) Gegenhypothese H_1: $p < 0{,}25$.
Ablehnungsbereich: $K = \{0; 1; \ldots; 29\}$.
Nichtkritischer Bereich: $\overline{K} = \{30; 31; \ldots; 150\}$.
Es handelt sich um einen linksseitigen Test.

b) Der Fehler erster Art besteht darin, die Nullhypothese abzulehnen, obwohl die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn in Wirklichkeit mindestens 25 % beträgt.
$\alpha' = P^{150}_{0{,}25}(Z \leq 29) = 0{,}06280\ldots \approx 6{,}3\,\%$

c) Der Fehler zweiter Art besteht darin, die Nullhypothese nicht zu verwerfen, obwohl die Gewinnwahrscheinlichkeit in Wirklichkeit weniger als 25 % beträgt.
$\beta' = P^{150}_{0{,}18}(Z \geq 30) = 1 - P^{150}_{0{,}18}(Z \leq 29) = 1 - 0{,}70794\ldots \approx 29{,}2\,\%$

Seite 134

14

a) Testgröße Z: „Anzahl der Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe richtig lösen."
Nullhypothese H_0: $p \leq 0{,}2$; Gegenhypothese H_1: $p > 0{,}2$.
Ablehnungsbereich: $K = \{7; 8; \ldots; 25\}$.
Nichtkritischer Bereich: $\overline{K} = \{0; 1; \ldots; 6\}$.

b) $\alpha' = P_{0{,}2}^{25}(Z \geq 7) = 1 - P_{0{,}2}^{25}(Z \leq 6) = 1 - 0{,}780\,03\ldots \approx 22{,}0\,\%$

$\beta' = P_{0{,}3}^{25}(Z \leq 6) = 0{,}340\,65\ldots \approx 34{,}1\,\%$

c) Vergrößern des Ablehnungsbereichs um ein Element, also $K = \{6; 7; \ldots; 25\}$:
$\alpha' = P_{0{,}2}^{25}(Z \geq 6) = 1 - P_{0{,}2}^{25}(Z \leq 5) = 1 - 0{,}616\,68\ldots \approx 38{,}3\,\%$
$\beta' = P_{0{,}3}^{25}(Z \leq 5) = 0{,}193\,48\ldots \approx 19{,}3\,\%$
Verkleinern des Ablehnungsbereichs um ein Element, also $K = \{8; 9; \ldots; 25\}$:
$\alpha' = P_{0{,}2}^{25}(Z \geq 8) = 1 - P_{0{,}2}^{25}(Z \leq 7) = 1 - 0{,}890\,87\ldots \approx 10{,}9\,\%$
$\beta' = P_{0{,}3}^{25}(Z \leq 7) = 0{,}511\,84\ldots \approx 51{,}2\,\%$
Allgemein bewirkt (bei festem Stichprobenumfang n) eine Vergrößerung des Ablehnungsbereichs eine Vergrößerung von α' und eine Verkleinerung von β'. Eine Verkleinerung des Ablehnungsbereichs bewirkt dagegen eine Verkleinerung von α' und eine Vergrößerung von β'.

d) Die Schülerinnen und Schüler einer Klasse spiegeln in der Regel nicht den internationalen Durchschnitt aller Schülerinnen und Schüler wider. Zum einen können sich die Leistungen der Schülerinnen und Schüler aufgrund unterschiedlicher Schulsysteme von Land zu Land unterscheiden, zum anderen werden sich die Leistungen der Schülerinnen und Schüler in der Regel zwischen den Schularten unterscheiden.
Wenn die 9. Klasse beispielsweise aus einem Gymnasium stammt, möglicherweise sogar aus einer speziellen Begabtenklasse, ist damit zu rechnen, dass eher mehr Schülerinnen und Schüler die Aufgabe lösen können als im internationalen Durchschnitt.

e) $K = \{50; 51; \ldots; 200\}$ ist der größtmögliche Ablehnungsbereich, für den α' unter 5 % liegt. Es gilt
$\alpha' = P_{0{,}2}^{200}(Z \geq 50) = 1 - P_{0{,}2}^{200}(Z \leq 49) = 1 - 0{,}950\,64\ldots \approx 4{,}9\,\%$
und $\beta' = P_{0{,}3}^{200}(Z \leq 49) = 0{,}050\,59\ldots \approx 5{,}1\,\%$.

G 16

a) Mit d als Diagonale der Grundfläche gilt (Satz des Pythagoras)
$s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$. Mit $h = a$ und $d^2 = 2a^2$ folgt
$s^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3}{2}a^2 \Leftrightarrow s = \frac{a}{2}\sqrt{6}$ und
$h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 = \frac{3}{2}a^2 \Leftrightarrow h_a^2 = \frac{3}{2}a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}a^2 \Leftrightarrow h_a = \frac{a}{2}\sqrt{5}$.

b) Neigungswinkel α einer Seitenkante gegen die Grundfläche:
$\sin\alpha = \frac{a}{s} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, also $\alpha \approx 54{,}7°$.
Neigungswinkel β einer Seitenfläche gegen die Grundfläche:
$\sin\beta = \frac{a}{h_a} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, also $\beta \approx 63{,}4°$.

c) $V_P = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a = \frac{1}{3}a^3$
$O_P = G + 4 \cdot A_{\text{Seitenfläche}} = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot h_a \cdot a = a^2 + 2 \cdot \frac{a^2}{2}\sqrt{5}$
$= \left(1 + \sqrt{5}\right) \cdot a^2$

Seite 140

6

H_0: $p \geq 0{,}25$ und H_1: $p < 0{,}25$. Z sei die Testgröße. Bei wahrer Nullhypothese ist Z binomialverteilt nach $B(60; 0{,}25)$.
Gesucht ist die größte natürliche Zahl g mit $P_{0{,}25}^{60}(Z \leq g) \leq 0{,}05$.
Es ist $P_{0{,}25}^{60}(Z \leq 9) \approx 0{,}045$ und $P_{0{,}25}^{60}(Z \leq 10) \approx 0{,}086$.
Ablehnungsbereich: $K = \{0; 1; \ldots; 9\}$.
Entscheidungsregel: Wenn man höchstens neunmal gewinnt, dann wird H_0 verworfen und man geht davon aus, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit geringer als 25 % ist. Ansonsten wird H_0 nicht verworfen.

Seite 142

17

a) Linksseitiger Test, d. h., es ist die größte natürliche Zahl g gesucht mit $P_{0{,}15}^{200}(Z \leq g) \leq 0{,}1$, wobei Z die Testgröße ist (Anzahl der Kunden, die bereit sind, die App zu nutzen).
Mithilfe des Taschenrechners erhält man durch Probieren $g = 23$, also $K = \{0; 1; \ldots; 23\}$.

b) Da linksseitig getestet wurde, wurde wohl die Befürchtung eines Imageverlusts als schwerwiegender erachtet. Das heißt, nur wenn deutlich weniger als 15 % der Kunden der Stichprobe bereit sind, die App zu nutzen, wird die Nullhypothese verworfen und von einer Beteilung an der App abgesehen.

G 19

a) $D = \mathbb{R}\backslash\{-5\}$
Gleichung der senkrechten Asymptote: $x = -5$.
Gleichung der waagerechten Asymptote: $y = 0$.

b) $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
Gleichung der senkrechten Asymptote: $x = 0$.
Gleichung der waagerechten Asymptote: $y = 2$.

c) $D = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{4}\right\}$
Gleichung der senkrechten Asymptote: $x = \frac{1}{4}$.
Gleichung der waagerechten Asymptote: $y = \frac{1}{2}$.

d) $D = \mathbb{R}$
Gleichung der waagerechten Asymptote: $y = 1$.

e) $D = \mathbb{R}\backslash\{2{,}5\}$
Gleichung der senkrechten Asymptote: $x = 2{,}5$.
Gleichung der schrägen Asymptote: $y = -3x + 2$.

f) $D = \mathbb{R}\backslash\{-3; 1\}$
Gleichungen der senkrechten Asymptoten: $x = -3$ und $x = 1$.
Gleichung der waagerechten Asymptote: $y = 3$.

g) $D = \mathbb{R}\backslash\left\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right\}$
Gleichungen der senkrechten Asymptoten: $t = -\sqrt{2}$ und $t = \sqrt{2}$.
Gleichung der waagerechten Asymptote: $y = 2$.

h) $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$
Gleichung der senkrechten Asymptote: $x = 1$.
Gleichung der waagerechten Asymptote: $y = 0$.

Seite 149

1

a) Gesucht ist die größte natürlich Zahl g, für die $P_{0,3}^{200}(Z \leq g) \leq 0{,}05$ gilt. Mithilfe des Taschenrechners erhält man durch Probieren $g = 48$ und somit den Ablehnungsbereich $K = \{0; 1; \ldots; 48\}$.
$\alpha' = P_{0,3}^{200}(Z \leq 48) = 0{,}035\,94\ldots \approx 3{,}6\,\%$

b) Gesucht ist die kleinste natürlich Zahl g, für die gilt:
$P_{0,3}^{200}(Z \geq g) = 1 - P_{0,3}^{200}(Z \leq g - 1) \leq 0{,}01 \iff P_{0,3}^{200}(Z \leq g - 1) \geq 0{,}99$.
Mithilfe des Taschenrechners erhält man durch Probieren $g - 1 = 75$, also $g = 76$ und somit den Ablehnungsbereich $K = \{76; 77; \ldots; 200\}$.
$\alpha' = P_{0,3}^{200}(Z \geq 76) = 1 - P_{0,3}^{200}(Z \leq 75) = 1 - 0{,}990\,62\ldots \approx 0{,}94\,\%$

2

a) Wahr, denn das Signifikanzniveau ist eine Obergrenze für die Wahrscheinlichkeit des Fehlers erster Art.

b) Falsch, den kritischen bzw. nichtkritischen Bereich bestimmt man anhand des zuvor festgelegten Signifikanzniveaus. Es ist möglich, dass die Nullhypothese nicht abgelehnt wird, obwohl sie falsch ist (Fehler zweiter Art).

c) Falsch, die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art hängt von der tatsächlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung der Testgröße ab.

3

H_0: $p \geq 0{,}88$ und H_1: $p < 0{,}88$ (linksseitiger Test). Die Testgröße Z zählt die Samen, die keimen. Bei wahrer Nullhypothese ist Z binomialverteilt nach $B(800; 0{,}88)$.
Gesucht ist die größte natürliche Zahl g mit $P_{0,88}^{800}(Z \leq g) \leq 0{,}05$.
Es ist $P_{0,88}^{800}(Z \leq 688) \approx 0{,}048$ und $P_{0,88}^{800}(Z \leq 689) \approx 0{,}060$.
Ablehnungsbereich: $K = \{0; 1; \ldots; 688\}$.
Entscheidungsregel: Wenn höchstens 688 Samen keimen, dann wird H_0 verworfen und man geht davon aus, dass die Keimwahrscheinlichkeit geringer als 88 % ist.

4

Stichprobenumfang: $n = 200$.
Testgröße Z: „Anzahl der gewürfelten Sechsen."

a) Leon:
Nullhypothese H_{0L}: $p = \frac{1}{6}$; Gegenhypothese H_{1L}: $p > \frac{1}{6}$.
Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl g_L, für die gilt:
$P_{\frac{1}{6}}^{220}(Z \geq g_L) = 1 - P_{\frac{1}{6}}^{220}(Z \leq g_L - 1) \leq 0{,}05$
$\iff P_{\frac{1}{6}}^{220}(Z \leq g_L - 1) \geq 0{,}95$.
Mithilfe des Taschenrechners erhält man durch Probieren $g_L - 1 = 46$, also $g_L = 47$ und somit den Ablehnungsbereich $K_L = \{47; 48; \ldots; 220\}$.
Samira:
Nullhypothese H_{0S}: $p = 0{,}3$; Gegenhypothese H_{1S}: $p < 0{,}3$.
Gesucht ist die größte natürliche Zahl g_S, für die $P_{0,3}^{220}(Z \leq g_S) \leq 0{,}05$ gilt. Mithilfe des Taschenrechners erhält man durch Probieren $g_S = 54$ und somit den Ablehnungsbereich $K = \{0; 1; \ldots; 54\}$.
Für $Z \in \{47; 48; \ldots; 54\}$ würden sowohl Leon als auch Samira ihre Nullhypothese verwerfen, also entgegengesetzte Schlüsse ziehen.

b) Die Menge der Ausgänge, für die sich beide entgegengesetzt entscheiden würden, wird kleiner, wenn die von Samira vermutete Wahrscheinlichkeit sich dem Wert $\frac{1}{6}$ annähert. Mithilfe des Taschenrechners oder eines Tabellenkalkulationsprogramms lässt sich ermitteln, dass schon für H_{0S}: $p = 0{,}26$ die Situation nicht mehr auftritt, dass sich beide bei gleichem Versuchsausgang entgegengesetzt entscheiden.

5

a) H_0: $p \leq 0{,}7$ (rechtsseitiger Test), denn der Fehler erster Art besteht darin, H_0 irrtümlicherweise zu verwerfen. Dies bedeutet hier, irrtümlicherweise davon auszugehen, die neue Therapie besitze eine Erfolgswahrscheinlichkeit von mehr als 70 %.

b) Die Testgröße Z zählt, bei wie vielen Patienten die Therapie erfolgreich verläuft. Bei wahrer Nullhypothese ist Z binomialverteilt nach $B(600; 0{,}7)$.
Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl g, für die gilt:
$P_{0,7}^{600}(Z \geq g) = 1 - P_{0,7}^{600}(Z \leq g - 1) \leq 0{,}01 \iff P_{0,7}^{600}(Z \leq g - 1) \geq 0{,}99$
Es ist $P_{0,7}^{600}(Z \leq 445) \approx 0{,}989$ und $P_{0,7}^{600}(Z \leq 446) \approx 0{,}992$. Also ist $g - 1 = 446$, d.h. $g = 447$.
Entscheidungsregel: Wenn die neue Therapie bei mindestens 447 Patientinnen und Patienten erfolgreich verläuft, wird H_0 verworfen und man geht davon aus, dass die neue Therapie eine größere Erfolgswahrscheinlichkeit besitzt. Ansonsten wird H_0 nicht verworfen.

c) Der Fehler zweiter Art besteht darin, die Nullhypothese „Die Erfolgswahrscheinlichkeit der neuen Therapie beträgt höchstens 70 %" nicht zu verwerfen, obwohl sie in Wirklichkeit größer als 70 % ist.

d) Die Zufallsgröße W ist $B(600; 0{,}75)$-verteilt. Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art ist
$\beta' = P_{0,75}^{600}(Z \leq 446) = 0{,}368\,08\ldots \approx 36{,}8\,\%$.

e) Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art:
$\alpha' = P_{0,7}^{600}(Z \geq 447) = 1 - P_{0,7}^{600}(Z \leq 446) = 0{,}008\,40\ldots \approx 0{,}84\,\%$.
Wahrscheinlichkeit, in n Tests kein signifikantes Testergebnis zu erzielen: $(1 - \alpha')^n$.
Wahrscheinlichkeit, in n Tests mindestens ein signifikantes Testergebnis zu erzielen: $1 - (1 - \alpha')^n = 1 - 0{,}9916^n$.
Also muss gelten:
$1 - 0{,}9916^n > 0{,}99 \iff 0{,}9916^n < 0{,}01 \iff n > \log_{0{,}9916}(0{,}01)$
$\iff n > 545{,}9\ldots$
Der Signifikanztest müsste also mindestens 546-mal durchgeführt werden.

f) Nachdem pro Test 600 Patientinnen und Patienten teilnehmen, würde man insgesamt 327 600 Patientinnen und Patienten benötigen. Eine solche mehrfache Durchführung ist also unrealistisch. Darüber hinaus würde man bei der Veröffentlichung eines signifikanten Testergebnisses verschweigen müssen, dass sehr viele andere gleiche Tests nicht signifikant waren, was aus ethischer Sicht selbstverständlich nicht korrekt ist und gegen jeden wissenschaftlichen Standard verstößt.

V Quotientenregel und Funktionsuntersuchungen

Seite 154

7

a) $f'(x) = \frac{-2x\cdot(0{,}5x^2-4)-(-x^2-2)\cdot x}{(0{,}5x^2-4)^2} = \frac{-x^3+8x+x^3+2x}{(0{,}5x^2-4)^2}$

$= \frac{10x}{(0{,}5x^2-4)^2} = g(x)$

$g(x)$ ist ein Term der Ableitung von f.

b) $f'(x) = -2\cdot 3x^{-3} + (-1)\cdot x^{-2} = -6x^{-3} - x^{-2} = -\frac{6}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{-6-x}{x^3} = g(x)$

$g(x)$ ist ein Term der Ableitung von f.

8

a) $f(x) = F'(x) = -2x^{-3}$

b) $f'(x) = F''(x) = -2\cdot(-3)\cdot x^{-4} = 6x^{-4}$

$F(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ ↯ Damit hat F keine Nullstelle.

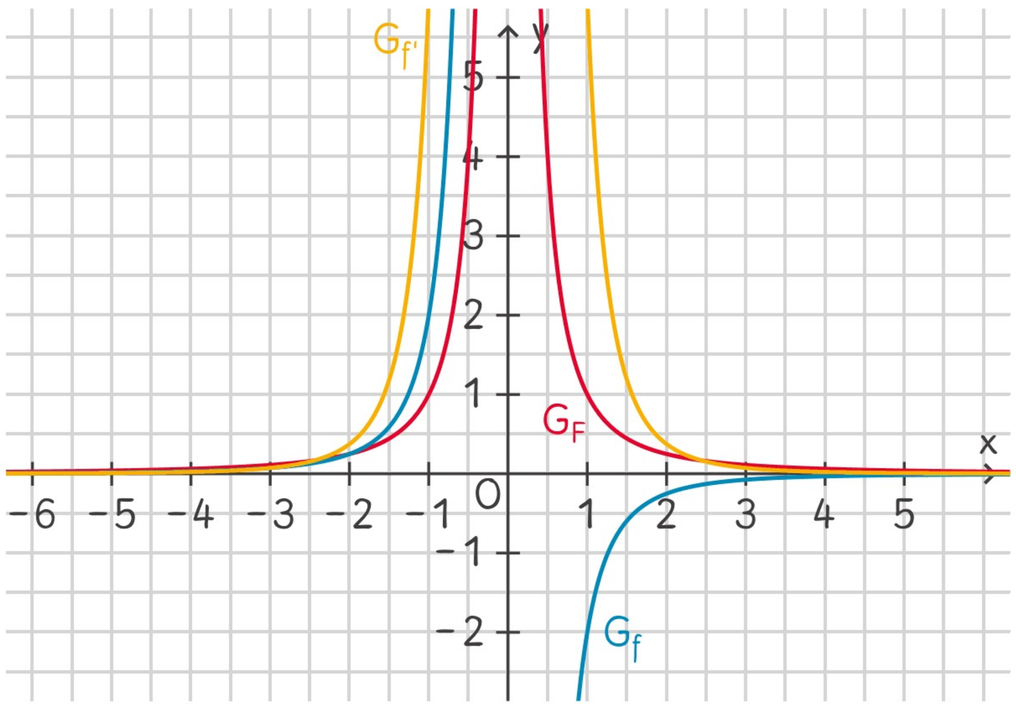
$f(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow -2 = 0$ ↯ Damit hat f keine Nullstelle.

$f'(x) = 6x^{-4} = \frac{6}{x^4} = 0 \Leftrightarrow 6 = 0$ ↯ Damit hat f' keine Nullstelle.

c) Gleichung der senkrechten Asymptote: $x = 0$.

Gleichung der waagerechten Asymptote: $y = 0$.

d)



Seite 155

18

a) $D_{g'} = \mathbb{R}\setminus\{\frac{2}{5}\}$

Die Stelle $x = \frac{2}{5}$ ist die Polstelle (ohne Vorzeichenwechsel) von g', da das Nennerpolynom von g' vom Grad 2 ist und $x = \frac{2}{5}$ als doppelte Nullstelle hat.

b) $\frac{3-1{,}5x}{5x-2} = 0 \Leftrightarrow 3-1{,}5x = 0 \Leftrightarrow x = 2$, also $S_x(2\,|\,0)$

$g'(x) = \frac{-1{,}5\cdot(5x-2)-(3-1{,}5x)\cdot 5}{(5x-2)^2} = \frac{-7{,}5x+3-15+7{,}5x}{(5x-2)^2} = \frac{-12}{(5x-2)^2}$

$m = g'(2) = -\frac{3}{16}$

$S_x(2\,|\,0)$ und $m = -\frac{3}{16}$ in $y = mx + t$ einsetzen:

$0 = -\frac{3}{16}\cdot 2 + t \Leftrightarrow t = \frac{3}{8}$.

Tangentengleichung: $y = -\frac{3}{16}x + \frac{3}{8}$.

G 20

a) $\frac{12}{(x-2)^2} = 3$

$\Leftrightarrow 12 = 3(x-2)^2$

$\Leftrightarrow 4 = x^2 - 4x + 4$

$\Leftrightarrow 0 = x^2 - 4x$

$\Leftrightarrow 0 = x(x-4)$

$\Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 4$

Probe: $x = 0$ und $x = 4$ sind Lösungen.

b) $-\frac{4x}{x^2-1} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{4x}{x^2-1} = 2$

$\Leftrightarrow -4x = 2(x^2-1)$

$\Leftrightarrow -2x = x^2 - 1$

$\Leftrightarrow 0 = x^2 + 2x - 1$

Also $x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1} = \frac{-2\pm\sqrt{8}}{2} = \frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2} = -1\pm\sqrt{2}$.

Probe: $x = -1-\sqrt{2}$ und $x = -1-\sqrt{2}$ sind Lösungen.

c) $\frac{x+1}{x^2} = \frac{1}{x} + 4$

$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2} = \frac{1+4x}{x}$

$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2} = \frac{x+4x^2}{x^2}$

$\Leftrightarrow x+1 = x+4x^2$

$\Leftrightarrow 1 = 4x^2$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ oder $x = -\frac{1}{2}$

Probe: $x = \frac{1}{2}$ und $x = -\frac{1}{2}$ sind Lösungen.

d) $\frac{2x}{x-2} = \frac{1}{2}x + 3$

$\Leftrightarrow \frac{2x}{x-2} = \frac{\left(\frac{1}{2}x+3\right)(x-2)}{x-2}$

$\Leftrightarrow 2x = \left(\frac{1}{2}x+3\right)(x-2)$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{1}{2}x^2 - x + 3x - 6$

$\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}x^2 - 6$

$\Leftrightarrow 12 = x^2$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ oder $x = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$

Probe: $x = 2\sqrt{3}$ und $x = -2\sqrt{3}$ sind Lösungen.

G 21

$f'(x) = 4x - 3$

Die Steigung der Normalen ist 3. Also muss die Tangente an den Graphen von f in dem Punkt, in dem die Normale an den Graphen die Steigung 3 hat, die Steigung $-\frac{1}{3}$ haben, d.h. $f'(x) = -\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 4x - 3 = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

Normalengleichung: $y = 3x + t$.

Mit $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{9}$ erhält man $-\frac{1}{9} = 3\cdot\frac{2}{3} + t \Leftrightarrow -\frac{1}{9} = 2 + t \Leftrightarrow t = -\frac{19}{9}$

und damit die Normalengleichung $y = 3x - \frac{19}{9}$.

Seite 159

9

$f'(x) = \frac{0\cdot(x-2)^2 - 5\cdot2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{-10}{(x-2)^3} = 0 \Leftrightarrow -10 = 0$ ↯

Damit hat f keine Extremstelle.

$f''(x) = \frac{0\cdot(x-2)^3 - (-10)\cdot3(x-2)^2}{(x-2)^6} = \frac{30}{(x-2)^4} = 0 \Leftrightarrow 30 = 0$ ↯

Damit hat f keine Wendestelle.

10

a) $x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -3$ ↯

Damit hat g keine Definitionslücke und die Definitionsmenge ist $D = \mathbb{R}$.

Nullstellen: $x = -2$ und $x = 2$.

b) $g(-x) = -\frac{(-x)^2 - 4}{(-x)^2 + 3} = -\frac{x^2 - 4}{x^2 + 3} = g(x)$.

Folglich ist G_g achsensymmetrisch zur y-Achse.

c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(-\frac{x^2 - 4}{x^2 + 3}\right) = -1$ (da $z = n$)

d) $g'(x) = -\frac{2x \cdot (x^2 + 3) - (x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} = -\frac{2x \cdot (x^2 + 3 - x^2 + 4)}{(x^2 + 3)^2} = -\frac{14x}{(x^2 + 3)^2} = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

$g''(x) = -\frac{14 \cdot (x^2 + 3)^2 - 14x \cdot 2(x^2 + 3) \cdot 2x}{(x^2 + 3)^4} = -\frac{14 \cdot (x^2 + 3) - 14 \cdot 4x^2}{(x^2 + 3)^3}$

$= \frac{-14(-3x^2 + 3)}{(x^2 + 3)^2}$

Da $g''(0) = -\frac{14}{3} < 0$ ist, hat G_g genau einen Hochpunkt.

$g''(x) = -\frac{14(-3x^2 + 3)}{(x^2 + 3)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ oder $x = -1$

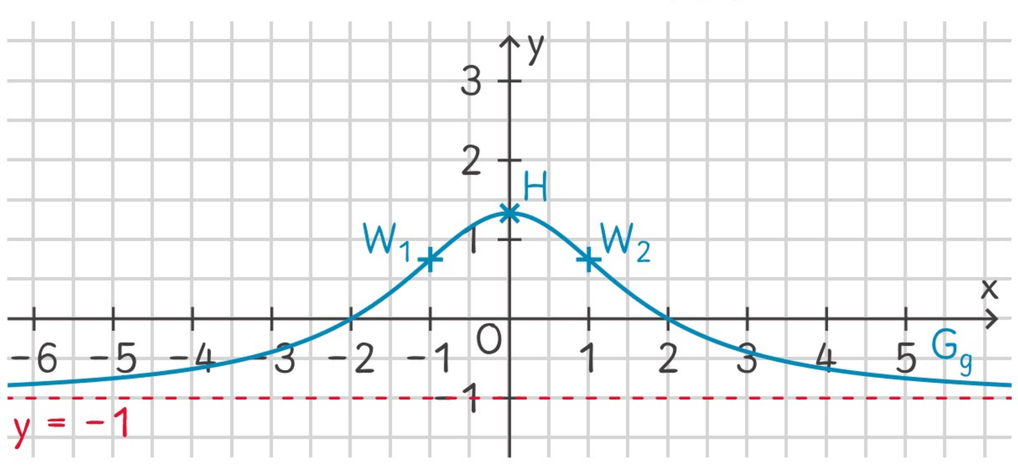
$g''(x)$: > 0 | = 0 | < 0 | = 0 | > 0

−1 | 1

G_g: | W | W

Mit $g(-1) = g(1) = \frac{3}{4}$ ergeben sich die Wendepunkte $W_1\left(-1 \middle| \frac{3}{4}\right)$ und $W_2\left(1 \middle| \frac{3}{4}\right)$.

e) Zum Skizzieren bestimmt man noch die y-Koordinate des Hochpunktes. Mit $f(0) = \frac{4}{3}$ erhält man $H\left(0 \middle| \frac{4}{3}\right)$.



Monotonie:

$f'(x)$: > 0 | = 0 | < 0 | = 0 | > 0

−3 | −1

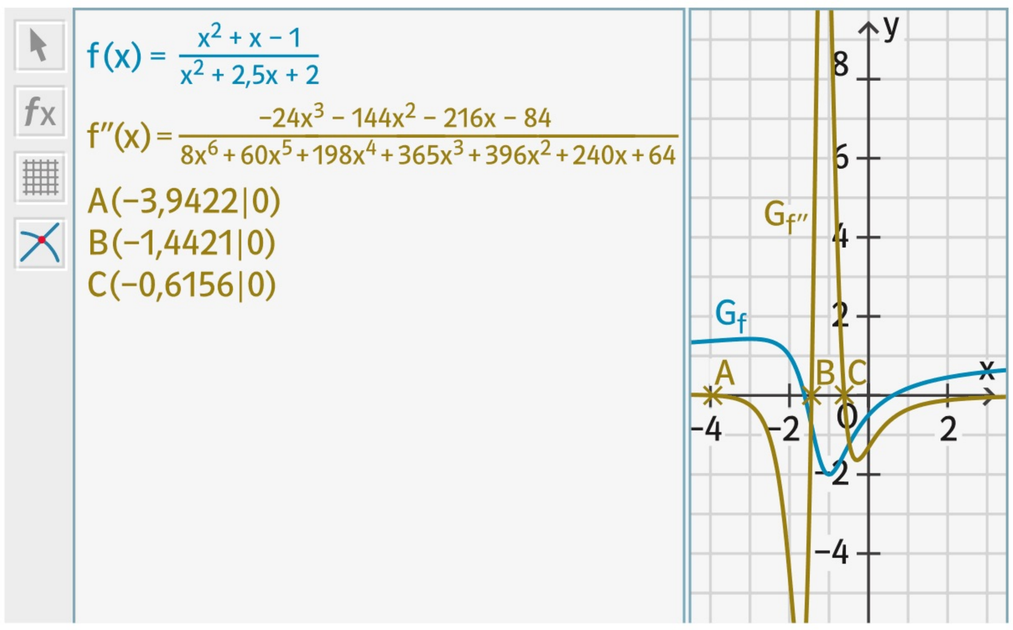
G_f: ↗ | H | ↘ | T | ↗

Mit $f(-3) = \frac{10}{7}$ ergibt sich der Hochpunkt $H\left(-3 \middle| \frac{10}{7}\right)$.

Mit $f(-1) = -2$ ergibt sich der Tiefpunkt $T(-1|-2)$.

Damit ergibt sich die Wertemenge $W = \left[-2; \frac{10}{7}\right]$.

b)



Zuerst wird die zweite Ableitung von f gebildet, anschließend werden deren Nullstellen bestimmt und abschließend untersucht man, ob an den Nullstellen der 2. Ableitung auch ein Vorzeichenwechsel vorliegt, was jeweils der Fall ist. Daraus ergeben sich drei Wendestellen.

G 24

	L	$\overline{L}$	
N	8	**6**	14
$\overline{N}$	7	**5**	12
	15	**11**	**26**

a) $P(\overline{N} \cap \overline{L}) = \frac{5}{26}$

b) $P_L(N) = \frac{P(N \cap L)}{P(L)} = \frac{\frac{8}{26}}{\frac{15}{26}} = \frac{8}{15}$

Seite 161

21

Nein, das kann man nicht daraus folgern, da der Graph der gebrochen-rationalen Funktion f nicht nur an den Nullstellen der zweiten Ableitung von f sein Krümmungsverhalten ändern kann, sondern auch an den Polstellen von f.

22

a) $x^2 + 2{,}5x + 2 = 0$, also $x_{1,2} = \frac{-2{,}5 \pm \sqrt{2{,}5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-2{,}5 \pm \sqrt{-1{,}75}}{2}$ ↯

Damit hat f keine Definitionslücke.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2{,}5x + 2} = 1$ (da $z = n$)

$f'(x) = \frac{(2x + 1) \cdot (x^2 + 2{,}5x + 2) - (x^2 + x - 1) \cdot (2x + 2{,}5)}{(x^2 + 2{,}5x + 2)^2}$

$= \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + x^2 + 2{,}5x + 2 - (2x^3 + 2x^2 - 2x + 2{,}5x^2 + 2{,}5x - 2{,}5)}{(x^2 + 2{,}5x + 2)^2}$

$= \frac{1{,}5x^2 + 6x + 4{,}5}{(x^2 + 2{,}5x + 2)^2} = 0$

$\Leftrightarrow 1{,}5x^2 + 6x + 4{,}5 = 0$, also $x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1{,}5 \cdot 4{,}5}}{2 \cdot 1{,}5} = \frac{-6 \pm \sqrt{9}}{3}$,

also $x_1 = -1$ und $x_2 = -3$

Seite 164

5

$f'(x) = \frac{e^{2x} \cdot 2 \cdot x - e^{2x} \cdot 1}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x - 1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Monotonie:

$f'(x)$: < 0 | nicht def. | < 0 | = 0 | > 0

0 | $\frac{1}{2}$

G_f: ↘ | | ↘ | T | ↗

Mit $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2e$ ergibt sich der Tiefpunkt $T\left(\frac{1}{2} \middle| 2e\right)$.

Seite 167

16

a) $D = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Nullstelle: $x = 0$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x x^2}{x+1} = +\infty$, da e^x dominiert.

($e^x x^2 \to +\infty$, $x + 1 \to +\infty$)

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x x^2}{x+1} = 0^-$, da e^x schneller gegen 0 strebt, als x^2 wächst.

($e^x x^2 \to 0^+$, $x + 1 \to -\infty$)

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{e^x x^2}{x+1} = -\infty$

($e^x x^2 \to e^{-1}$, $x + 1 \to 0^-$)

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{e^x x^2}{x+1} = +\infty$, da $x = -1$ eine Polstelle mit VZW ist.

c) $z(x) = e^x x^2$

$z'(x) = e^x x^2 + e^x \cdot 2x = e^x(2x + x^2)$

$h'(x) = \frac{e^x(2x + x^2)\cdot(x+1) - e^x x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{e^x(2x^2 + x^3 + 2x + x^2 - x^2)}{(x+1)^2}$

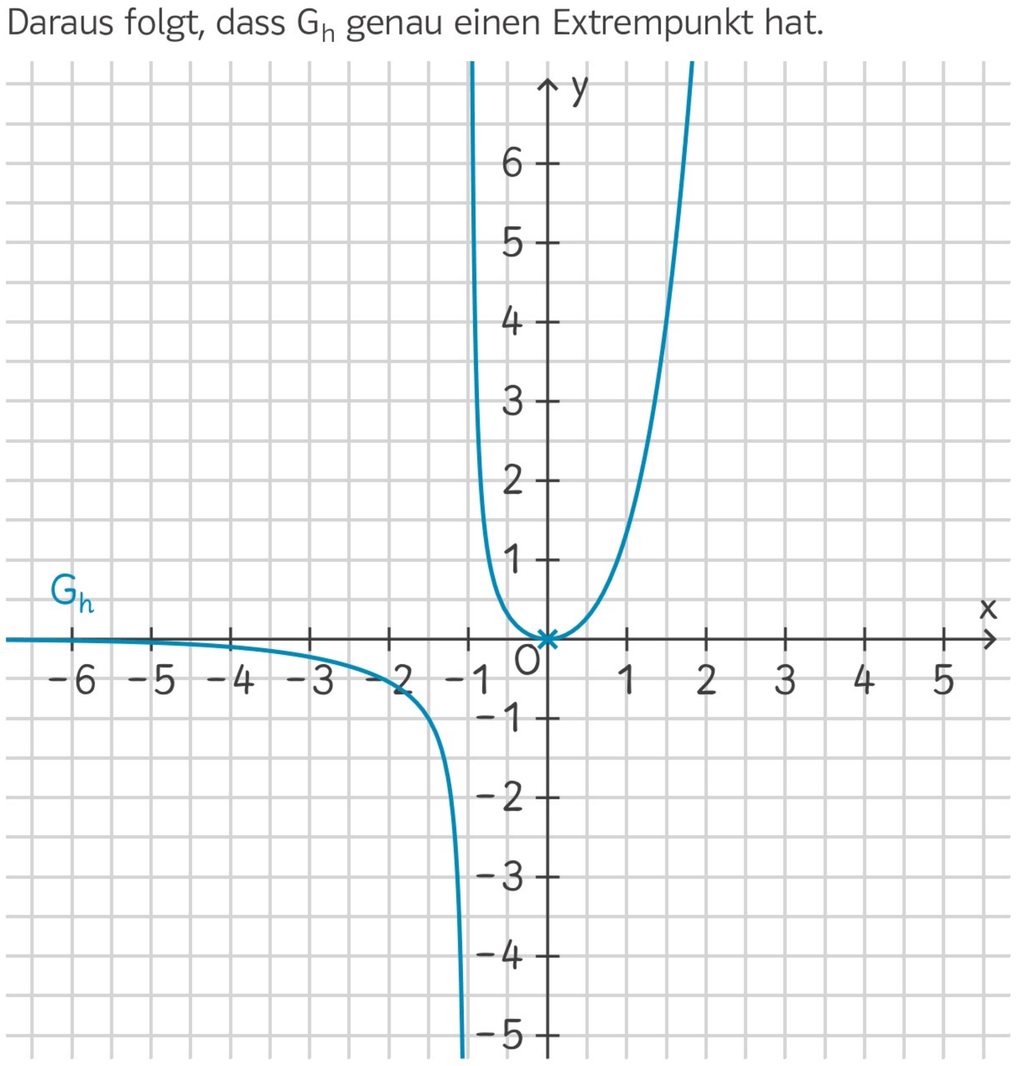
$= \frac{x e^x(x^2 + 2x + 2)}{(x+1)^2} = 0 \iff x = 0$ oder $x^2 + 2x + 2 = 0$

$x^2 + 2x + 2 = 0$, also $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$;

keine Lösung

Monotonie:

Daraus folgt, dass G_h genau einen Extrempunkt hat.



17

a) $D_g = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{f(x)} = e$, da $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{f(x)} = e$, da $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

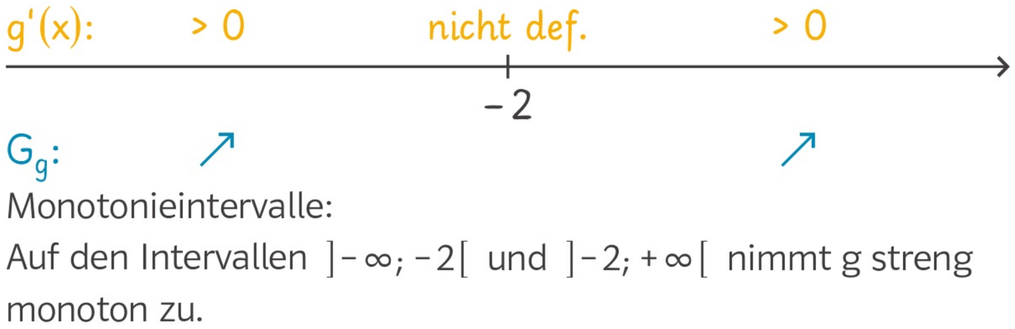
$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} e^{f(x)} = +\infty$, da $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} e^{f(x)} = 0^+$, da $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$

c) $g'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x) = 0$

Der Faktor $e^{f(x)}$ ist für jede Einsetzung für x (aus dem Definitionsbereich) größer als null. Da der Graph der Funktion f auf seinem gesamten Definitionsbereich steigend ist, ist auch $f'(x)$ auf dem gesamten Definitionsbereich größer als null. Daher ist $g'(x)$ auf dem gesamten Definitionsbereich größer als null.

Monotonie:



Monotonieintervalle:

Auf den Intervallen $]-\infty; -2[$ und $]-2; +\infty[$ nimmt g streng monoton zu.

G 19

$P(A) = \frac{4}{14}\cdot\frac{10}{14} + \frac{10}{14}\cdot\frac{4}{14} = \frac{20}{49}$

$P(B) = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$

$P(A \cap B) = \frac{4}{14}\cdot\frac{10}{14} = \frac{10}{49}$

$P(A)\cdot P(B) = \frac{20}{49}\cdot\frac{5}{7} = \frac{100}{343} \neq \frac{10}{49} = P(A \cap B)$

Damit sind die Ereignisse A und B stochastisch abhängig.

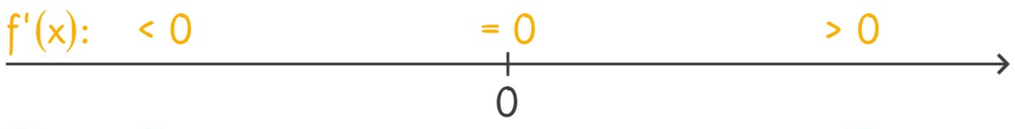
Seite 173

1

a) $f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2+1) - (x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2 + 1 - x^2 + 1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x\cdot 2}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0$

$\iff 4x = 0 \iff x = 0$

Monotonie:



Monotonieintervalle:

- $]-\infty; 0]$: f nimmt streng monoton ab.
- $[0; \infty[$: f nimmt streng monoton zu.

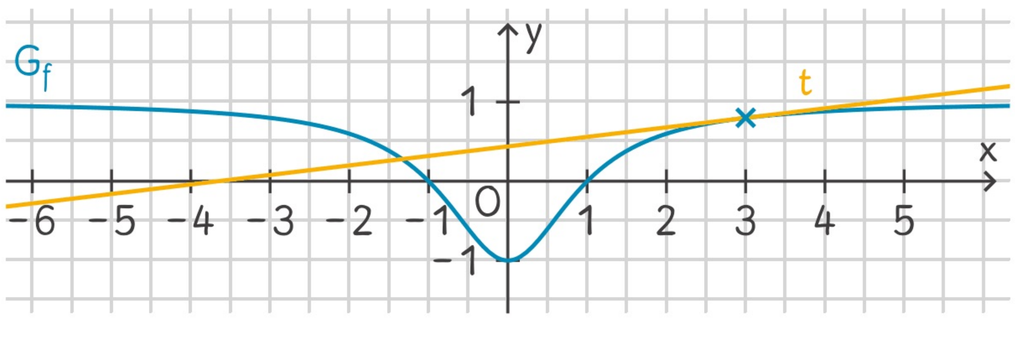
b) $f(3) = 0{,}8$

$m = f'(3) = 0{,}12$

$y = mx + t \iff 0{,}8 = 0{,}12\cdot 3 + t \iff t = 0{,}8 - 0{,}36 = 0{,}44$

Tangentengleichung: $y = 0{,}12x + 0{,}44$.

$\tan\alpha = 0{,}12 \implies \alpha \approx 6{,}8°$



2

Bei der Anwendung der Quotientenregel wird tatsächlich der Nenner quadriert, wodurch die Polstelle $x = 2$ erhalten bleibt. Allerdings unterscheiden sich die beiden Polstellen von f und f' in ihrer Art. Das bedeutet, f hat eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel, da sie zweiter Ordnung ist, und f' eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel. Die Ordnung der Polstelle von f' ist dritter Ordnung, da der Term der Ableitung nach Anwendung der Quotientenregel vollständig gekürzt werden muss, bevor die Polstelle mit ihrer Art bestimmt werden kann:

$$g'(x) = \frac{(2x-4)\cdot(x-2)^2 - (x^2-4x)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{(2x-4)(x-2) - 2(x^2-4x)}{(x-2)^3}$$
$$= \frac{2x^2 - 4x - 4x + 8 - 2x^2 + 8x}{(x-2)^3} = \frac{8}{(x-2)^3}.$$

Damit hat f' die Polstelle $x = 2$ (mit VZW, da 3. Ordnung).
Folglich ist nur der erste Satz von Moritz' Aussage wahr und damit die Aussage insgesamt falsch. Dervis' Aussage ist wahr.

3

a) Da $0{,}5e^x$ für alle x aus dem Definitionsbereich positiv ist, hat f keine Nullstelle.

b) $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\overset{\to +\infty}{\boxed{0{,}5e^x}}}{\underset{\to +\infty}{\boxed{x^2}}} = +\infty,$$ da e^x schneller wächst als x^2.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\overset{\to 0^+}{\boxed{0{,}5e^x}}}{\underset{\to +\infty}{\boxed{x^2}}} = 0^+$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\overset{\to 0{,}5}{\boxed{0{,}5e^x}}}{\underset{\to 0^+}{\boxed{x^2}}} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{0{,}5e^x}{x^2} = +\infty,$$ da $x = 0$ eine Polstelle ohne VZW ist.

c) $f'(x) = \frac{0{,}5e^x \cdot x^2 - 0{,}5e^x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{0{,}5e^x \cdot x(x-2)}{x^4} = \frac{0{,}5e^x \cdot (x-2)}{x^3} = 0$

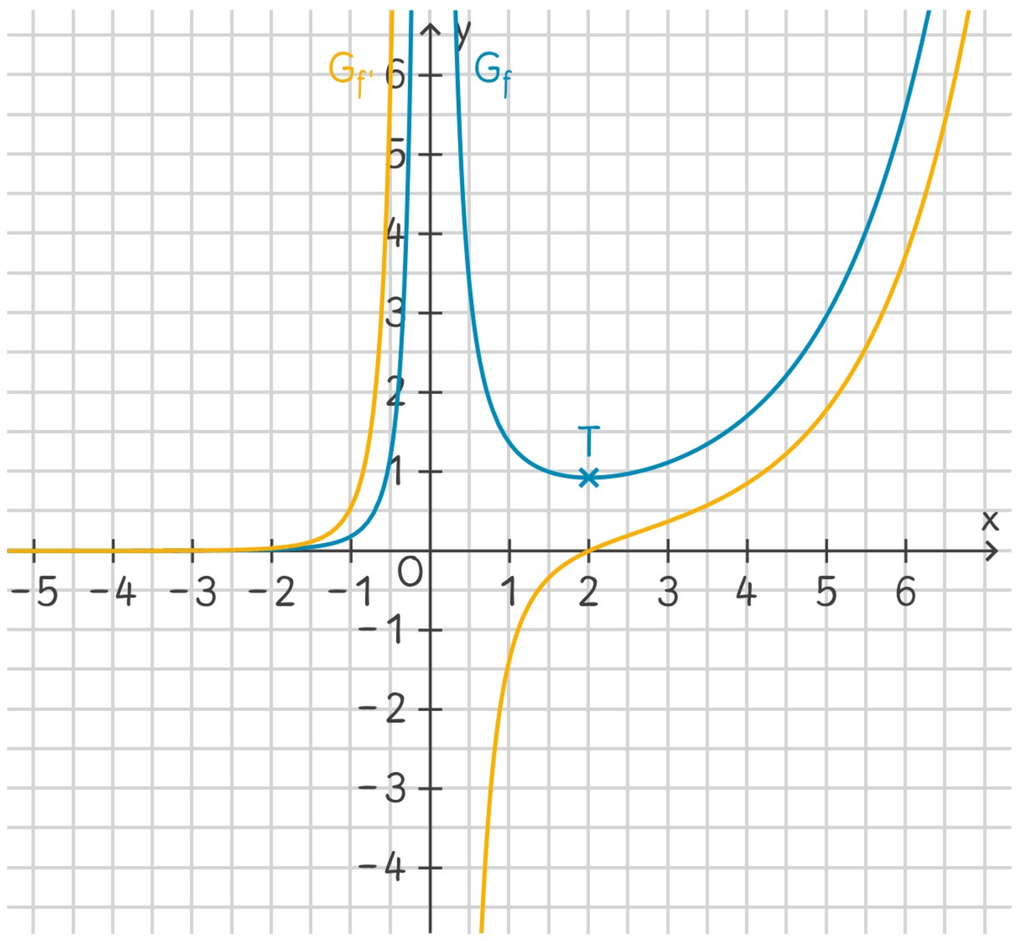
$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Monotonie:

f'(x):	> 0	nicht def.	< 0	= 0	> 0
		0		2	
G_f:	↗		↘	T	↗

Mit $f(2) = \frac{0{,}5e^2}{4} = \frac{1}{8}e^2$ ergibt sich der Tiefpunkt $T\left(2 \middle| \frac{1}{8}e^2\right)$.

d)



e) Der Graph der Ableitung von f weist keine Extrempunkte auf, weshalb die 2. Ableitung keine Nullstellen und f keine Wendestellen hat. Der Graph der Ableitung von f steigt auf dem gesamten Definitionsbereich, weshalb $f''(x) > 0$ für alle $x \in D$ gilt. Daraus ergibt sich, dass G_f auf den Intervallen $]-\infty; 0[$ und $]0; \infty[$ linksgekrümmt ist.

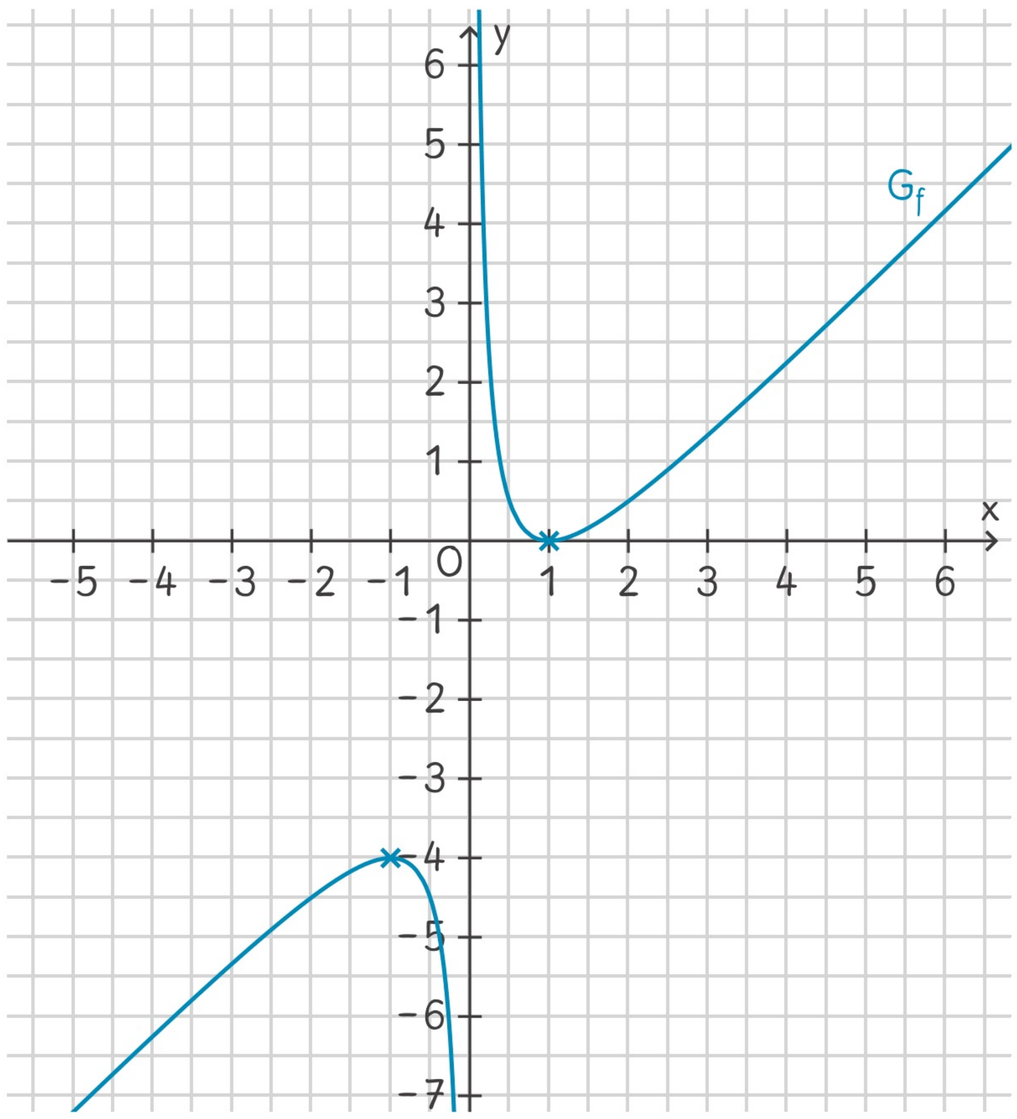
4

a) Monotonieintervalle von f:
- $]-\infty; -1]$: f ist streng monoton zunehmend.
- $[-1; 0[$: f ist streng monoton abnehmend.
- $]0; 1]$: f ist streng monoton abnehmend.
- $[1; \infty[$: f ist streng monoton zunehmend.

Extremstellen von f: $x = -1$ und $x = 1$.

b) Da der Graph der Ableitung von f keine Extrempunkte hat, hat die zweite Ableitung von f'' keine Nullstellen und entsprechend hat der Graph von f keine Wendepunkte.

c)



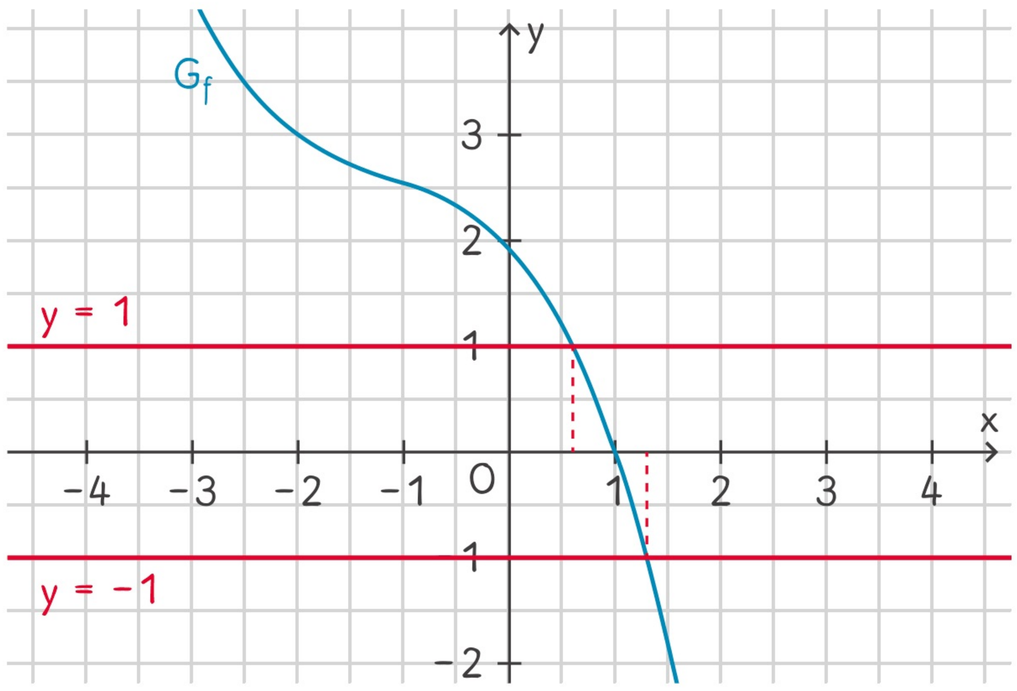
d) Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Punkt $(0|-2)$.

5

a) Da $g(1) = \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{0}$ nicht bestimmt werden kann, ist $x = 1$ nicht in D_g enthalten.

$g(-2) = \frac{1}{f(-2)} \approx \frac{1}{3}$

b) $g(x) = f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = f(x) \Leftrightarrow 1 = (f(x))^2 \Leftrightarrow f(x) = 1$ oder $f(x) = -1$



Daraus ergeben sich als x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f und g: $x_1 \approx 0{,}6$ und $x_2 \approx 1{,}3$.

VI Wurzelfunktion

Seite 179

5

a) Die Funktion ist auf $\mathbb{R}$ nicht umkehrbar, da z. B. der Funktionswert 1 mindestens zweimal angenommen wird.

b) Die Funktion kann auf $\mathbb{R}$ umkehrbar sein, da im gesamten dargestellten Bereich kein Funktionswert mehrfach angenommen wird bzw. die Funktion in diesem Bereich streng monoton abnehmend ist.

c) Die Funktion kann auf $\mathbb{R}$ umkehrbar sein, da im gesamten dargestellten Bereich kein Funktionswert mehrfach angenommen wird.

6

$f'(x) = -1 \cdot e^{-x} + (-x) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (x - 1)$

Es ist $f'(x) > 0$ für $x > 1$. Also ist die Funktion z. B. im Intervall $[1; +\infty[$ umkehrbar.

Im Intervall $[-2; 2]$ gilt sowohl $f'(x) < 0$ als auch $f'(x) > 0$. Da die Funktion stetig ist, ändert die Funktion ihr Monotonieverhalten und ist in diesem Intervall nicht umkehrbar.

Seite 180

11

a) $f(x) = \frac{2}{x-3} = 2(x-3)^{-1}$

Es ist $f'(x) = -2(x-3)^{-2} \cdot 1 = -\frac{2}{(x-3)^2} < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Also ist f in D_f streng monoton abnehmend und damit in D_f umkehrbar.

b) Funktionsgleichung nach x auflösen:

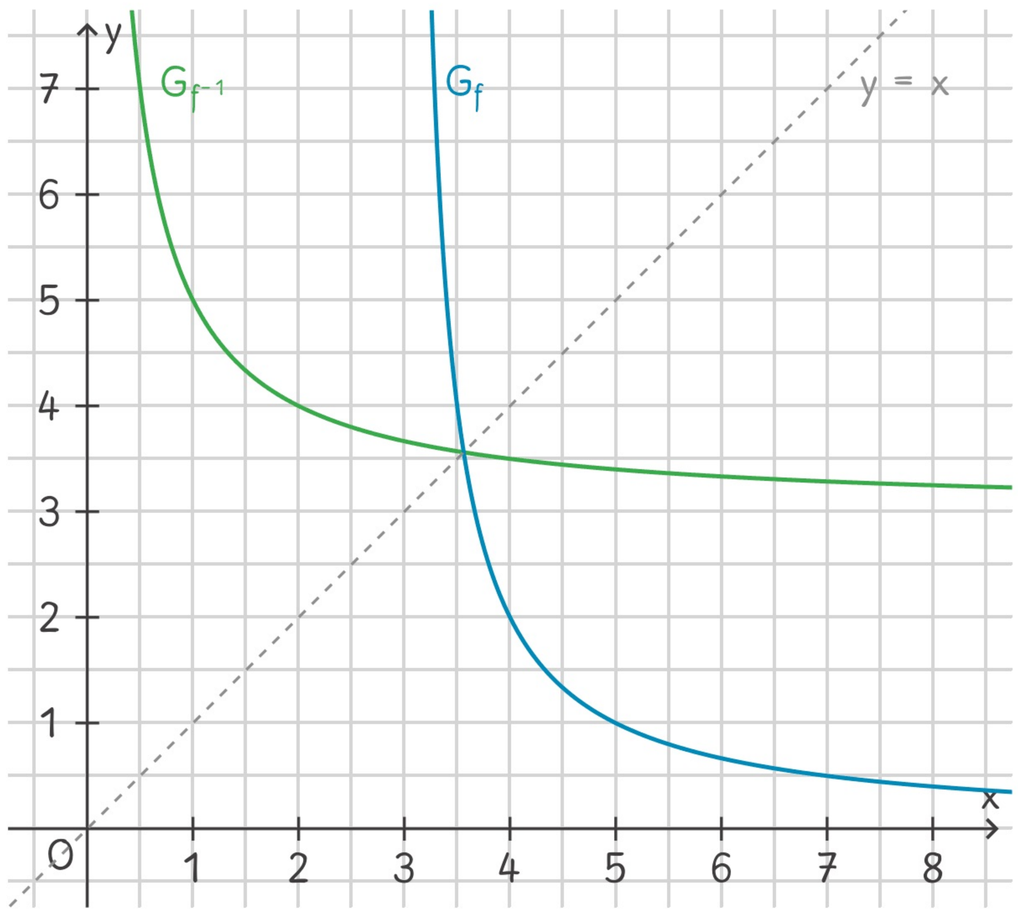
$y = \frac{2}{x-3} \Leftrightarrow y \cdot (x-3) = 2 \Leftrightarrow x - 3 = \frac{2}{y} \Leftrightarrow x = \frac{2}{y} + 3.$

Variablentausch: $y = \frac{2}{x} + 3$.

Funktionsterm der Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = \frac{2}{x} + 3$ mit

$D_{f^{-1}} = W_f = \mathbb{R}^+$ und $W_{f^{-1}} = D_f =]3; +\infty[$

c)



Der Graph von f^{-1} entsteht durch Spiegelung von G_f an der Geraden mit der Gleichung $y = x$.

12

Individuelle Lösung, z. B.: $j(x) = x + 1$ oder $j(x) = e^x$.

(Der Graph der gesuchten Funktion darf die Gerade mit der Gleichung $y = x$ nicht schneiden und muss in $\mathbb{R}$ streng monoton sein.)

G 14

Es ist $f'(x) = 6x^2 - 2x$, $f''(x) = 12x - 2$ und $f'''(x) = 12$.

Koordinaten des Wendepunktes bestimmen:

$f''(x) = 12x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$

Mit $f'''\left(\frac{1}{6}\right) = 12 \neq 0$ und $f\left(\frac{1}{6}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 + 1 = \frac{53}{54}$ ergibt sich der Wendepunkt $W\left(\frac{1}{6} \middle| \frac{53}{54}\right)$.

Tangentengleichung im Punkt W aufstellen:

$m = f'\left(\frac{1}{6}\right) = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$

Einsetzen in $y = mx + t$ ergibt $\frac{53}{54} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + t \Leftrightarrow t = \frac{109}{108}$.

Gleichung der Wendetangente: $y = -\frac{1}{6}x + \frac{109}{108}$.

Seite 184

5

a) $f'(x) = -2 \cdot 0{,}3 \cdot x^{0{,}3-1} = -0{,}6x^{-0{,}7}$

$F(x) = -2 \cdot \frac{1}{0{,}3+1} \cdot x^{0{,}3+1} = -\frac{2}{1{,}3}x^{1{,}3} = -\frac{20}{13}x^{1{,}3}$

b) $f(x) = x^{-\frac{3}{4}}$

$f'(x) = -\frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}-1} = -\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}} = -\frac{3}{4\sqrt[4]{x^7}}$

$F(x) = \frac{1}{-\frac{3}{4}+1} \cdot x^{-\frac{3}{4}+1} = \frac{1}{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}} = 4x^{\frac{1}{4}} = 4\sqrt[4]{x}$

c) $f(x) = 2 \cdot x \cdot x^{\frac{2}{3}} = 2x^{\frac{5}{3}}$

$f'(x) = 2 \cdot \frac{5}{3} \cdot x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{10}{3}\sqrt[3]{x^2}$

$F(x) = 2 \cdot \frac{1}{\frac{5}{3}+1} \cdot x^{\frac{5}{3}+1} = \frac{2}{\frac{8}{3}}x^{\frac{8}{3}} = \frac{3}{4}x^{\frac{8}{3}} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^8}$

6

Graph A gehört zur Funktion k, da k mit $k(x) = x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$ die maximale Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ hat und Graph A die senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = 0$ besitzt.

Graph D gehört zur Funktion f, da der Graph von f mit $f(x) = \frac{1}{5}x^4$ durch den Punkt $P\left(1 \middle| \frac{1}{5}\right)$ verläuft.

Graph B gehört zur Funktion g, da g mit $g(x) = x^{\frac{4}{5}}$ einen Exponenten hat, der kleiner als 1 ist. Somit verläuft der Graph von g für $x > 1$ unterhalb der Geraden mit der Gleichung $y = x$.

Graph C gehört zur Funktion h, da h mit $h(x) = \sqrt[4]{x^5} = x^{\frac{5}{4}}$ einen Exponenten hat, der größer als 1 ist. Somit verläuft der Graph von h für $x > 1$ oberhalb der Geraden mit der Gleichung $y = x$.

Seite 185

13

a) $f(x) = 4x^2 \cdot \sqrt{x} = 4x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 4x^{\frac{5}{2}}$

$f'(x) = 4 \cdot \frac{5}{2} \cdot x^{\frac{5}{2}-1} = 10x^{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{x^3}$

b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(\sin(x))^3}} \cdot 3(\sin(x))^2 \cdot \cos(x) = \frac{3}{2}\sqrt{\sin(x)} \cdot \cos(x)$

c) $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x} + (x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x+x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x+1}{2\sqrt{x}}$

d) $f'(x) = \dfrac{e^x \cdot \sqrt{8-x^3} - e^x \cdot \frac{1}{2}(8-x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-3x^2)}{8-x^3}$

$= \dfrac{e^x \cdot \sqrt{8-x^3} \cdot \sqrt{8-x^3} - e^x \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{8-x^3}} \cdot \sqrt{8-x^3} \cdot (-3x^2)}{(8-x^3) \cdot \sqrt{8-x^3}}$

$= e^x \cdot \dfrac{8 - x^3 + 1{,}5x^2}{\sqrt{(8-x^3)^3}}$

14

a) $D_f = [2; +\infty[$; $W_f = [5; +\infty[$

b) Es ist $f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4x-8}} \cdot 4 = \frac{6}{\sqrt{4x-8}} > 0$ für $x > 2$.

Somit ist f in D_f streng monoton zunehmend und damit umkehrbar.

c) Da $D_f = [2; +\infty[$ und $W_f = [5; +\infty[$ ist, gilt:

$y = 3\sqrt{4x-8} + 5 \quad | -5$

$\Leftrightarrow y - 5 = 3\sqrt{4x-8} \quad | :3$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(y-5) = \sqrt{4x-8} \quad | ^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{9}(y-5)^2 = 4x - 8 \quad | +8$

$\Leftrightarrow \frac{1}{9}(y-5)^2 + 8 = 4x \quad | :4$

$\Leftrightarrow \frac{1}{36}(y-5)^2 + 2 = x$

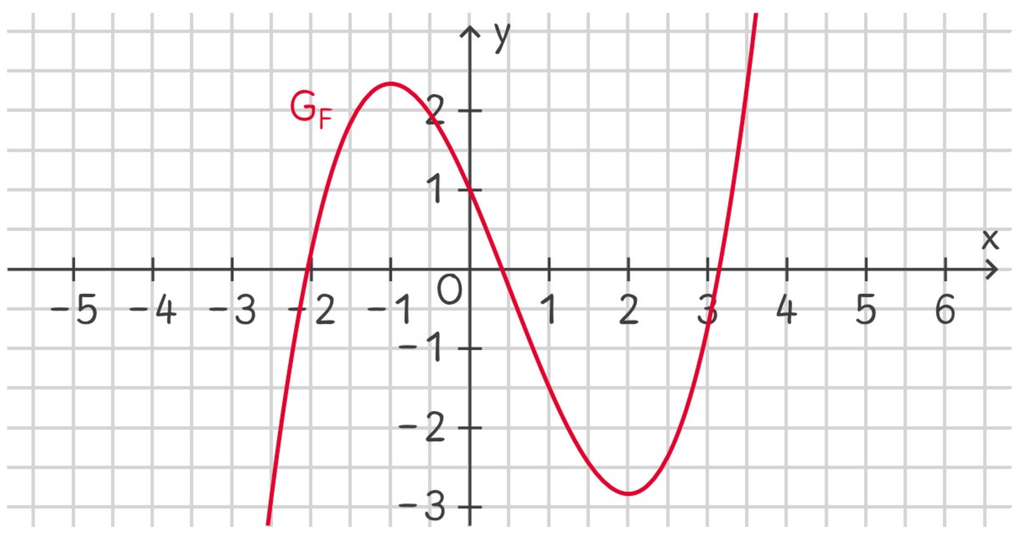
Variablentausch: $\frac{1}{36}(x-5)^2 + 2 = y$.

Funktionsterm der Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = \frac{1}{36}(x-5)^2 + 2$

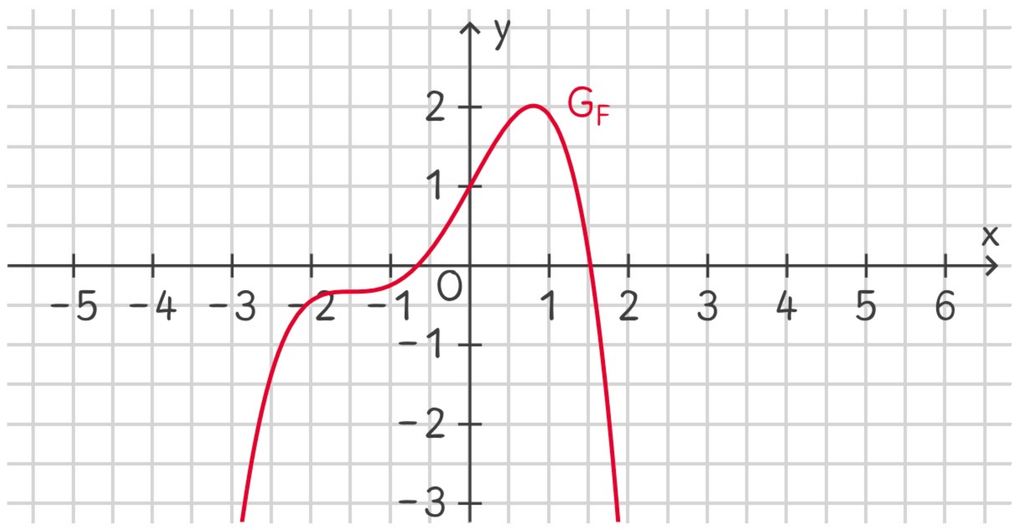
mit $D_{f^{-1}} = [5; +\infty[$ und $W_{f^{-1}} = [2; +\infty[$.

G 17

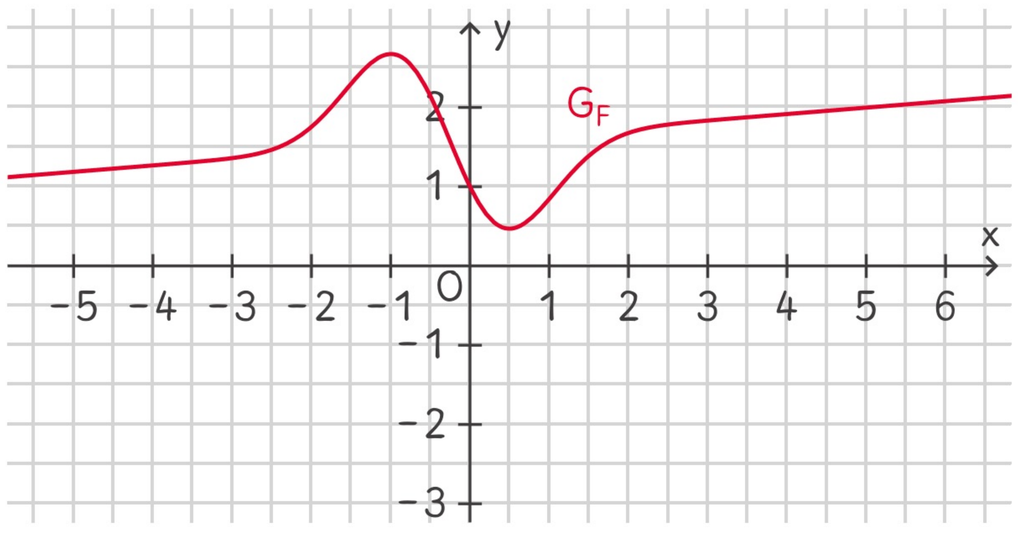
a)



b)



c)



Seite 189

5

a) $f'(x) = \dfrac{1 \cdot \sqrt{x-1} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{x-1} = \dfrac{\sqrt{x-1} - \frac{x}{2\sqrt{x-1}}}{x-1}$

$= \dfrac{\left(\sqrt{x-1} - \frac{x}{2\sqrt{x-1}}\right) \cdot \sqrt{x-1}}{(x-1) \cdot \sqrt{x-1}} = \dfrac{(x-1) - \frac{1}{2}x}{(x-1) \cdot \sqrt{x-1}} = \dfrac{\frac{1}{2}x - 1}{\sqrt{(x-1)^3}}$

b) Definitionsmenge: $D =]1; +\infty[$.

Es liegt keine Symmetrie zum Koordinatensystem vor, da f für $x < 1$ nicht definiert ist.

Verhalten an den Rändern von D:

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{x}{\sqrt{x-1}} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \underbrace{x}_{\to 1} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{\underbrace{x-1}_{\to 0^+}}}}_{\to +\infty} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x-1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\underbrace{\dfrac{x^2}{x-1}}_{\to +\infty}} = +\infty$

Nullstellen: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Wegen $0 \notin D$ hat f keine Nullstellen.

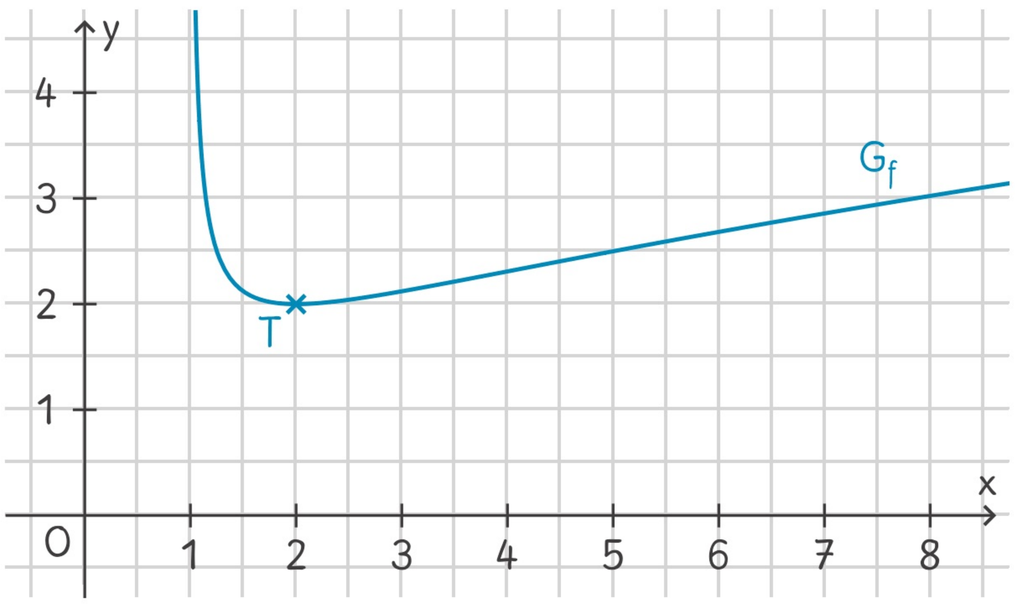
Lage und Art der Extrempunkte:

$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}x - 1}{\sqrt{(x-1)^3}} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 1 \Leftrightarrow x = 2$

$f'(x)$:	< 0	$= 0$	> 0
		2	
G_f:	↘	T	↗

Mit $f(2) = 2$ ergibt sich der Tiefpunkt $T(2|2)$.

Graph:



Seite 191

19

a) $6{,}4 - 0{,}8x \geq 0 \Leftrightarrow 6{,}4 \geq 0{,}8x \Leftrightarrow x \leq 8$

Definitionsmenge von f: $D =]-\infty; 8]$ bzw. im Sachzusammenhang $D = [0; 8]$.

b) $g(x) = -f(x) = -0{,}15(x+1)\sqrt{6{,}4 - 0{,}8x}$

c) $f'(x) = 0{,}15 \cdot 1 \cdot \sqrt{6{,}4 - 0{,}8x} + 0{,}15(x+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (6{,}4 - 0{,}8x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-0{,}8)$

$= 0{,}15 \cdot \sqrt{6{,}4 - 0{,}8x} + \dfrac{-0{,}06(x+1)}{\sqrt{6{,}4 - 0{,}8x}} = \dfrac{0{,}15(6{,}4 - 0{,}8x) - 0{,}06x - 0{,}06}{\sqrt{6{,}4 - 0{,}8x}}$

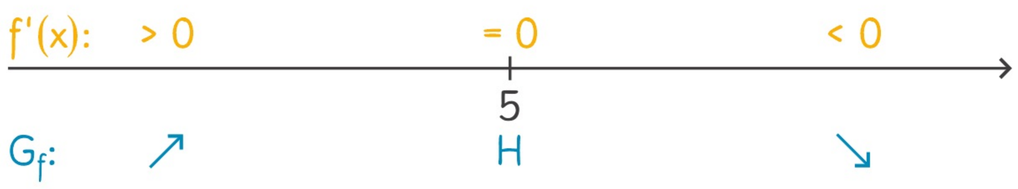
$= \dfrac{0{,}96 - 0{,}12x - 0{,}06x - 0{,}06}{\sqrt{6{,}4 - 0{,}8x}} = \dfrac{0{,}9 - 0{,}18x}{\sqrt{6{,}4 - 0{,}8x}} \quad (x \neq 8)$

$f'(8)$ ist nicht definiert und es gilt

$\lim\limits_{\substack{x \to 8 \\ x < 8}} \dfrac{0{,}9 - 0{,}18x}{\sqrt{6{,}4 - 0{,}8x}} = \lim\limits_{\substack{x \to 8 \\ x < 8}} \Big(\underbrace{0{,}9 - 0{,}18x}_{\to -13{,}5}\Big) \cdot \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{\underbrace{6{,}4 - 0{,}8x}_{\to 0^+}}}}_{\to +\infty} = -\infty$.

Der Graph G_f hat bei $x = 8$ eine senkrechte Tangente und somit schneidet G_f die x-Achse unter einem Winkle von 90°.

d) Die Länge des Flügels entspricht dem Abstand von $x = 0$ zu $x = 8$ (vgl. Teilaufgabe a)).
Die Breite des Flügels entspricht dem doppelten Maximum der Funktion f.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}9 - 0{,}18x = 0 \Leftrightarrow x = 5$



Randextrema: $f(0) \approx 0{,}4$ und $f(8) = 0$.
Bei $x = 5$ liegt ein globales Maximum vor: $f(5) \approx 1{,}4$.
Die Schachtel müsste eine Länge von 8 cm und eine Breite von etwa 2,8 cm haben.

G 21

Überprüfung mithilfe des Kehrsatzes des Satzes von Pythagoras:
Da die Seitenlängen $a = 1{,}9\,\text{cm}$, $b = 1{,}4\,\text{cm}$ und $c = 1\,\text{cm}$ sind, ist a die längste Seite im Dreieck und müsste die Hypotenuse sein.
Da $1{,}4^2 + 1^2 = 2{,}96$ und $1{,}9^2 = 3{,}61$ ist, gilt nicht $b^2 + c^2 = a^2$ und das Dreieck ist folglich nicht rechtwinklig.

Seite 197

1

a) $D = \mathbb{R}_0^+;\ f'(x) = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = 2x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

b) $D = \mathbb{R}^+;\ f(t) = 5 \cdot t^{-\frac{1}{5}};\ f'(t) = 5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot t^{-\frac{1}{5}-1} = -t^{-\frac{6}{5}} = -\frac{1}{\sqrt[5]{t^6}}$

c) $D = [-1; 1];\ f'(z) = \frac{1}{2} \cdot (1 - z^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (-2z) = -\frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}$

d) $D = \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right[;\ f'(x) = 1 \cdot \sqrt{9x + 3} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot (9x + 3)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 9$
$= \frac{\sqrt{9x + 3} \cdot \sqrt{9x + 3} + 4{,}5x}{\sqrt{9x + 3}} = \frac{9x + 3 + 4{,}5x}{\sqrt{9x + 3}} = \frac{13{,}5x + 3}{\sqrt{9x + 3}}$

2

G_k ist der Graph der Ableitungsfunktion der Funktion, die zu G_f gehört.
G_m ist der Graph der Ableitungsfunktion der Funktion, die zu G_g gehört.
G_p ist der Graph der Ableitungsfunktion der Funktion, die zu G_h gehört.
Die Graphen G_g, G_k, G_m, G_h und G_p können zu umkehrbaren Funktionen gehören, da sie im dargestellten Bereich entweder streng monoton steigend oder streng monoton fallend sind. Nur die Funktion f nimmt im dargestellten Bereich z. B. den Funktionswert 1 zweimal an und ist somit sicher nicht umkehrbar.

3

a) Es ist $f'(x) = 2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist f in D_f streng monoton zunehmend und damit in D_f umkehrbar.
Funktionsgleichung nach x auflösen:
$y = 2x + 1 \Leftrightarrow y - 1 = 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(y - 1) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = x.$
Variablentausch: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.
Funktionsterm der Umkehrfunktion:
$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ mit $D_{f^{-1}} = W_f = \mathbb{R}$ und $W_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \frac{2}{x - 3} - 1{,}5 = 2(x - 3)^{-1} - 1{,}5$
Es ist $f'(x) = -2(x - 3)^{-2} = -\frac{2}{(x - 3)^2} < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist f in D_f streng monoton abnehmend und damit in D_f umkehrbar.
Funktionsgleichung nach x auflösen:
$y = \frac{2}{x - 3} - 1{,}5 \Leftrightarrow y + 1{,}5 = \frac{2}{x - 3} \Leftrightarrow (y + 1{,}5)(x - 3) = 2$
$\Leftrightarrow x - 3 = \frac{2}{y + 1{,}5} \Leftrightarrow x = \frac{2}{y + 1{,}5} + 3.$
Variablentausch: $y = \frac{2}{x + 1{,}5} + 3.$
Funktionsterm der Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = \frac{2}{x + 1{,}5} + 3$ mit
$D_{f^{-1}} = W_f =]-1{,}5; \infty[$ und $W_{f^{-1}} = D_f =]3; \infty[$.

c) $f(x) = \sqrt[3]{x} - 2 = x^{\frac{1}{3}} - 2$
Es ist $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist f in D_f streng monoton zunehmend und damit in D_f umkehrbar.
Funktionsgleichung nach x auflösen:
$y = \sqrt[3]{x} - 2 \Leftrightarrow y + 2 = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow (y + 2)^3 = x.$
Variablentausch: $y = (x + 2)^3$.
Funktionsterm der Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = (x + 2)^3$ mit
$D_{f^{-1}} = W_f =]-2; \infty[$ und $W_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}_0^+$.

d) Es ist $f'(x) = 0{,}5 \cdot 2(x - 1)^1 = x - 1 > 0$ für alle $x > 1$. Also ist f in D_f streng monoton zunehmend und damit in D_f umkehrbar.
Funktionsgleichung nach x auflösen:
$y = 0{,}5(x - 1)^2 + 2 \Leftrightarrow y - 2 = 0{,}5(x - 1)^2 \Leftrightarrow 2(y - 2) = (x - 1)^2$
$\Leftrightarrow 2y - 4 = (x - 1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{2y - 4} = x - 1$ oder $-\sqrt{2y - 4} = x - 1.$
Wegen $x \geq 1$ gilt hier $\sqrt{2y - 4} = x - 1$.
$\sqrt{2y - 4} = x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{2y - 4} + 1 = x$
Variablentausch: $y = \sqrt{2x - 4} + 1$.
Funktionsterm der Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = \sqrt{2x - 4} + 1$ mit
$D_{f^{-1}} = W_f = [2; \infty[$ und $W_{f^{-1}} = D_f = [1; \infty[$.

4

Der Graph von k entsteht aus dem Graphen von g durch Spiegelung an der x-Achse, Verschiebung um 1 in x-Richtung und Verschiebung um 2 in y-Richtung.
Nullstellen:
$k(x) = -\sqrt{x - 1} + 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x - 1} = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 4 \Leftrightarrow x = 5.$
($x = 5$ liegt in der Definitionsmenge von k.)
Da G_k wie beschrieben aus G_g hervorgeht und $W_g = \mathbb{R}_0^+$ gilt, folgt für die Wertemenge von k: $W_k =]-\infty; 2]$.

5

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{25 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow -3x = -4\sqrt{25 - x^2}$
$\Leftrightarrow \frac{3}{4}x = \sqrt{25 - x^2}$
Durch Quadrieren erhält man $\frac{9}{16}x^2 = 25 - x^2 \Leftrightarrow \frac{25}{16}x^2 = 25$
$\Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = -4$ oder $x = 4$
Da $f'(-4) = \frac{4}{3} \neq -\frac{4}{3}$ ist, ist $x = -4$ keine Lösung. Wegen $f'(4) = -\frac{4}{3}$ ist $x = 4$ eine Lösung.
Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(4 \mid f(4))$:
$f(4) = 3$ und $m = -\frac{4}{3}$ in $y = mx + t$ einsetzen:
$3 = -\frac{4}{3} \cdot 4 + t \quad \left| + \frac{16}{3}\right.$
$t = \frac{25}{3}$
Tangentengleichung: $y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$.

6

a) $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (9 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{2x}{\sqrt{9 - x^2}}$

b) Definitionsmenge: $D = [-3; 3]$.

Es ist $f(-x) = 2\sqrt{9 - (-x)^2} = 2\sqrt{9 - x^2} = f(x)$.

Folglich ist G_f symmetrisch zur y-Achse.

Verhalten von f an den Rändern von D:

$\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} 2\sqrt{9 - x^2} = 0$ und $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} 2\sqrt{9 - x^2} = 0$

Verhalten von f' an den Rändern von D:

$$\lim_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} \left(\underbrace{-2x}_{\to 6} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}}_{\substack{\to 0^+ \\ \to +\infty}} \right) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \left(\underbrace{-2x}_{\to -6} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}}_{\substack{\to 0^+ \\ \to +\infty}} \right) = -\infty$$

Nullstellen von f: $f(x) = 2\sqrt{9 - x^2} = 0 \iff x = -3$ oder $x = 3$.

Lage und Art der Extrempunkte von G_f:

$f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{9 - x^2}} = 0 \iff -2x = 0 \iff x = 0$

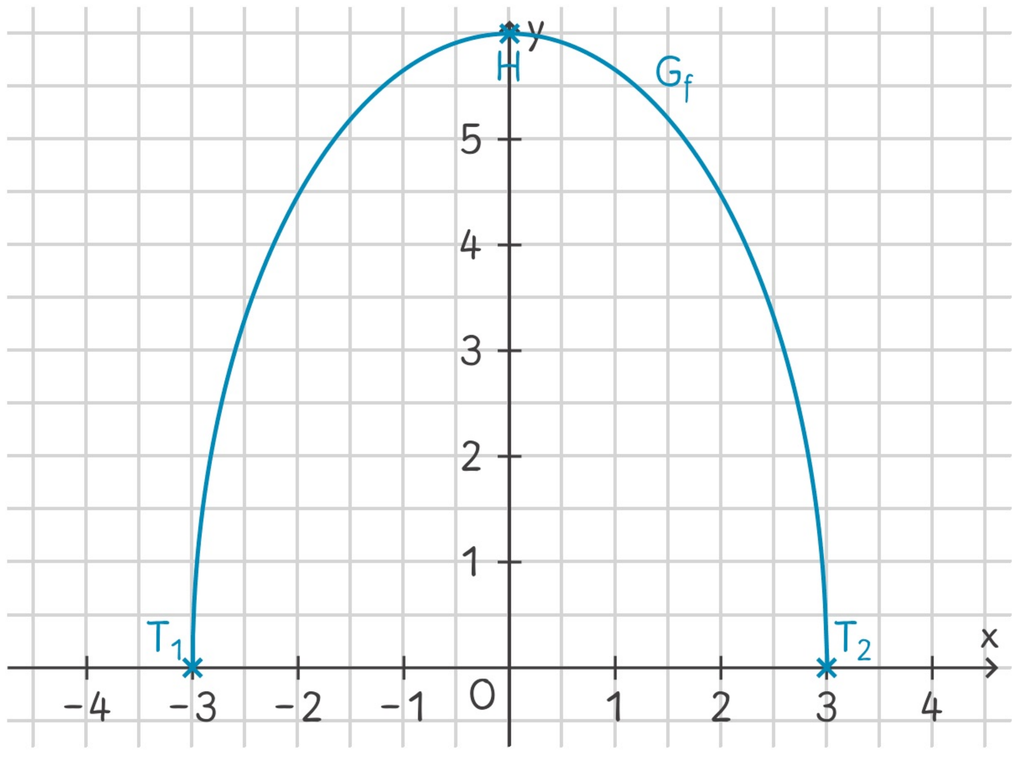
$f'(x)$:	> 0		$= 0$		< 0
			0		
G_f:	↗		H		↘

Mit $f(0) = 6$ ergibt sich der Hochpunkt $H(0 \mid 6)$.

Randextrema: $f(-3) = f(3) = 0$.

Tiefpunkte: $T_1(-3 \mid 0)$ und $T_2(3 \mid 0)$.

Graph:



7

a) Falsch. Gegenbeispiel:
Die Funktion f mit $f(x) = (x - 1) \cdot x \cdot (x + 1) = x^3 - x$ ist eine ungerade Funktion und ihr Graph somit punktsymmetrisch zum Ursprung. Trotzdem ist die Funktion nicht umkehrbar, da z. B. der Funktionswert 0 zweimal angenommen wird.

b) Falsch. Gegenbeispiel:
Der Graph von f mit $f(x) = x^3$ hat an der Stelle $x = 0$ eine waagerechte Tangente. Trotzdem ist die Funktion umkehrbar.

c) Wahr, denn der Graph der Funktion ist für $m \neq 0$ stets eine streng monoton fallende oder eine streng monoton steigende Gerade und die Funktion somit umkehrbar.

d) Wahr, denn wenn man die Umkehrfunktion f^{-1} einer Funktion f umkehrt, ergibt sich wieder die Funktion f.

8

$f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(x + 0{,}8)^2(3 - x)} = 0 \iff x = -0{,}8$ oder $x = 3$

$f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(x + 0{,}8)^2(3 - x)} = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + 1{,}6x + 0{,}64)(3 - x)}$

$= \frac{1}{3}\sqrt{3x^2 + 4{,}8x + 1{,}92 - x^3 - 1{,}6x^2 - 0{,}64x}$

$= \frac{1}{3}\sqrt{-x^3 + 1{,}4x^2 + 4{,}16x + 1{,}92}$

$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot ((x + 0{,}8)^2(3 - x))^{-\frac{1}{2}} \cdot (-3x^2 + 2{,}8x + 4{,}16)$

$= \frac{-3x^2 + 2{,}8x + 4{,}16}{6 \cdot \sqrt{(x + 0{,}8)^2(3 - x)}}$

$f'(x) = 0 \iff -3x^2 + 2{,}8x + 4{,}16 = 0$

Also: $x_{1,2} = \frac{-2{,}8 \pm \sqrt{2{,}8^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 4{,}16}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-2{,}8 \pm \sqrt{57{,}76}}{-6}$

$x_1 = -0{,}8$ und $x_2 = \frac{26}{15} \approx 1{,}73$

$f'(x)$:	< 0		$= 0$		> 0		$= 0$		< 0
			$-0{,}8$				$\frac{26}{15}$		
G_f:	↘		T		↗		H		↘

Mit $f\left(\frac{26}{15}\right) \approx 0{,}95$ ergibt sich der Hochpunkt $H(1{,}73 \mid 0{,}95)$. Dies ist der Punkt, in dem sich der Fuß über der Hürde befindet. Die Läuferin kommt im Punkt $R(3 \mid 0)$ auf.

Es ist $3 - 1{,}73 = 1{,}27$ und $0{,}95 - 0{,}762 = 0{,}188$. Die Läuferin kommt somit 1,27 m hinter der Hürde auf und ihr Fuß befindet sich knapp 19 cm über der Hürde.

VII Natürliche Logarithmusfunktion

Seite 202

8

a) $D =]0; +\infty[$

$f(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln(x) - \ln(2)$; $f'(x) = \frac{1}{x}$

b) $D =]0; +\infty[$

$f(x) = \ln\left(3\sqrt{x}\right) = \ln(3) + \ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \ln(3) + \frac{1}{2}\ln(x)$; $f'(x) = \frac{1}{2x}$

c) $D =]0; +\infty[$

$f(x) = \ln\left(\frac{13}{x}\right) = \ln(13) - \ln(x)$; $f'(x) = -\frac{1}{x}$

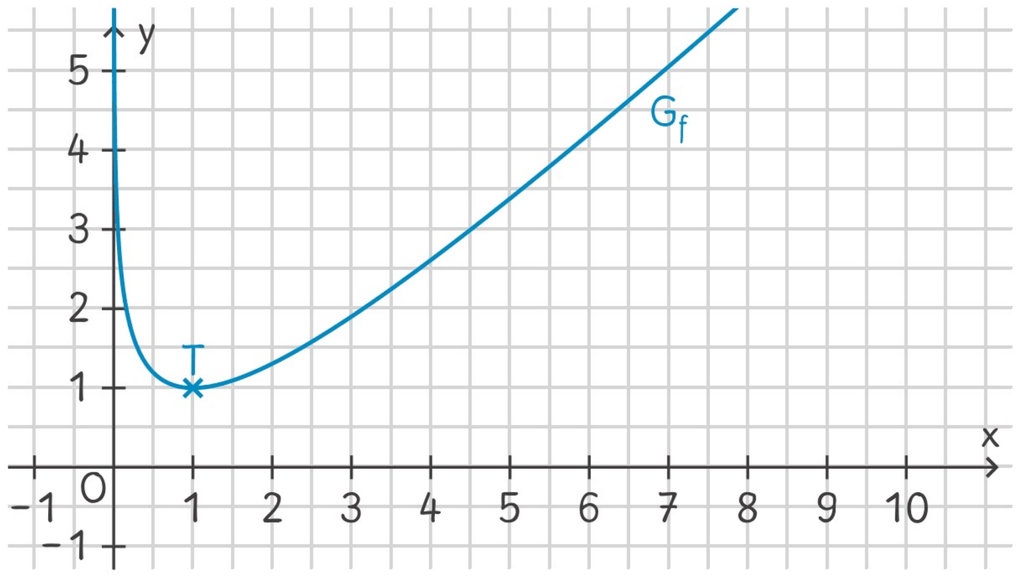
d) $D =]0; +\infty[$

$f(x) = \ln\left(x^{-\frac{2}{3}}\right) = -\frac{2}{3}\ln(x)$; $f'(x) = -\frac{2}{3x}$

Seite 204

19

a) Nullstellen:
$x - \ln(x) = 0 \iff x = \ln(x)$.
Diese Gleichung hat keine Lösung.
Extrempunkte:
$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ und $f''(x) = \frac{1}{x^2}$
$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = 0 \iff x = 1$
Mit $f''(1) = 1 > 0$ und $f(1) = 1$ erhält man $T(1 \mid 1)$.



b) $f'(x) = -e \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = -e \Leftrightarrow x = \frac{1}{1+e}$

$f\left(\frac{1}{1+e}\right) = \frac{1}{1+e} - \ln\left(\frac{1}{1+e}\right) = \frac{1}{1+e} + \ln(1+e)$

Im Punkt $P\left(\frac{1}{1+e} \middle| \frac{1}{1+e} + \ln(1+e)\right)$ hat G_f die Steigung $-e$.

$f'(x) = e \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = e \Leftrightarrow x = \frac{1}{1-e} < 0$. Wegen $D_f = \mathbb{R}^+$ kann G_f nicht die Steigung e haben.

c) Der Berührpunkt sei $B\left(x_B \middle| x_B - \ln(x_B)\right)$.

Steigung der Tangente: $f'(x_B) = 1 - \frac{1}{x_B}$.

Einsetzen in die Tangentengleichung $y = mx$ (Ursprungsgerade):

$x_B - \ln(x_B) = \left(1 - \frac{1}{x_B}\right) x_B \Leftrightarrow x_B - \ln(x_B) = x_B - 1 \Leftrightarrow \ln(x_B) = 1$

$\Leftrightarrow x_B = e$.

Tangentengleichung: $y = \left(1 - \frac{1}{e}\right) x$.

20

Individuelle Lösung, z. B.:

$y = \ln(x+3)$ gehört zum Graphen (2), da der zu dieser Funktionsgleichung gehörende Graph aus dem Graphen der natürlichen Logarithmusfunktion durch eine Verschiebung um -3 in x-Richtung hervorgeht.

$y = \ln(x) + 3$ gehört zum Graphen (4), da der zu dieser Funktionsgleichung gehörende Graph aus dem Graphen der natürlichen Logarithmusfunktion durch eine Verschiebung um 3 in y-Richtung hervorgeht.

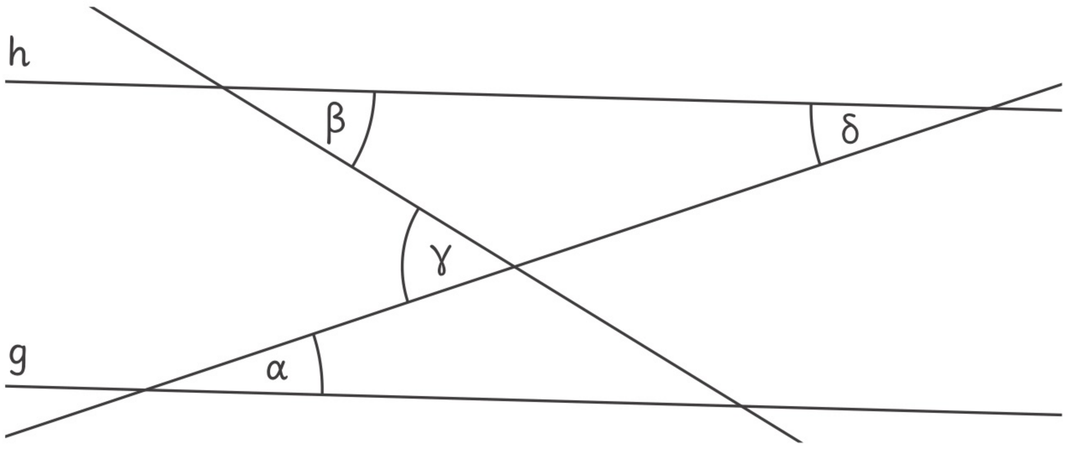
$y = \ln(3x)$ gehört zum Graphen (3), da der zu dieser Funktionsgleichung gehörende Graph aus dem Graphen der natürlichen Logarithmusfunktion durch eine Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{3}$ in x-Richtung hervorgeht.

$y = \frac{x+1}{x+3}$ gehört zum Graphen (1), da der zu dieser Funktionsgleichung gehörende Graph die x-Achse bei $x = -1$ schneidet, die senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = -3$ und die waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y = 1$ hat.

G 23

Die Geraden g und h sind genau dann parallel, wenn für die Größen α, β und γ der Winkel gilt: $\alpha + \beta = \gamma$.

Beweis: Es wird die Grafik wie folgt erweitert.



Die Geraden g und h sind genau dann parallel, wenn die Winkelgrößen α und δ gleich groß sind (Wechselwinkel).

Sie sind genau dann gleich groß, wenn die Summe der Winkelgrößen δ und β genauso groß ist wie der Nebenwinkel γ.

Also gilt $g \parallel h$ genau dann, wenn $\alpha + \beta = \gamma$ gilt.

Seite 207

7

a) $f'(x) = \frac{1}{\frac{x^3}{3} - 3} \cdot x^2 = \frac{3x^2}{x^3 - 9}$

b) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(3x) + \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{\ln(3x) + 1}{2}$

8

a) Es gilt $(2x^3 - x) \cdot \ln(x^2) = (2x^3 - x) \cdot 2\ln(x)$.

Damit folgt $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, da die Potenzfunktion dominiert.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, da die Potenzfunktion dominiert.

Seite 208

16

a) $f'(x) = \cos(x) \cdot \ln(x^2) + \sin(x) \cdot \frac{2x}{x^2} = \cos(x) \cdot \ln(x^2) + \sin(x) \cdot \frac{2}{x}$

b) $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \cos(x) + \ln(x)\sin(x)}{(\cos(x))^2}$

17

a) Es gilt $\frac{\ln(x^2)}{x^{-2}} = x^2 \cdot 2\ln(x)$. Damit folgt $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$, da die Potenzfunktion dominiert.

b) Es gilt $g(x) = \frac{\ln(x) + \frac{x}{2}}{x^{\frac{5}{2}}} = \frac{\ln(x)}{x^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{2 \cdot x^{\frac{3}{2}}}$. Damit folgt $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, da die Potenzfunktion dominiert.

G 20

Individuelle Lösung, z. B.:

Lineare Gleichung; $5x + 3 = 2 - \frac{1}{4}x$

Quadratische Gleichung; $2x^2 - 5 = 7x$

Potenzgleichung; $x^5 = 8$

Gleichung mit „ganzrationalen Termen“ höheren Grades; $0{,}5x^4 + 2x^3 - x^2 = 0$

Bruchgleichung; $\frac{2x}{x-2} = \frac{5}{x}$

Exponentialgleichung; $e^{x+1} = 5$

Eher selten vorkommende Gleichungstypen:

Trigonometrische Gleichung; $\sin(2x) = \frac{1}{2}$

Wurzelgleichung; $\sqrt{3x + 4} = 4$

Gleichung, die einen Logarithmusausdruck enthält; $\ln(5x - 3) = 2$

Seite 212

6

a) $D =]0; 2[$

Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

b) $f'(x) = \frac{2 - 2x}{2x - x^2}$

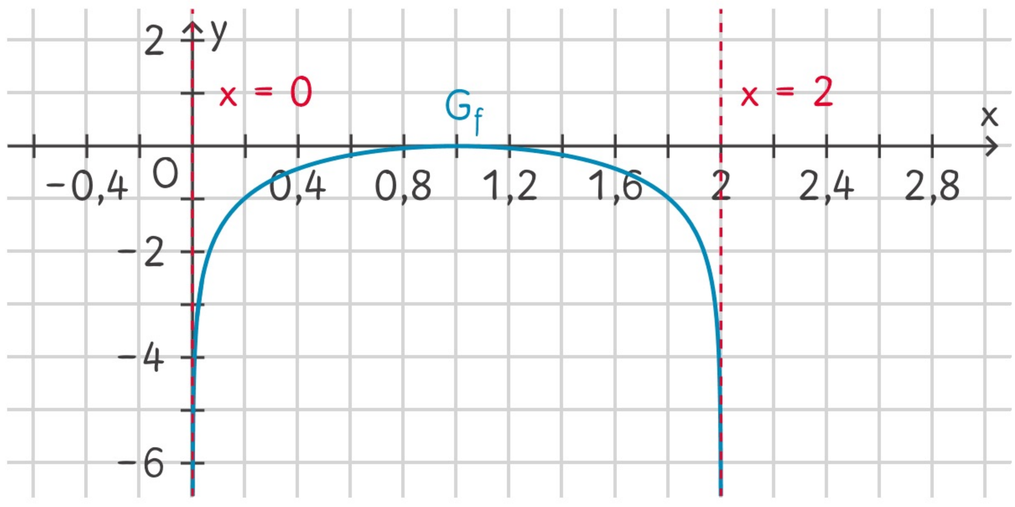
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Wegen $f'(x) > 0$ für $x < 1$ und $f'(x) < 0$ für $x > 1$ besitzt f an der Stelle $x = 1$ ein lokales Maximum.

c) Wegen $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = +\infty$ ist die Gerade mit der Gleichung $x = 0$ eine senkrechte Asymptote des Graphen von f.

Wegen $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f'(x) = -\infty$ ist die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ eine senkrechte Asymptote des Graphen von f.

d)



Seite 213

14

a) Es gilt $f(x) \leq 0$ für $x \in [1; 2[$. Also ist die Funktion h für $x \in [1; 2[$ nicht definiert. Außerdem besitzt f an der Stelle 2 eine Definitionslücke. Für alle anderen $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) > 0$.
Also gilt $D_h = \mathbb{R} \setminus [1; 2]$.
Da f auf $]-\infty; 1[$ streng monoton abnehmend und $x \mapsto \ln(x)$ streng monoton zunehmend ist, ist h auf $]-\infty; 1[$ streng monoton abnehmend.
Da f auf $]2; +\infty[$ streng monoton abnehmend und $x \mapsto \ln(x)$ streng monoton zunehmend ist, ist h auf $]2; +\infty[$ streng monoton abnehmend.

b) Individuelle Lösung, z. B.: k mit $k(x) = \frac{x+1}{x}$. Dann gilt $D_k = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $k(x) \leq 0$ für $x \in [-1; 0[$. Für alle anderen $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $k(x)$ positiv, also $\ln(k(x))$ definiert.

G 16

$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1) \cdot (x - 3)$. Die Nullstellen von f sind also 1 und 3.
$f(x) = x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 - 1 = (x - 2)^2 - 1$. Der Scheitelpunkt des Graphen von f ist also $S(2 \mid -1)$.

Seite 219

1

a) $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$, also $D_f =]-1; +\infty[$.
$f'(x) = \frac{2}{x+1}$

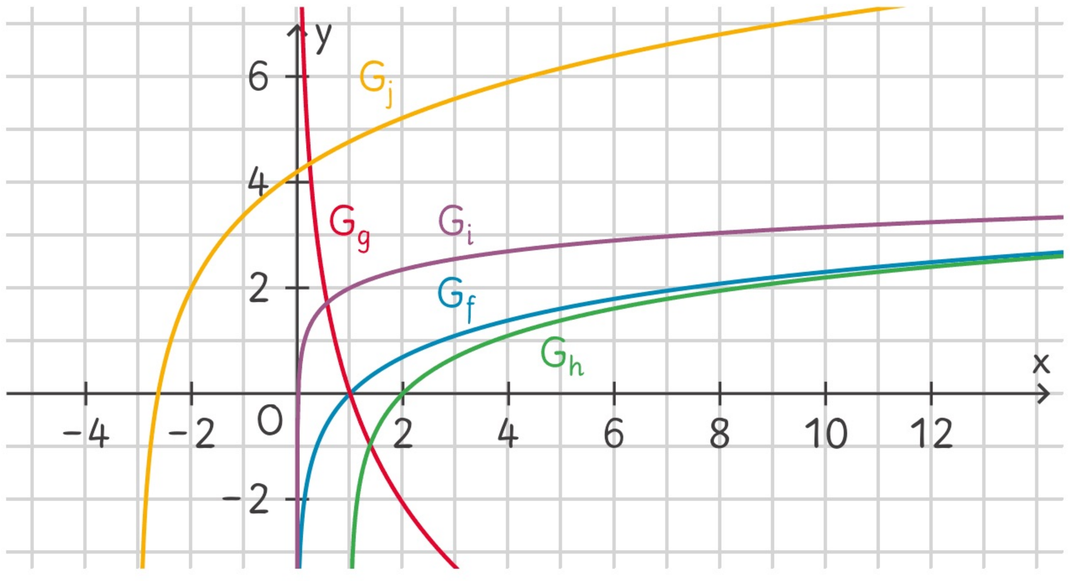
b) $x^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 3 \Leftrightarrow x > \sqrt{3}$ oder $x < -\sqrt{3}$, also $D_f = \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.
$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 3}$

c) $2x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}$, also $D_f =]\frac{5}{2}; +\infty[$.
$f'(x) = 3x^2 \cdot \ln(2x - 5) + \frac{2x^3}{2x - 5}$

d) $3x + 5 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{3}$. Außerdem gilt $x^2 + x + 1 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also gilt $D_f =]-\frac{5}{3}; +\infty[$.
$f'(x) = \frac{\frac{3}{3x+5} \cdot (x^2 + x + 1) - \ln(3x + 5) \cdot (2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$

2

Der Graph von g ergibt sich aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der x-Achse und Streckung mit dem Faktor 3 in y-Richtung.
Der Graph von h ergibt sich aus dem Graphen von f durch Verschiebung um 1 in x-Richtung.
Der Graph von i ergibt sich aus dem Graphen von f durch Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in y-Richtung und Verschiebung um 2 in y-Richtung.
Der Graph von j ergibt sich aus dem Graphen von f durch Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung, Verschiebung um −3 in x-Richtung und Verschiebung um 2 in y-Richtung.



3

Individuelle Lösung, z. B.:

a) Für $x > 0$: $F_1: x \mapsto 7\ln(x)$ und $F_2: x \mapsto 7\ln(x) + 18$.
Für $x < 0$: $F_1: x \mapsto 7\ln(-x)$ und $F_2: x \mapsto 7\ln(-x) + 5$.

b) Für $x > 0$: $F_1: x \mapsto -2\ln(x) + 3x$ und $F_2: x \mapsto -2\ln(x) + 3x - 3$.
Für $x < 0$: $F_1: x \mapsto -2\ln(-x) + 3x$ und $F_2: x \mapsto -2\ln(-x) + 3x + 27$.

c) Für $x > 0$: $F_1: x \mapsto -\frac{1}{2}\ln(x)$ und $F_2: x \mapsto -\frac{1}{2}\ln(x) + 4$.
Für $x < 0$: $F_1: x \mapsto -\frac{1}{2}\ln(-x)$ und $F_2: x \mapsto -\frac{1}{2}\ln(-x) - \frac{5}{2}$.

d) Für $x > 0$: $F_1: x \mapsto \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(x)$ und $F_2: x \mapsto \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(x) + 3$.
Für $x < 0$: $F_1: x \mapsto \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(-x)$, $F_2: x \mapsto \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(-x) + 1{,}56$.

4

a) $\ln(x) = 5 \Leftrightarrow x = e^5$

b) $2 \cdot \ln(x) - 6 = -3 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$

c) $\frac{1}{2\ln(x)} = 3 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{6}}$

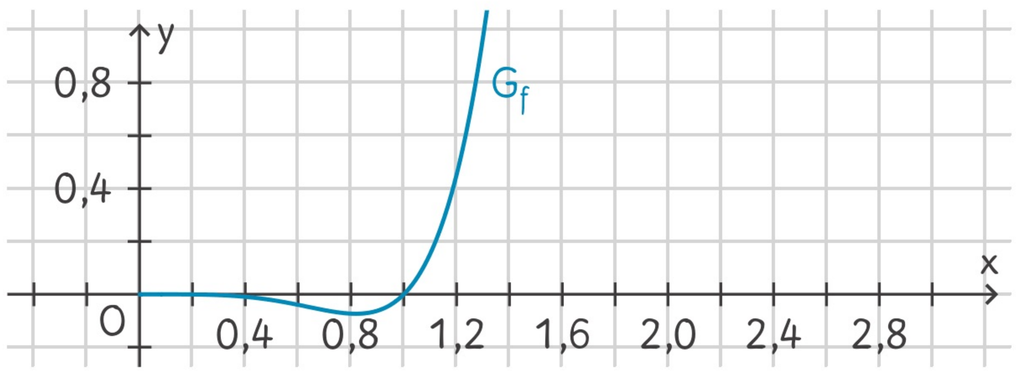
d) $\ln(x^2) = 7 \Leftrightarrow x^2 = e^7 \Leftrightarrow x = e^{\frac{7}{2}}$ oder $x = -e^{\frac{7}{2}}$

e) $\ln(2\sqrt{x}) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = e^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{e^{\frac{1}{3}}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{e^{\frac{2}{3}}}{4}$

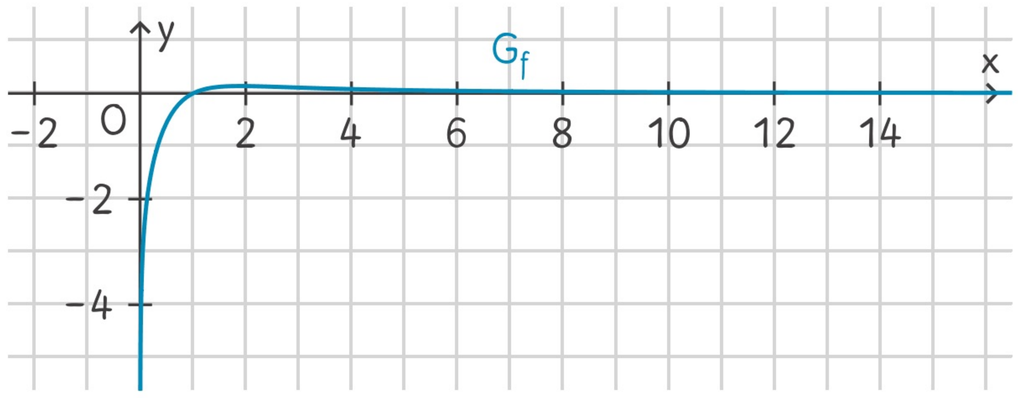
f) $\ln(\frac{x}{5}) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{5} = e \Leftrightarrow x = 5e$

5

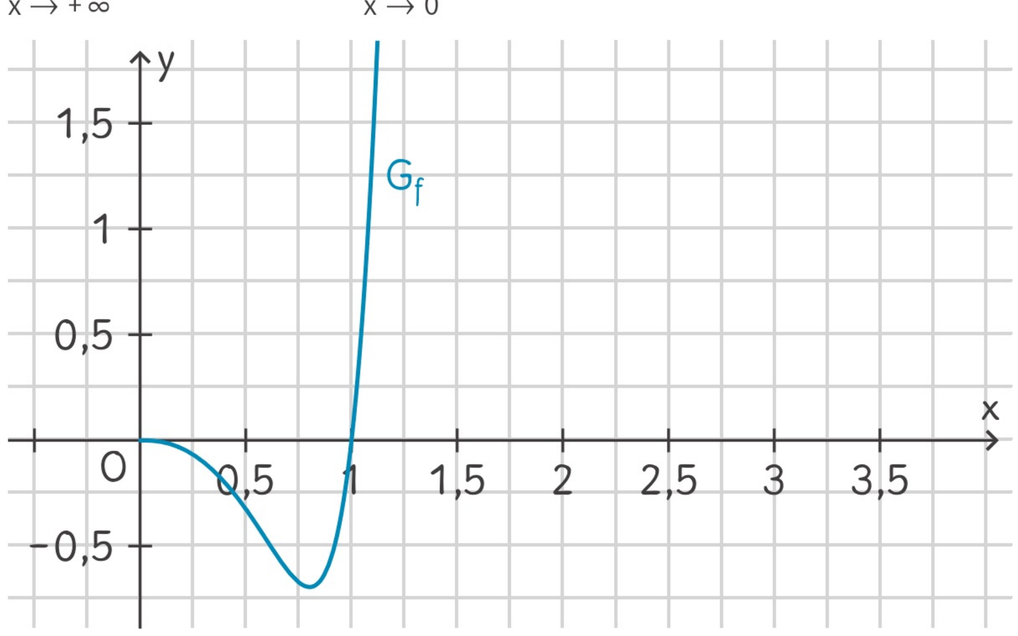
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ (Potenzfunktion dominiert)



b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (Potenzfunktion dominiert) und $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$



c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ (Potenzfunktion dominiert)



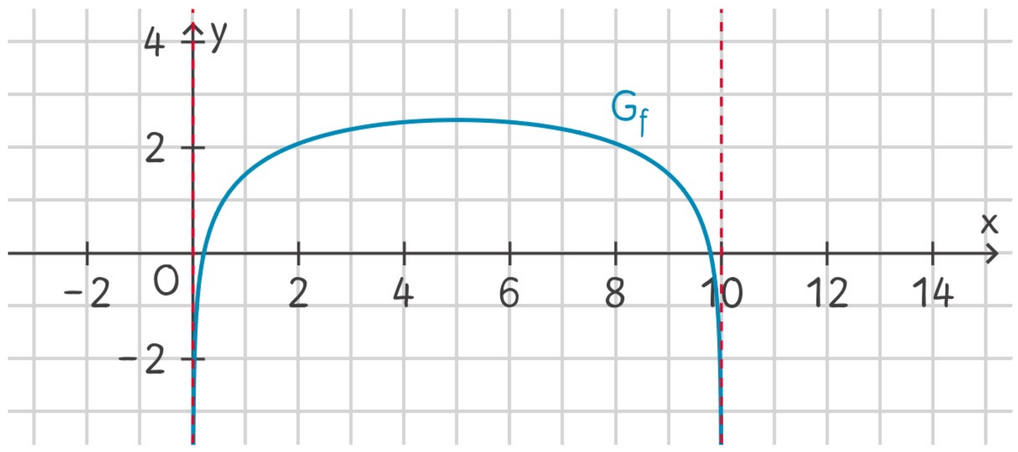
6

a) Maximale Definitionsmenge: $5x - \frac{1}{2}x^2 > 0 \Leftrightarrow x\left(5 - \frac{1}{2}x\right) > 0$
$\Leftrightarrow 0 < x < 10$. Also gilt $D_f =]0; 10[$.
Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 5x - \frac{1}{2}x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 5 + \sqrt{23}$ oder $x = 5 - \sqrt{23}$.

b) Extremstellen: $f'(x) = \frac{5 - x}{5x - \frac{1}{2}x^2}$, also $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$.
Aus $f'(x) > 0$ für $x < 5$ und $f'(x) < 0$ für $x > 5$ folgt, dass an der Stelle $x = 5$ ein lokales Maximum vorliegt.

c) Es gilt $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$. Also ist die Gerade mit der Gleichung $x = 0$ eine senkrechte Asymptote des Graphen von f. Entsprechend erhält man, dass die Gerade mit der Gleichung $x = 10$ eine senkrechte Asymptote des Graphen von f ist.

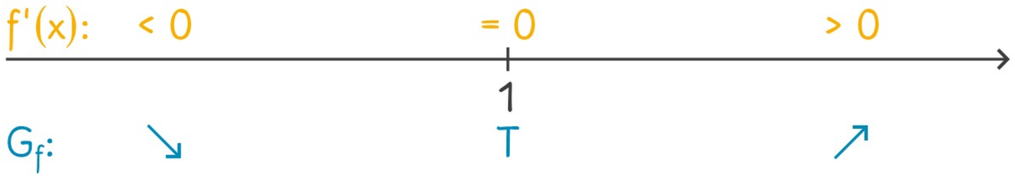
d)



7

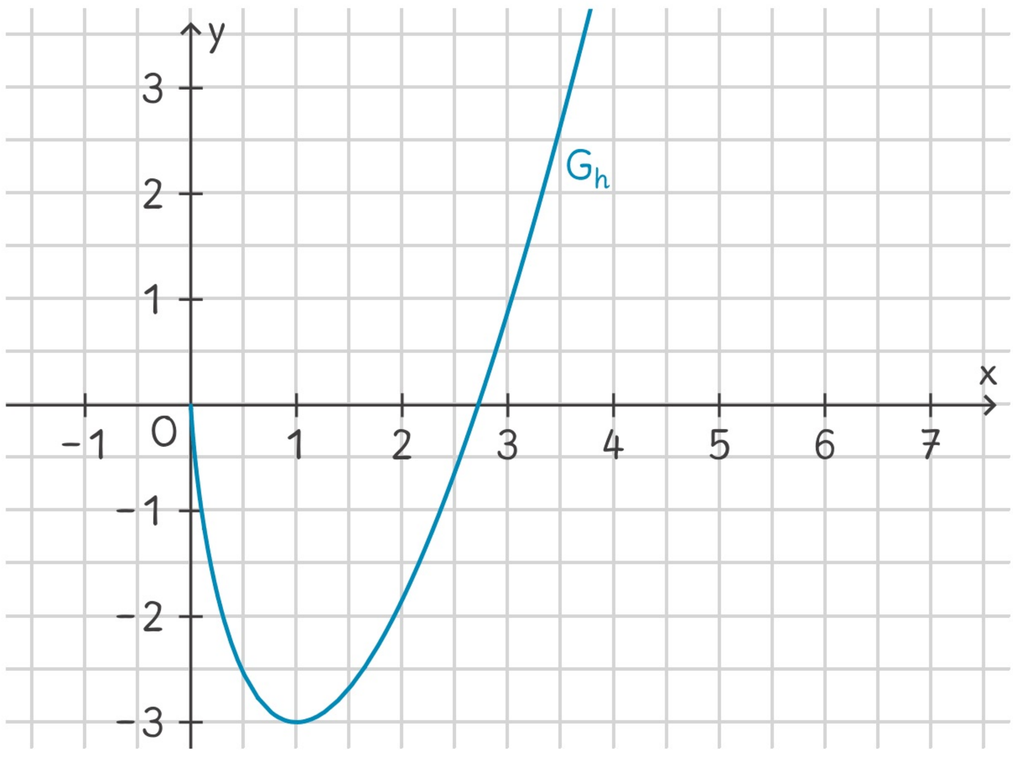
a) $h'(x) = 3(-1 + \ln(x)) + 3x \cdot \frac{1}{x} = 3(-1 + \ln(x)) + 3 = 3\ln(x)$
$h'(e) = 3\ln(e) = 3$
Einsetzen in $y = mx + t$:
$0 = 3e + t \Leftrightarrow t = -3e$
Tangentengleichung: $y = 3x - 3e$.
Größe des Winkels, unter dem die Tangente die x-Achse schneidet:
Aus $\tan\alpha = 3$ erhält man $\alpha \approx 71{,}6°$.

b) Monotonie:



Im Intervall $]0; 1]$ ist G_h streng monoton fallend, im Intervall $[1; +\infty[$ streng monoton steigend.
Es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.
Aufgrund des Monotonieverhaltens hat G_h an der Stelle $x = 1$ einen Tiefpunkt. Es gilt $h(1) = -3$. Zusammen mit dem obigen Grenzwert ergibt sich die Wertemenge $W_h = [-3; +\infty[$.

c) Es gilt $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} h(x) = 0$ und $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} h(x) = -\infty$.

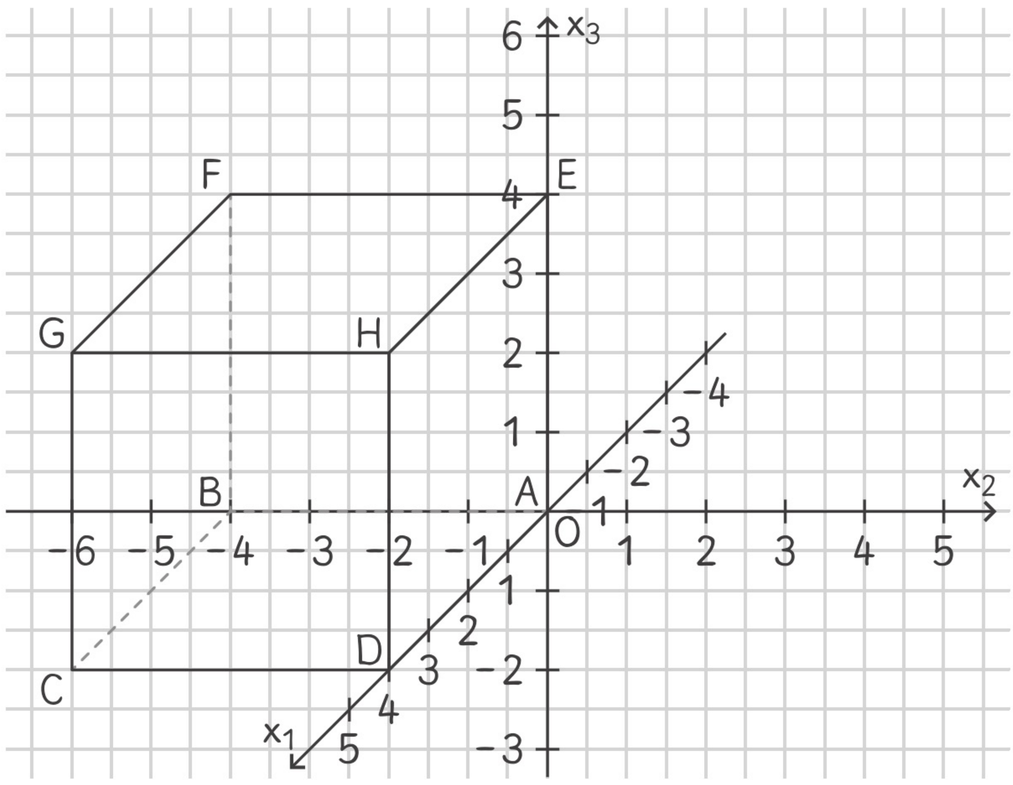


VIII Grundlagen der Koordinatengeometrie im Raum

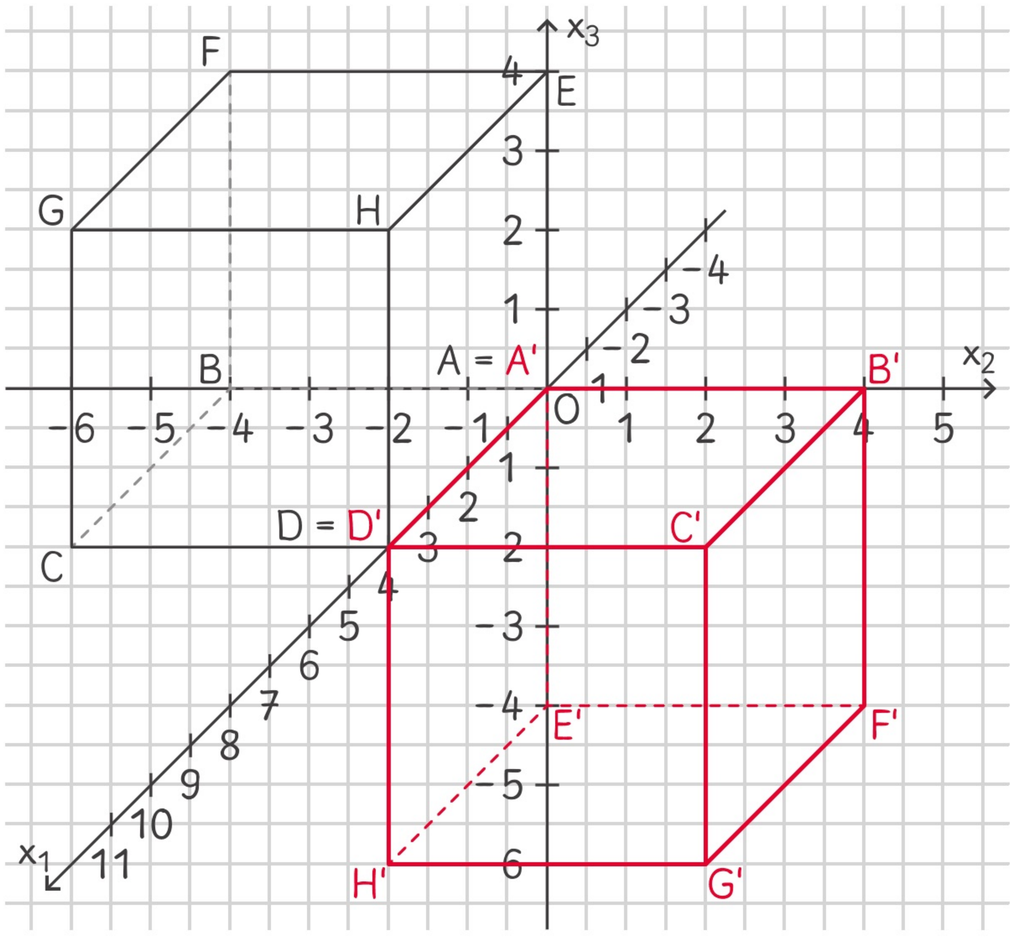
Seite 224

8

a) C(4|−4|0), F(0|−4|4), G(4|−4|4) und H(4|0|4)



b) A′ = A, B′(0|4|0), C′(4|4|0), D′ = D, E′(0|0|−4), F′(0|4|−4), G′(4|4|−4) und H′(4|0|−4)

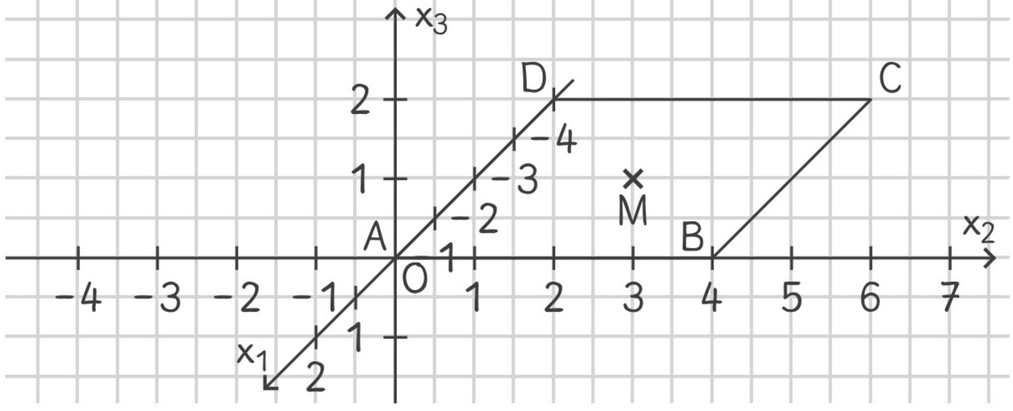


c) Individuelle Lösung.

Seite 225

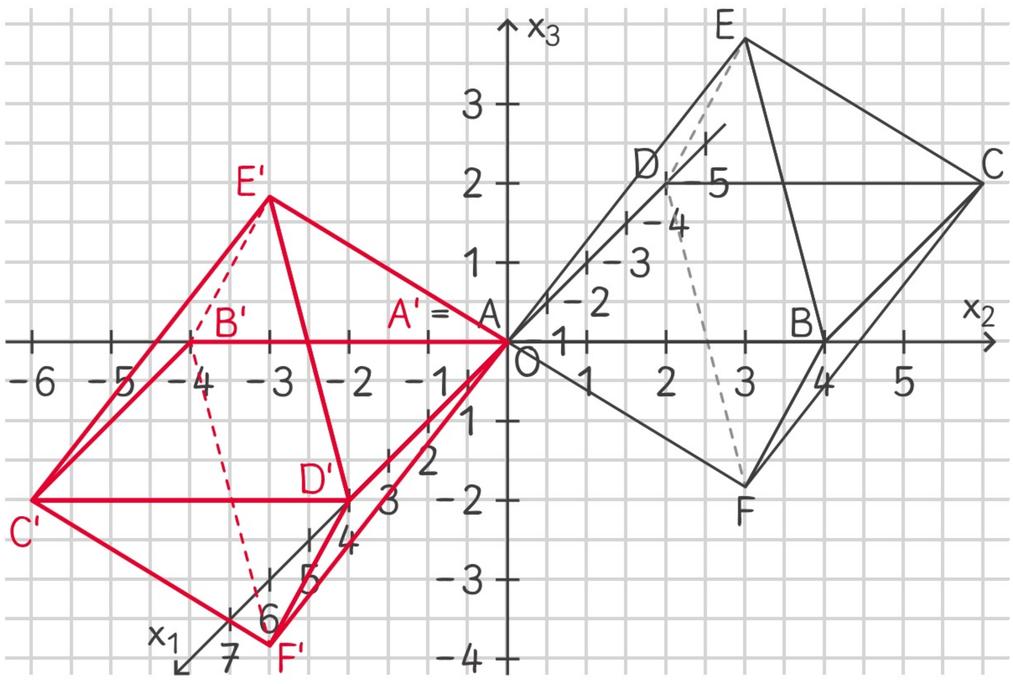
14

a) M(−2|2|0)



b) Es gilt $|\overline{MA}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$. Weiter gilt $|\overline{AB}| = 4$ und $|\overline{AE}| = 4$. Für die Länge h der Höhe des Oktaeders gilt also nach dem Satz von Pythagoras $h = \sqrt{16 - 8} = \sqrt{8}$. Damit erhält man durch Addition von $\sqrt{8}$ in der x_3-Koordinate von M den Punkt $E(-2|2|\sqrt{8})$. Symmetrie liefert $F(-2|2|-\sqrt{8})$.

c)



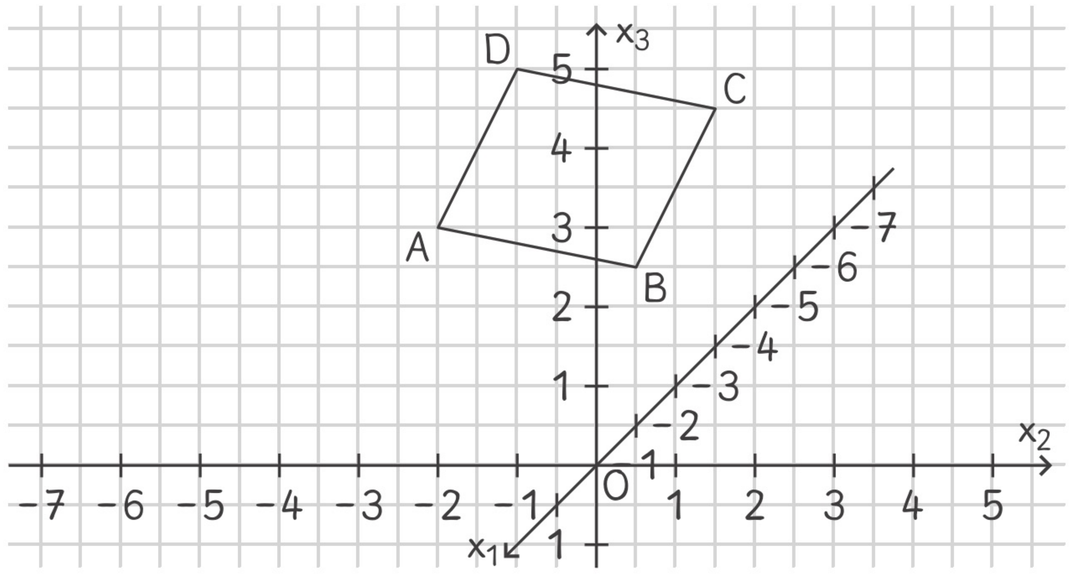
G 17

a) 0,4 · (0,6 · 48 kg) = 0,4 · 28,8 kg = 11,52 kg

b) 0,02 · 0,05 = 0,001 = 0,1%

Seite 228

4



Es gilt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-(-2) \\ 1-(-3) \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 1-(-2) \\ 2-(-2) \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Also sind die gegenüberliegenden Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ parallel und gleich lang. Damit ist ABCD ein Parallelogramm.

Berechnung der Diagonalenlängen:

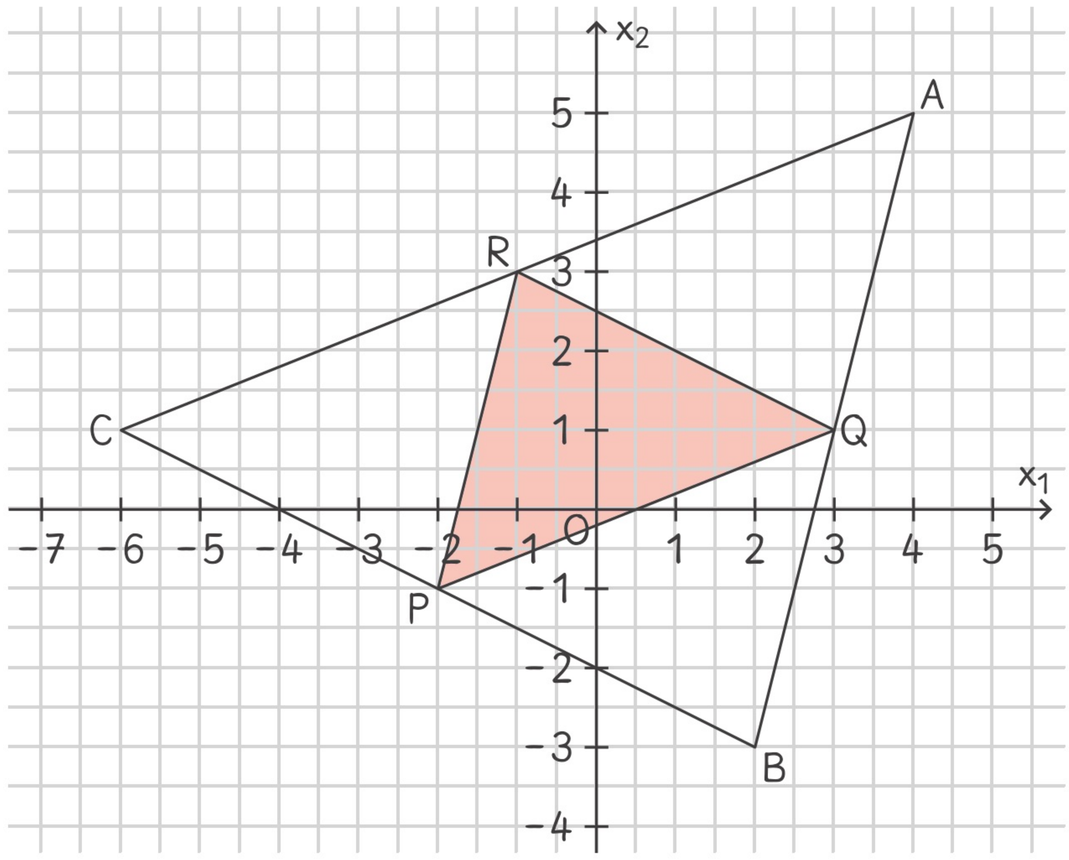
$|\overline{AC}| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{43}$ und $|\overline{BD}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{19}$.

Seite 229

11

Hinweis:

Da die x_3-Koordinaten der Punkte P, Q und R jeweils gleich sind (7), liegt das Dreieck PQR in einer zur x_1x_2-Ebene parallelen Ebene. Daher genügt es, eine zweidimensionale Zeichnung in der x_1x_2-Ebene anzufertigen. Die x_3-Koordinaten der gesuchten Punkte A, B und C sind dann jeweils 7.



Die Skizze zeigt die drei möglichen Ergänzungen zu einem Parallelogramm. Die möglichen vierten Eckpunkte sind A(4|5|7), B(2|−3|7) und C(−6|1|7).

Rechnerische Überprüfung:

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3-(-2) \\ 1-(-1) \\ 7-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{RA} = \begin{pmatrix} 4-(-1) \\ 5-3 \\ 7-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Analog erhält man $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BQ}$ und $\overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{CP}$.

G 13

a) Exponentialgleichung

$2 + 3e^{2x+1} = 8 \iff 3e^{2x+1} = 6 \iff e^{2x+1} = 2$

$\iff 2x + 1 = \ln(2) \iff x = \frac{\ln(2) - 1}{2}$

b) Quadratische Gleichung (nach Umformung; $x \neq 0$)

$\frac{5}{4x^2} - 3 = 3 - \frac{1}{x^2} \iff \frac{5 - 3 \cdot 4x^2}{4x^2} = \frac{3 \cdot 4x^2 - 4}{4x^2} \iff \frac{5 - 12x^2}{4x^2} = \frac{12x^2 - 4}{4x^2}$

$\iff 5 - 12x^2 = 12x^2 - 4 \iff 9 = 24x^2 \iff 3 = 8x^2 \iff x^2 = \frac{3}{8}$

$\iff x = -\sqrt{\frac{3}{8}}$ oder $x = \sqrt{\frac{3}{8}}$

c) Quadratische Gleichung (nach Ausklammern)

$3x^4 + 2x^3 = x^2 \iff 3x^4 + 2x^3 - x^2 = 0 \iff x^2(3x^2 + 2x - 1) = 0$

$\iff x = 0$ oder $3x^2 + 2x - 1 = 0$

Lösen von $3x^2 + 2x - 1 = 0$:

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 4}{6}$, also $x_1 = -1$ und $x_2 = \frac{1}{3}$

Lösungen: $x = -1$, $x = 0$ und $x = \frac{1}{3}$.

d) Wurzelgleichung

$\sqrt{9 + x^2} = 4 \iff 9 + x^2 = 16 \iff x^2 = 7 \iff x = -\sqrt{7}$ oder $x = \sqrt{7}$

Probe:

$\sqrt{9 + (-\sqrt{7})^2} = \sqrt{9 + 7} = \sqrt{16} = 4$ ✓

$\sqrt{9 + (\sqrt{7})^2} = \sqrt{9 + 7} = \sqrt{16} = 4$ ✓

e) Quadratische Gleichung

$8x + 6 = 2x^2 \iff 2x^2 - 8x - 6 = 0$, also

$x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{8 \pm \sqrt{112}}{4} = \frac{8 \pm 4\sqrt{7}}{4} = 2 \pm \sqrt{7}$

$x_1 = 2 - \sqrt{7}$ und $x_2 = 2 + \sqrt{7}$

f) Lineare Gleichung (nach Wurzelziehen)

$(1 - 2t)^4 = 16 \iff 1 - 2t = 2$ oder $1 - 2t = -2$

$\iff -1 = 2t$ oder $3 = 2t \iff t = -\frac{1}{2}$ oder $t = \frac{3}{2}$

g) Quadratische Gleichung (nach Umformung; $x \neq 0$)

$4x - 5x^{-1} = -1 \iff 4x - \frac{5}{x} = -1 \iff 4x^2 - 5 = -x$

$\iff 4x^2 + x - 5 = 0$, also $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 4 \cdot (-5)}}{2 \cdot 4} = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{8} = \frac{-1 \pm 9}{8}$

$x_1 = -\frac{5}{4}$ und $x_2 = 1$

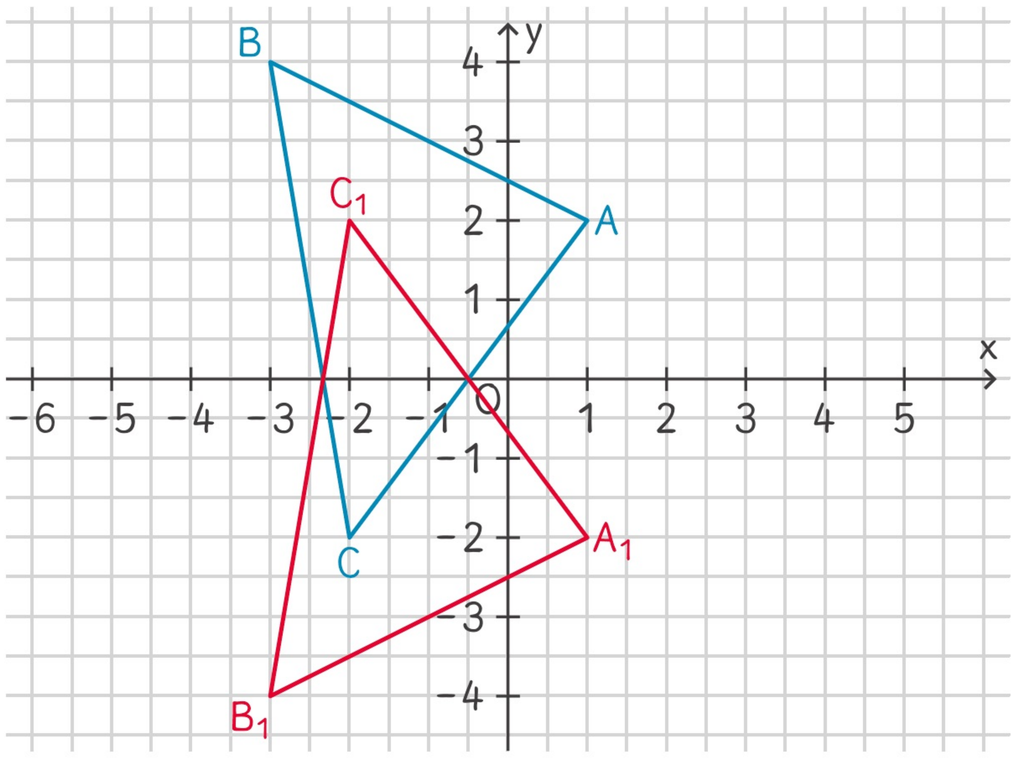
h) Trigonometrische Gleichung

$\sin(2x) + 2 = 3 \iff \sin(2x) = 1 \iff 2x = (4k + 1)\frac{\pi}{2}$

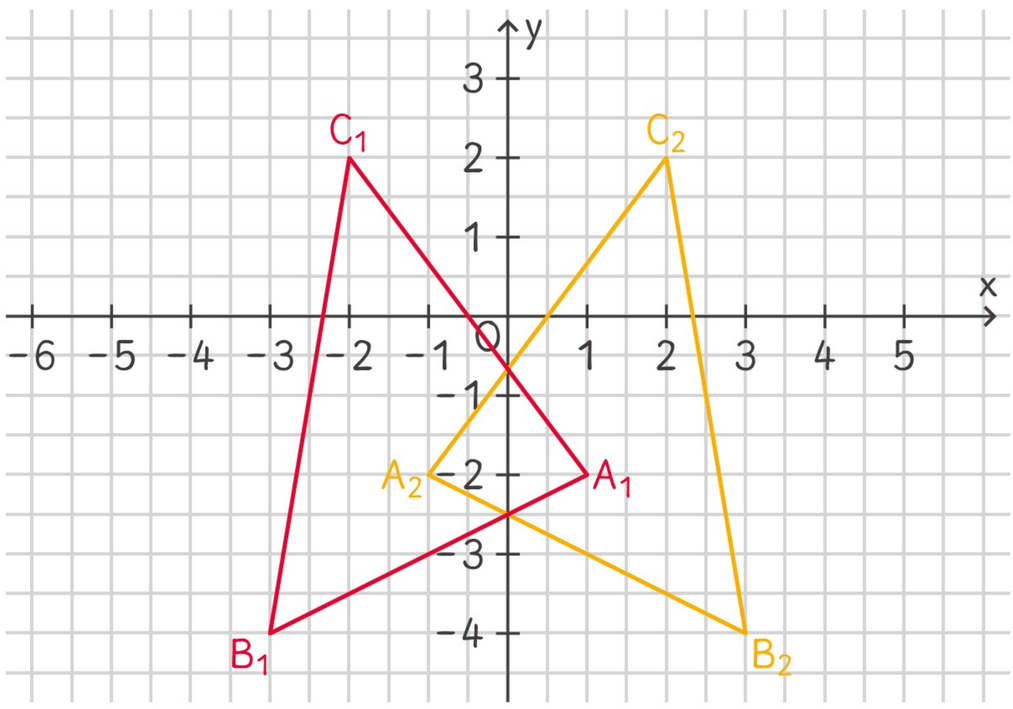
$\iff x = (4k + 1)\frac{\pi}{4}$ mit $k \in \mathbb{Z}$

G 14

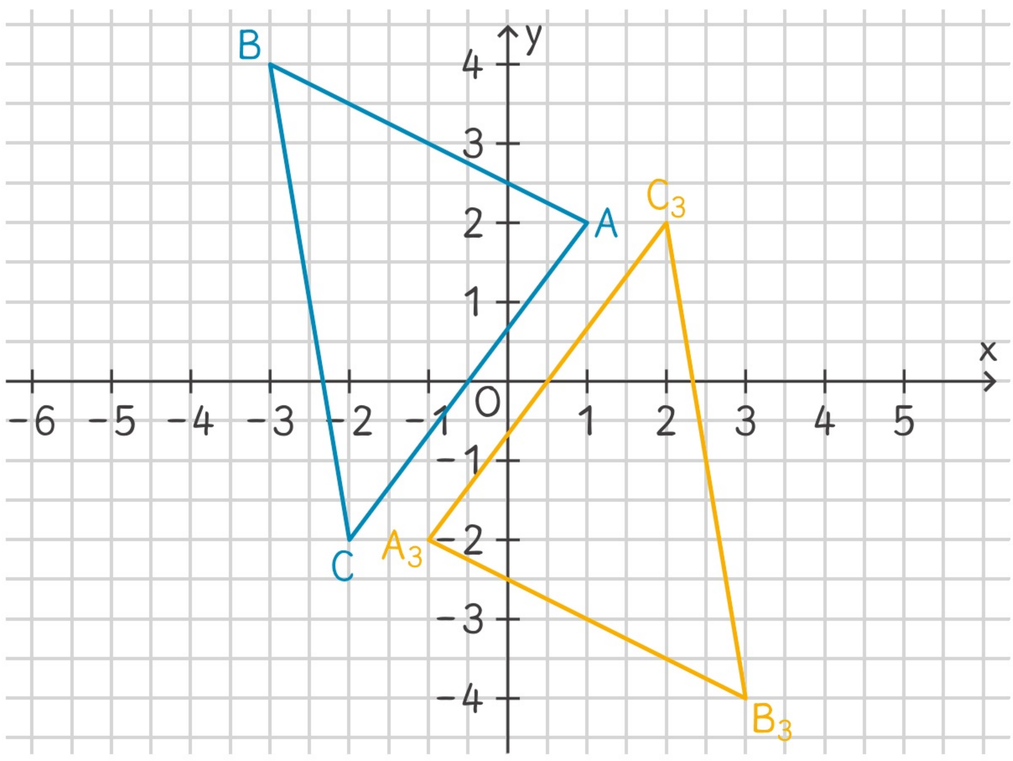
a)



b)



c)



d) Man beobachtet, dass das Dreieck $A_2B_2C_2$ und das Dreieck $A_3B_3C_3$ identisch sind. Die Erklärung liegt an der Gültigkeit des elementar-geometrischen Satzes, nämlich, dass das Bild eines Punktes P bei Spiegelungen an zwei zueinander senkrechten Geraden dasselbe Bild ergibt wie bei der Punktspiegelung an dem Schnittpunkt der beiden Geraden. Kurz: „Doppelspiegelung ist dasselbe wie Punktspiegelung."

Formal: Wenn $g \perp h$, dann gilt für jeden Punkt P der Ebene: $\sigma_g \circ \sigma_h(P) = \sigma_h \circ \sigma_g(P) = \pi_S(P)$ mit $S \in g \cap h$. (Diese Aussage folgt mit dem Satz von Thales.)

Dabei steht σ_g für die Spiegelung an der Geraden g, σ_h für die Spiegelung an der Geraden h und π_S für die Spieglung am Punkt S.

Seite 232

6

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 16 \\ -2 \end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Seite 233

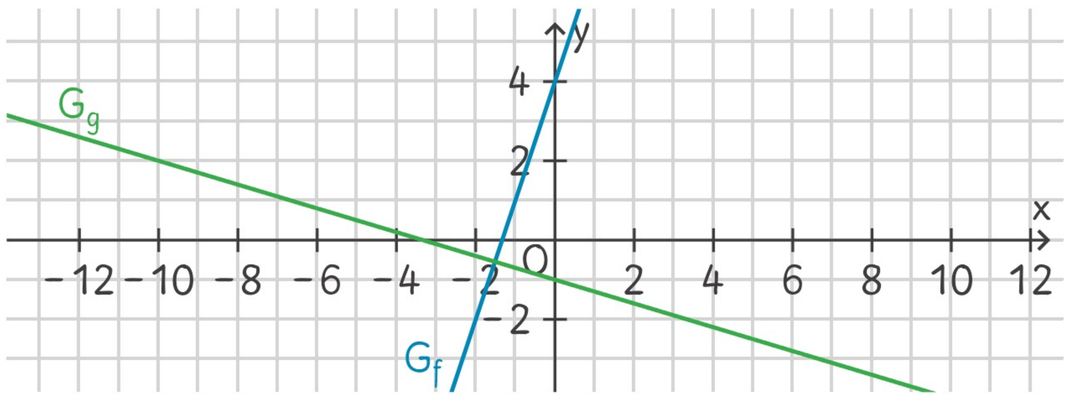
15

a) $\overrightarrow{AG} = \vec{d} + \vec{e} + \vec{b}$ und $\overrightarrow{FD} = \vec{d} - \vec{b} - \vec{e}$.

b) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{FD} = \vec{d} + \vec{e} + \vec{b} + \vec{d} - \vec{b} - \vec{e} = \vec{d} + \vec{d} = 2\vec{d}$.

Anschauliche Erklärung: $\overrightarrow{AG}$ verläuft längs der Raumdiagonalen von links, hinten, unten nach rechts, oben, vorne. $\overrightarrow{FD}$ verläuft längs der Raumdiagonalen von links, vorne, oben nach rechts, hinten, unten. Stellt man sich eine Kopie des Quaders direkt rechts neben den Ausgangsquader gestellt vor und setzt den Vektor $\overrightarrow{FD}$ an die Spitze des Vektors $\overrightarrow{AG}$ an, so läuft man von der linken, unteren, hinteren Ecke des linken Quaders zur rechten, hinteren, unteren Ecke des rechten Quaders. Man kann dorthin einfacher gelangen, wenn man zweimal den Vektor $\vec{d}$ aneinanderfügt.

G 17



$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3x + 4 = -\frac{3}{10}x - 1 \Leftrightarrow \frac{33}{10}x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{50}{33}$

Mit $f\left(-\frac{50}{33}\right) = -\frac{6}{11}$ erhält man den Schnittpunkt $S\left(-\frac{50}{33}\middle|-\frac{6}{11}\right)$.

Es ist $f'(x) = 3$ und $g'(x) = -\frac{3}{10}$, also $f'(x) \neq -\frac{1}{g'(x)}$. Daher sind die beiden Graphen nicht senkrecht zueinander.

Seite 236

5

a) $5 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0{,}4 \\ -\frac{3}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Der Betrag dieses Vektors ist

$\sqrt{1^2 + 2^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{29}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{29}$.

b) $\frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$. Der Betrag dieses Vektors ist $\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 7^2} = \sqrt{53}$.

c) $\frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Der Betrag dieses Vektors ist $\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11}$.

d) $\sqrt{14} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{14} \\ 2 \cdot \sqrt{14} \\ 3 \cdot \sqrt{14} \end{pmatrix}$. Der Betrag dieses Vektors ist

$\sqrt{14} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \cdot \sqrt{14} = 14$.

Seite 237

16

a) Weil S die Strecke $\overline{AM}$ im Verhältnis 2 : 1 teilt, gilt $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. Außerdem gilt $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$, da M der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ ist. Damit folgt

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}\right)$

$= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) - \overrightarrow{OA}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

b) Analog zur Lösung zu Teilaufgabe a) zeigt man, dass für den Punkt S', der die Strecke $\overline{CL}$ im Verhältnis 2 : 1 teilt, der Zusammenhang $\overrightarrow{OS'} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$ gilt. Also gilt $S = S'$ und $\overline{AM}$ und $\overline{CL}$ schneiden sich im Punkt S. Ebenso erfüllt der Punkt S'', der die Strecke $\overline{BN}$ im Verhältnis 2 : 1 teilt, die Gleichung $\overrightarrow{OS''} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$ und stimmt damit ebenfalls mit S überein. Also schneiden sich die drei Seitenhalbierenden im Punkt S und dieser teilt jede davon im Verhältnis 2 : 1.

G 18

a) (II) nach x auflösen: $x = y + \frac{1}{2}$.

In (I) einsetzen: $2y + 1 - 5y = 4 \Leftrightarrow -3y = 3 \Leftrightarrow y = -1$.

Damit erhält man $x = -\frac{1}{2}$.

b) (II) nach x auflösen: $x = r + 2$.

In (I) einsetzen: $r^2 + 4r + 4 = r^2 + 100 \Leftrightarrow 4r = 96 \Leftrightarrow r = 24$.

Damit erhält man $x = 26$.

c) h und a sind beide ungleich null. Division der beiden Gleichungen ergibt $\frac{h}{a} = 6$, also $h = 6a$.

In (I) einsetzen: $\frac{1}{3}a^2 \cdot 6a = 10 \Leftrightarrow 2a^3 = 10 \Leftrightarrow a^3 = 5$

$\Leftrightarrow a = \sqrt[3]{5}$.

Damit erhält man $h = 6\sqrt[3]{5}$.

d) Es gilt a ungleich null. Divison der beiden Gleichungen ergibt $e^{2k-k} = \frac{4e}{4\sqrt{e}}$, also $e^k = \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$. Damit gilt $k = \frac{1}{2}$ und es folgt $a = 4$.

Seite 241

6

a) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{9^2 + (-6)^2 + 0^2} = \sqrt{117}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2 + 8^2 + 0^2} = \sqrt{68}$

und $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-7)^2 + 14^2 + 0^2} = \sqrt{245}$

Weiter gilt $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{9 \cdot 2 + (-6) \cdot 8 + 0 \cdot 0}{\sqrt{117} \cdot \sqrt{68}}$, also $\alpha \approx 109{,}65°$,

und $\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{(-9) \cdot (-7) + 6 \cdot 14 + 0 \cdot 0}{\sqrt{117} \cdot \sqrt{245}}$, also $\beta \approx 29{,}74°$.

Damit folgt $\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 40{,}60°$.

Das Dreieck ist stumpfwinklig.

b) Mit demselben Lösungsweg wie in Teilaufgabe a) erhält man: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 3$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{26} \approx 5{,}1$ sowie $\alpha \approx 116{,}39°$ und $\beta = \gamma \approx 31{,}81°$.

Das Dreieck ist stumpfwinklig und gleichschenklig.

Seite 243

23

a) Es sei ABCD ein Parallelogramm. Man kann dieses so verschieben, dass A der Koordinatenursprung ist. Es reicht also, die Behauptung für den Fall $A = O$ zu zeigen.

Da OBCD ein Parallelogramm ist, gilt $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$. Nun folgt

$\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} \circ \overrightarrow{BD} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right) \circ \left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}\right) = 0$

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{OB} \circ \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \circ \overrightarrow{OD} = 0$

$\Leftrightarrow -\left|\overrightarrow{OB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OD}\right|^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OD}\right|$

Da gegenüberliegende Seiten in einem Parallelogramm stets gleich lang sind, ist die letzte Aussage äquivalent dazu, dass OBCD eine Raute ist. Der Beweis ist damit abgeschlossen.

b) Es sei ABCD ein Parallelogramm. Da gegenüberliegende Seiten in Parallelogrammen stets gleich lang sind, ist ABCD genau dann eine Raute, wenn $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$ gilt. Außerdem haben die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ denselben Mittelpunkt, da ABCD ein Parallelogramm ist. Also sind die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ genau dann zueinander senkrecht, wenn BD die Mittelsenkrechte von $\overline{AC}$ ist. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$ gilt (die Mittelsenkrechte von $\overline{AC}$ ist der geometrische Ort aller Punkte, die von A und C denselben Abstand haben). Der Beweis ist damit abgeschlossen.

G 26

a) $c = \sqrt{(7\,\text{cm})^2 + (3{,}5\,\text{cm})^2} = \frac{7}{2}\sqrt{5}\,\text{cm}$

$\tan\alpha = 2$, also $\alpha \approx 63{,}43°$

$\beta = 90° - \alpha \approx 26{,}57°$

b) $\alpha = 90° - \beta = 53°$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, also $b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot a = \frac{\sin 37°}{\sin 53°} \cdot 48\,\text{cm} \approx 36{,}17\,\text{cm}$

Es folgt $c = \sqrt{(48\,\text{cm})^2 + b^2} \approx 60{,}10\,\text{cm}$.

c) $\beta = 90° - \alpha = 48°$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, also $b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot a = \frac{\sin 48°}{\sin 42°} \cdot 12\,\text{cm} \approx 13{,}33\,\text{cm}$

Es folgt $c = \sqrt{(12\,\text{cm})^2 + b^2} \approx 17{,}93\,\text{cm}$.

d) $\beta = 90° - \alpha = 60°$

Weiter gilt $\sin 30° = \frac{a}{c} = \frac{a}{6\,\text{cm}}$, also $a = 6\,\text{cm} \cdot \sin 30° = 3\,\text{cm}$.

Es folgt $b = \sqrt{(6\,\text{cm})^2 - (3\,\text{cm})^2} = \sqrt{27}\,\text{cm} = 3\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Seite 247

6

Es gilt für den Flächeninhalt G der dreieckigen Grundfläche

$$G = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AB}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -1\cdot 3 - 1\cdot 2 \\ 1\cdot 1 - 2\cdot 3 \\ 2\cdot 2 - (-1)\cdot 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \frac{5}{2}\sqrt{3}.$$

Für das Volumen V der Pyramide gilt

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}|20 - 5| = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}.$$

Es gilt $V = \frac{1}{3}G \cdot h$, also $h = \frac{3V}{G} = \frac{3 \cdot \frac{5}{2}}{\frac{5}{2}\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Seite 248

15

a) Es gilt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AD}$. Gegenüberliegende Seiten sind also parallel und alle vier Seiten sind gleich lang. Somit ist ABCD eine Raute. Aus $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 0$ folgt, dass ABCD ein Quadrat ist.

b) Es gilt $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$, also $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{9 + 36 + 36} = 9$. Der Betrag ist der Flächeninhalt des Quadrats ABCD.

c) Bestimmt man die Terme für $\left|\overline{AS_k}\right|^2$, $\left|\overline{BS_k}\right|^2$, $\left|\overline{CS_k}\right|^2$ und $\left|\overline{DS_k}\right|^2$, so stellt man fest, dass sich stets derselbe Ausdruck ergibt. Also sind die vier Seitenkanten jeweils gleich lang.

Zum Beispiel gilt $\left|\overline{AS_k}\right|^2 = k^2 + \left(\frac{3}{2} + 2k\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 2k\right)^2 = 9k^2 + \frac{18}{4}$.

Es handelt sich also um eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche.

d) Da es sich um eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche handelt, steht $\overrightarrow{MS_k}$ senkrecht auf der Grundfläche. Der Vektor stellt also die Höhe der Pyramide dar.

e) Weg 1:

Es gilt $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ und

$$V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot \left|\overrightarrow{MS_k}\right| = 3\left|\begin{pmatrix} k \\ 2k \\ -2k \end{pmatrix}\right| = 3\sqrt{k^2 + 4k^2 + 4k^2} = 9k.$$

Weg 2:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right) \circ \overrightarrow{AS_k}\right| = \frac{1}{3}\left|\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} k \\ \frac{3}{2} + 2k \\ \frac{3}{2} - 2k \end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{3} \cdot |-3k - 9 - 12k + 9 - 12k| = 9k$$

G 17

Insgesamt gibt es $9 \cdot 8 = 72$ Möglichkeiten, zwei Kugel zu ziehen (mit Reihenfolge ohne Wiederholung der Ziffern). Diese 72 Zahlen (12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 23, …, 98) müssen darauf geprüft werden, ob sie eine Primzahl sind. Dies sind die folgenden 20 Zahlen: 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 und 97.

Die Wahrscheinlichkeit, bei diesem Zufallsexperiment eine Primzahl zu ziehen, beträgt also $\frac{20}{72} = \frac{5}{18}$.

Seite 255

1

Es handelt sich um eine zur x_2-Achse parallele Gerade, die u. a. durch den Punkt $P(2|0|3)$ verläuft.

2

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-6)^2} = \sqrt{46}$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$

c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{22}$

d) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{0 + 9^2 + 2^2} = \sqrt{85}$

3

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} = 3 \cdot \overrightarrow{AD} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$

4

a) Es muss $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}2\\-7\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-5\\1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-6\\5\end{pmatrix}$ gelten, also $D(-3|-6|5)$.

b) Es sei α der Winkel zwischen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$. Die weiteren Innenwinkel seien wie üblich bezeichnet. Dann gilt

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|} = \frac{\begin{pmatrix}3\\8\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\1\\5\end{pmatrix}}{\sqrt{9+64+9}\cdot\sqrt{25+1+25}} = \frac{-15+8-15}{\sqrt{82\cdot 51}} = -\frac{22}{\sqrt{4182}},$$

also $\alpha = \gamma \approx 109{,}89°$. Damit folgt $\beta = \delta = 180° - \alpha \approx 70{,}11°$.

c) Es gilt für den Flächeninhalt F von ABCD:

$$F = |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}| = \left|\begin{pmatrix}3\\8\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-5\\1\\5\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}8\cdot 5-(-3)\cdot 1\\(-3)\cdot(-5)-3\cdot 5\\3\cdot 1-8\cdot(-5)\end{pmatrix}\right|$$
$$= \left|\begin{pmatrix}43\\0\\43\end{pmatrix}\right| = \sqrt{43^2+43^2} = 43\cdot\sqrt{2}.$$

5

a) $D(0|4|-3)$

b) Der Diagonalenschnittpunkt K ist der Mittelpunkt von $\overline{AC}$. Es gilt $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}) = \begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$, also $K\left(\frac{5}{2}\middle|0\middle|0\right)$.

c) Die Dreiecke ABK und BCK sind flächeninhaltsgleich. Für ihren Flächeninhalt F gilt

$$F = \frac{1}{4}\cdot|\overline{AB}|\cdot|\overline{AD}| = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{0^2+8^2+6^2}\cdot\sqrt{(-5)^2+0^2+0^2} = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{100\cdot 25}$$
$$= \frac{1}{4}\cdot 50 = 10{,}25.$$

Bemerkung: Auch die Dreiecke CDK und ADK haben diesen Flächeninhalt.

d) Flächeninhalt F_1 eines allgemeinen Dreiecks ABK:

$$F_1 = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AK}| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\right| = \frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|$$
$$= \frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|.$$

Flächeninhalt F_2 eines allgemeinen Dreiecks BCK:

$$F_2 = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BK}| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})\right| = \frac{1}{4}|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AD}|$$
$$= \frac{1}{4}|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA}| = \frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|.$$

Es gilt also $F_1 = F_2$.

6

Es gilt $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Es folgt $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

7

a) Es gilt

$$V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\circ\overrightarrow{AS}\right| = \frac{1}{6}\left|\left(\begin{pmatrix}7\\-7\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}6\\1\\-1\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}5\\-1\\6\end{pmatrix}\right|$$
$$= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}9\\-5\\49\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}5\\-1\\6\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\cdot 344 = 57\frac{1}{3}.$$

b) Für den Flächeninhalt G der Grundfläche gilt

$$G = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}7\\-7\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}6\\1\\-1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}9\\-5\\49\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{81+25+49^2} \approx 25{,}03.$$

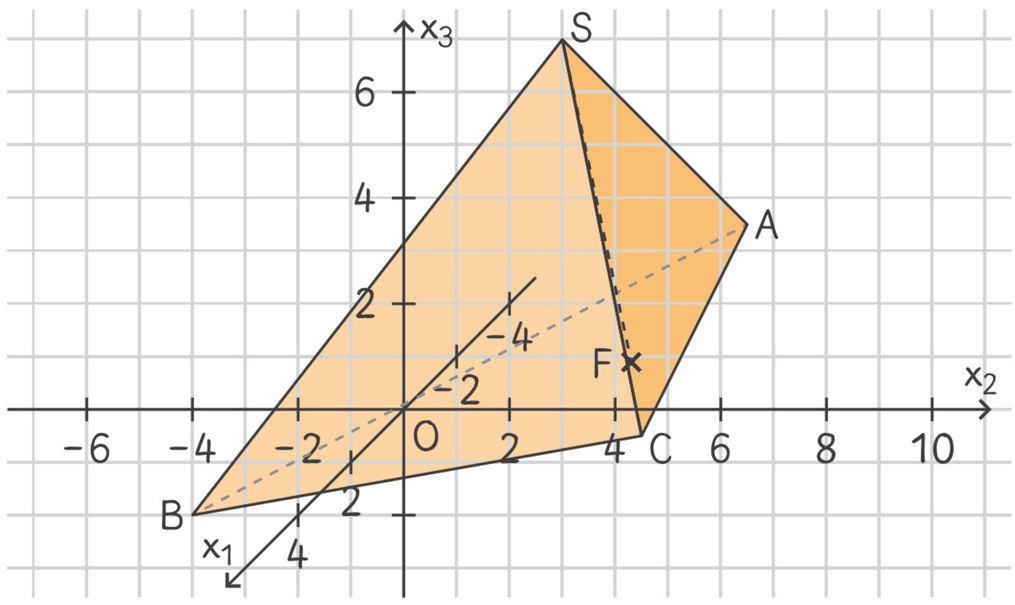
Aus $V = \frac{1}{3}\cdot G\cdot h$ folgt $h = \frac{3V}{G} \approx 6{,}87$.

c) Man bestimmt einen Vektor $\vec{v}$, der senkrecht auf der Grundfläche steht und die Länge h hat, folgendermaßen:

$$\vec{v} = \frac{h}{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}) \approx \frac{6{,}87}{50{,}06}\begin{pmatrix}9\\-5\\49\end{pmatrix}.$$

Es gilt $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OS} - \vec{v} = \begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix} - \vec{v} \approx \begin{pmatrix}0{,}77\\4{,}69\\1{,}28\end{pmatrix}$, also näherungsweise $F(0{,}77|4{,}69|1{,}28)$.

d)



e) Man sieht, dass sich alle Punkte S mit $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}5\\9\\0\end{pmatrix}$, $k\in\mathbb{R}$, auf einer Geraden befinden, die parallel zur Grundfläche der Pyramide verläuft. Also ändert sich die Höhe der Pyramide und damit ihr Volumen nicht.

f) Der in Teilaufgabe e) beschriebene Zusammenhang bedeutet $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\circ\begin{pmatrix}5\\9\\0\end{pmatrix} = 0$, da die Höhe der Pyramide senkrecht zu $\begin{pmatrix}5\\9\\0\end{pmatrix}$ steht.

Check-in

Seite 262

Check-in zu Kapitel I

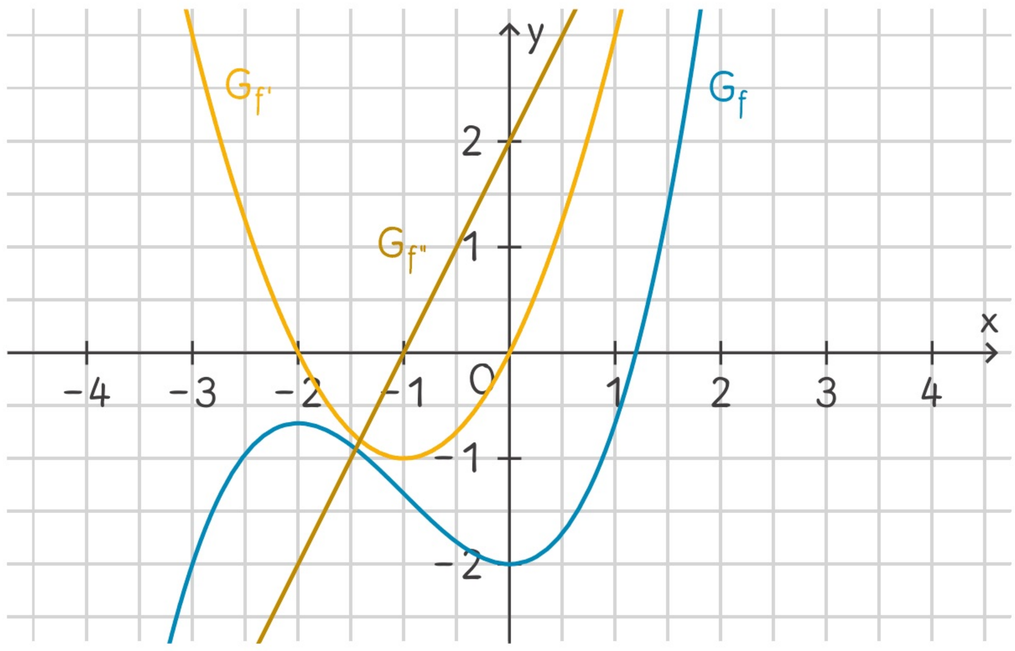
1

$f'(x) = \frac{4}{3}x^3 - 4x;\ f'(3) = \frac{4}{3}\cdot 3^3 - 4\cdot 3 = 4\cdot 9 - 4\cdot 3 = 4\cdot 6 = 24.$

Der Graph von f hat an der Stelle 3 die Steigung 24.

2

a)



b) $f'(x) = x^2 + 2x;\ f''(x) = 2x + 2$

c) Individuelle Lösung.

3

$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x;\ f'(3) = -10{,}5;\ f(3) = -21{,}5$

Einsetzen in die Tangentengleichung $y = mx + t$:

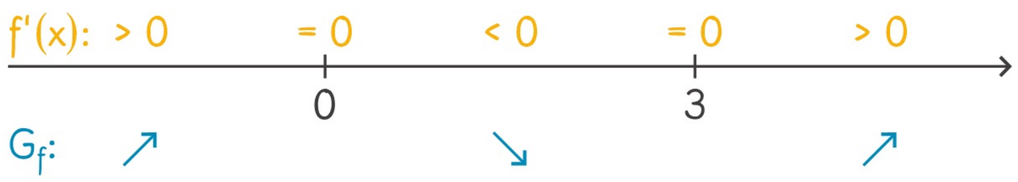
$-21{,}5 = -10{,}5\cdot 3 + t \Leftrightarrow 10.$

Tangentengleichung: $y = -10{,}5x + 10$.

Für den Steigungswinkel α gilt $\tan\alpha = -10{,}5$, also $\alpha \approx -84{,}6°$.

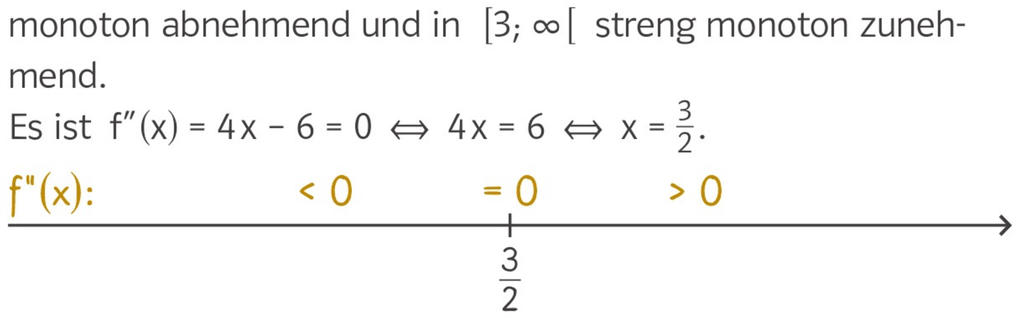
4

a) Es ist $f'(x) = 2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 3$.



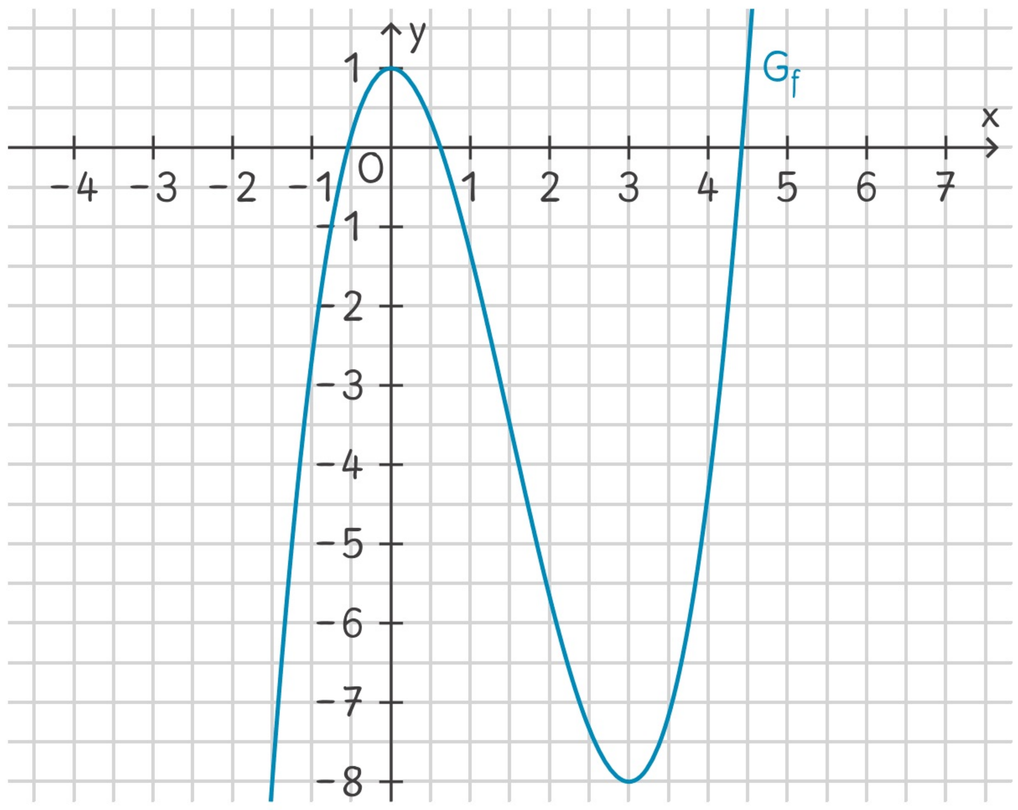
In $]-\infty; 0]$ ist f streng monoton zunehmend, in $[0; 3]$ streng monoton abnehmend und in $[3; \infty[$ streng monoton zunehmend.

Es ist $f''(x) = 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow 4x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.



In $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$ ist G_f rechtsgekrümmt und in $\left[\frac{3}{2}; \infty\right[$ linksgekrümmt.

b)



5

a) $f'(x) = 2x^3 - 7x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(2x - 7) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = \frac{7}{2}$

$f''(x) = 6x^2 - 14x = 2x(3x - 7)$

f' hat an der Stelle $x = 0$ keinen VZW.

$f''\left(\frac{7}{2}\right) = 24{,}5 > 0$, also Minimum.

Es gilt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.

f besitzt weder lokale noch globale Maximumstellen.

f besitzt die lokale und globale Minimumstelle $\frac{7}{2}$.

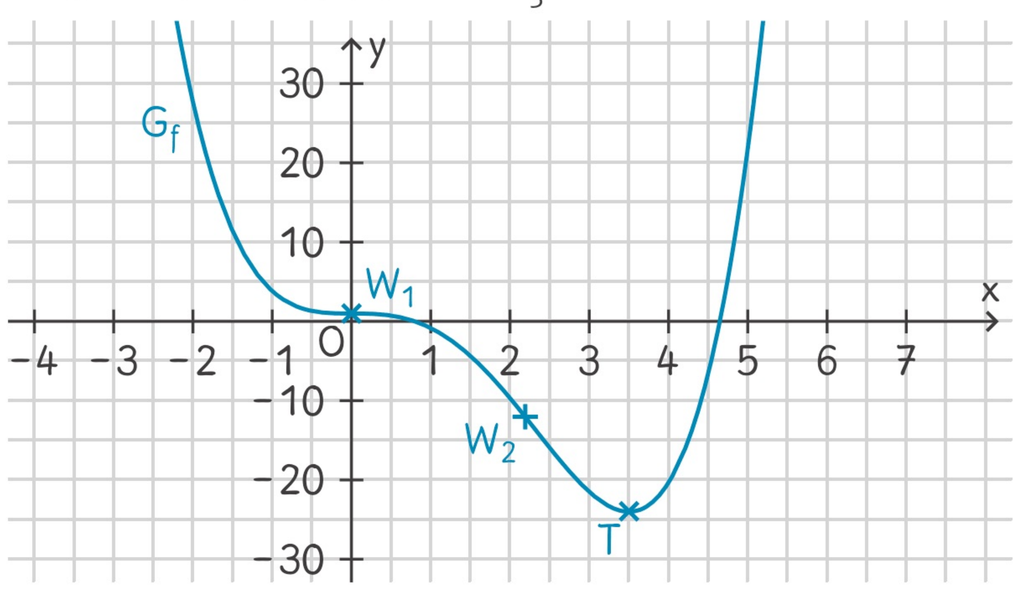
b) $f''(x) = 6x^2 - 14x = 0 \Leftrightarrow 2x(3x - 7) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = \frac{7}{3}$

$f'''(x) = 12x - 14$

$f'''(0) = -14 \neq 0$ und $f'''\left(\frac{7}{3}\right) = 14 \neq 0$

f besitzt die Wendestellen 0 und $\frac{7}{3}$.

c)



Seite 263

Check-in zu Kapitel II

1

a) $f'(x) = (6x - 5) \cdot \cos(x) - (3x^2 - 5x + 2) \cdot \sin(x)$

b) $f'(x) = 6 \cdot \left(x^5 - \frac{1}{2}x^4\right)^{20} \cdot (5x^4 - 2x^3)$

c) $f'(x) = \sin(x^2) + 2x^2 \cdot \cos(x^2)$

d) $f'(x) = 4 \cdot (3x + 2)^3 \cdot 3 \cdot (2x^2 - 1)^6 + (3x + 2)^4 \cdot 6 \cdot (2x^2 - 1)^5 \cdot 4x$

$= 12 \cdot (3x + 2)^3 \cdot (2x^2 - 1)^5 \cdot ((2x^2 - 1) + 2x \cdot (3x + 2))$

$= 12 \cdot (3x + 2)^3 \cdot (2x^2 - 1)^5 \cdot (8x^2 + 4x - 1)$

2

Symmetrie:

Da $f(-x) = \frac{1}{4}((-x)^3 - 2(-x)^2 - 8(-x)) = \frac{1}{4}(-x^3 - 2x^2 + 8x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ gilt, ist G_f weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.

Nullstellen:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(x^3 - 2x^2 - 8x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 2x - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 4$ oder $x = -2$

Extrempunkte:

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{7} \approx 2{,}4$ oder $x = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{7} \approx -1{,}1$

f' wechselt das Vorzeichen bei $x = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{7}$ von − nach +, d.h., G_f hat einen Tiefpunkt bei etwa $(2{,}4 \mid -4{,}2)$.

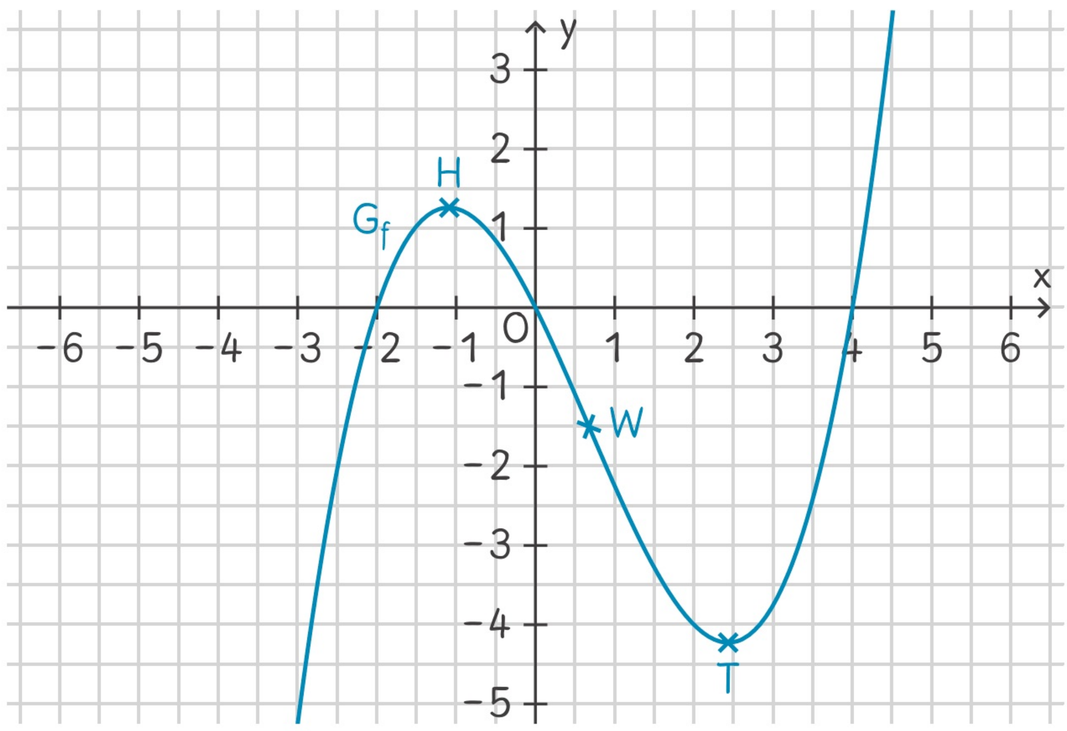
f' wechselt das Vorzeichen bei $x = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{7}$ von + nach −, d.h., G_f hat einen Hochpunkt bei etwa $(-1{,}1 \mid 1{,}3)$.

Wendepunkte:

$f''(x) = \frac{3}{2}x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

f'' wechselt das Vorzeichen bei $x = \frac{2}{3}$, d.h., G_f hat einen Wendepunkt bei $\left(\frac{2}{3} \middle| -1\frac{13}{27}\right) \approx (0{,}7 \mid -1{,}5)$.

Graph:



3

a) Zählergrad < Nennergrad, d.h. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x + 3}{1 - 4x^2} = 0$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5x + 3}{1 - 4x^2} = 0$.

b) Zählergrad = Nennergrad, d.h. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{12 - 9x - 1{,}5x^2}{-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 19} = \frac{-1{,}5}{-\frac{1}{2}} = 3$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{12 - 9x - 1{,}5x^2}{-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 19} = \frac{-1{,}5}{-\frac{1}{2}} = 3$.

c) Zählergrad > Nennergrad, d.h.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-x \cdot (0{,}5x + 1)}{4 - 3x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x \cdot (0{,}5x + 1)}{-x \cdot \left(3 - \frac{4}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{0{,}5x + 1}{3 - \frac{4}{x}} = +\infty \text{ und}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-x \cdot (0{,}5x + 1)}{4 - 3x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{0{,}5x + 1}{3 - \frac{4}{x}} = -\infty.$$

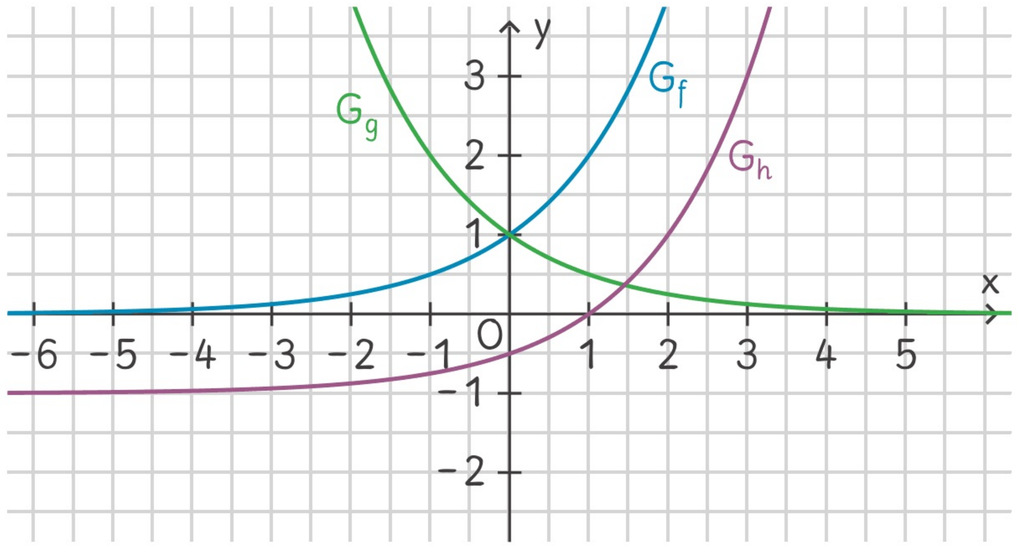
d) Zählergrad = Nennergrad, d.h.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(3 - \frac{(2x - 1)^2}{2x^2 + 1}\right) = 3 - \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2 + 1} = 3 - \frac{4}{2} = 1 \text{ und}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(3 - \frac{(2x - 1)^2}{2x^2 + 1}\right) = 3 - \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2 + 1} = 3 - \frac{4}{2} = 1.$$

4

a)



G_g geht durch Spiegeln von G_f an der y-Achse hervor.
G_h geht durch Strecken von G_f in y-Richtung mit dem Faktor 0,5 und anschließende Verschiebung um −1 in y-Richtung, also um 1 nach unten hervor. Dem Strecken mit dem Faktor 0,5 entspricht ein Verschieben um 1 in x-Richtung, also um 1 nach rechts, da $0{,}5 \cdot 2^x = 2^{-1} \cdot 2^x = 2^{x-1}$ gilt.

b) Verhalten von f:
Da die Basis der Exponentialfunktion größer als 1 ist, gilt $\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$ und $\lim_{x \to -\infty} 2^x = 0$.
Verhalten von g:
Aus Teilaufgabe a) folgt $\lim_{x \to +\infty} 2^{-x} = 0$ und $\lim_{x \to -\infty} 2^{-x} = +\infty$.
Verhalten von h:
Aus Teilaufgabe a) folgt $\lim_{x \to +\infty} (0{,}5 \cdot 2^x - 1) = +\infty$ und $\lim_{x \to -\infty} (0{,}5 \cdot 2^x - 1) = -1$.

c) Die Funktionen f und h sind streng monoton zunehmend, die Funktion g ist streng monoton abnehmend.
$W_f = \mathbb{R}^+$, $W_g = \mathbb{R}^+$ und $W_h =]-1; +\infty[$.
G_f und G_g schneiden die y-Achse in $(0\,|\,1)$, G_h schneidet die y-Achse in $(0\,|\,-0{,}5)$.

5

a) $3 \cdot 0{,}9^x - 2 = 0 \Leftrightarrow 0{,}9^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \log_{0{,}9}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 3{,}85$

b) $2^{3x-1} = 20 \Leftrightarrow 3x - 1 = \log_2(20) \Leftrightarrow x = \frac{\log_2(20) + 1}{3} \approx 1{,}77$

c) $1{,}2^x = 1{,}2^{2+x} - 1 \Leftrightarrow 1{,}2^{2+x} - 1{,}2^x = 1 \Leftrightarrow 1{,}2^x \cdot (1{,}2^2 - 1) = 1$
$\Leftrightarrow 1{,}2^x = \frac{25}{11} \Leftrightarrow x = \log_{1{,}2}\left(\frac{25}{11}\right) \approx 4{,}50$

d) $5^x = 3^{2x+1} \Leftrightarrow 5^x = 3^{2x} \cdot 3 \Leftrightarrow 5^x = 9^x \cdot 3 \Leftrightarrow \frac{5^x}{9^x} = 3 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{9}\right)^x = 3$
$\Leftrightarrow x = \log_{\frac{5}{9}}(3) \approx -1{,}87$

6

a) Es gilt $b \cdot a^1 = 15{,}3$ (I) und $b \cdot a^3 = 4{,}4$ (II).
(II) : (I) ergibt $a^2 = \frac{4{,}4}{15{,}3}$, d.h. $a = \sqrt{\frac{44}{153}} \approx 0{,}536$.
a in (I) eingesetzt ergibt $b = \frac{15{,}3}{a} = \frac{15{,}3}{\sqrt{\frac{44}{153}}} \approx 28{,}53$.
Damit ergibt sich näherungsweise $t \mapsto 28{,}53 \cdot 0{,}536^t$.

b) $28{,}53 \cdot 0{,}536^t = 0{,}001 \cdot 28{,}53 \Leftrightarrow t = \log_{0{,}536}(0{,}001) \approx 11{,}1$
Das Antibiotikum sollte spätestens nach ca. 11,1 Stunden erneut verabreicht werden.

Seite 264

Check-in zu Kapitel III

1

Anzahl der Möglichkeiten insgesamt: $9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 9! = 362\,880$.

a) Anzahl der günstigen Möglichkeiten: $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6! = 3! \cdot 6! = 4320$.
Wahrscheinlichkeit: $p = \frac{4320}{362\,880} = \frac{1}{84}$.

b) Anzahl der günstigen Möglichkeiten: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6! = 86\,400$.
Wahrscheinlichkeit: $p = \frac{86\,400}{362\,880} = \frac{5}{21}$.

2

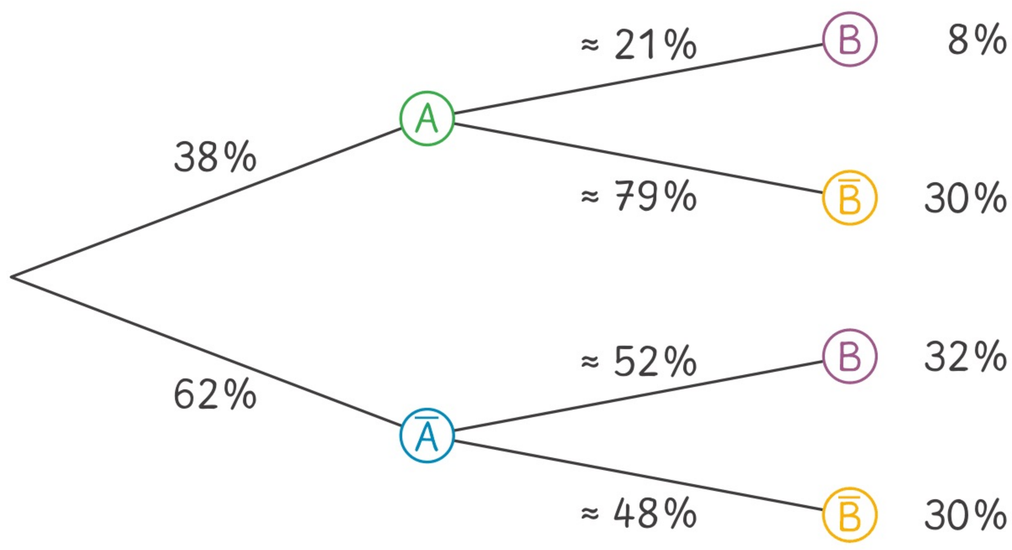
a) 30 % ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis A eintritt und gleichzeitig das Ereignis B nicht eintritt.

b)

	B	$\overline{B}$	
A	**8 %**	30 %	**38 %**
$\overline{A}$	32 %	**30 %**	**62 %**
	40 %	60 %	100 %

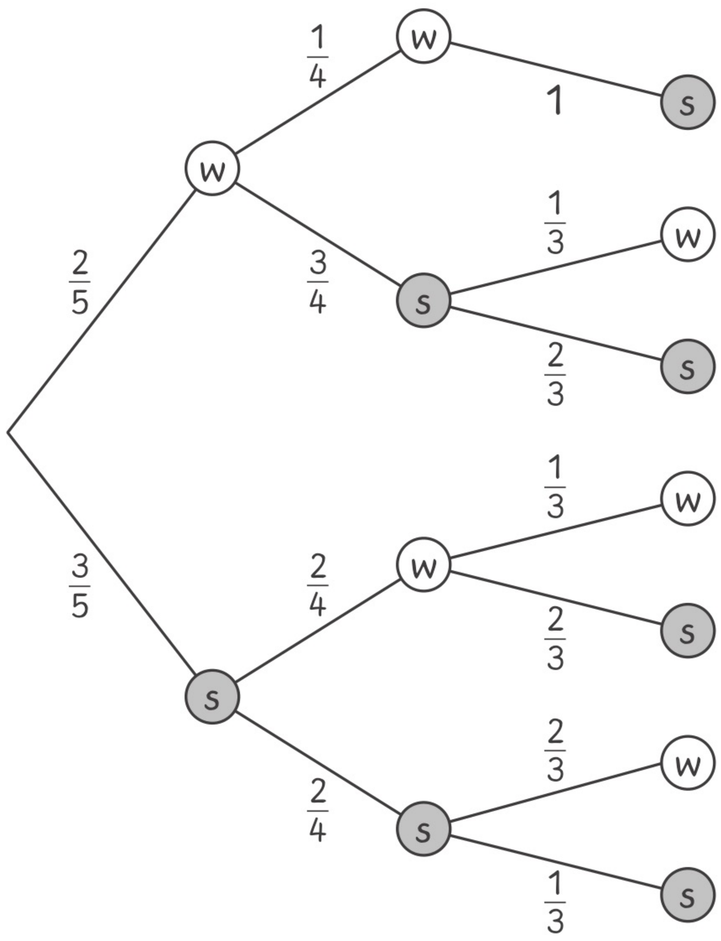
c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 38\,\% + 40\,\% - 8\,\% = 70\,\%$

d)



3

a)



$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{6}{60}$

$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{60}$

$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{60}$

$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{60}$

$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{60}$

$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{60}$

$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{60}$

b) (1) P(„Genau zwei schwarze Kugeln.“)

$= P(wss) + P(sws) + P(ssw) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$

(2) („Mindestens eine weiße Kugel.“)

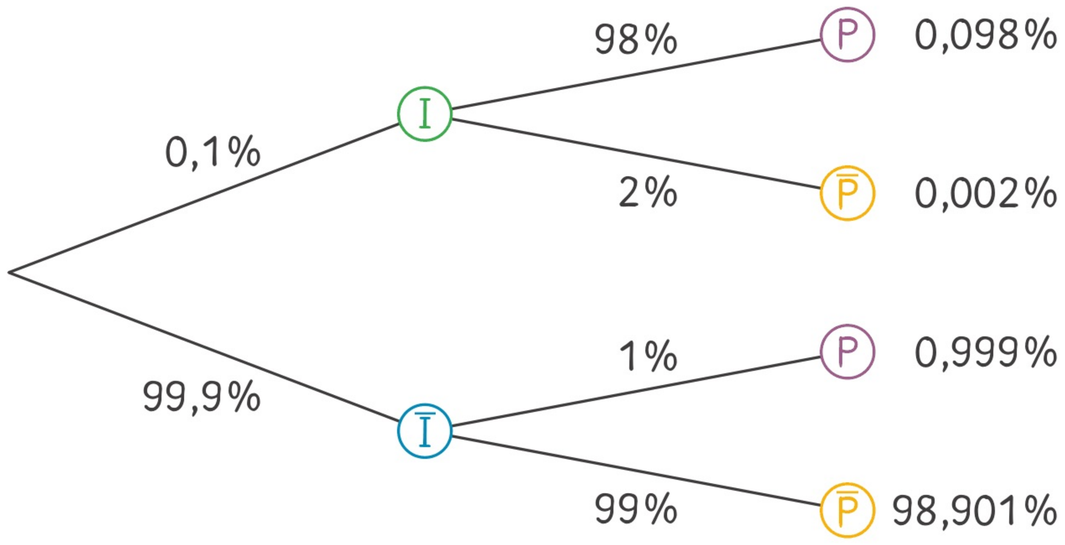
$= 1 - P(\text{„Keine weiße Kugel.“}) = 1 - P(sss) = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{54}{60}$

$= \frac{9}{10}$

4

I: „Eine Person ist mit dem Virus infiziert.“

P: „Der Test fällt positiv aus.“



$P_P(I) = \frac{P(I \cap P)}{P(I \cap P) + P(\bar{I} \cap P)} = \frac{0{,}000\,98}{0{,}000\,98 + 0{,}009\,99} = \frac{0{,}001 \cdot 0{,}98}{0{,}001 \cdot 0{,}98 + 0{,}999 \cdot 0{,}01} \approx 9\,\%$

5

Wenn A und B stochastisch unabhängig sind, dann sind es auch $\overline{A}$ und B. Damit gilt $P(B \cap \overline{A}) = P(B) \cdot P(\overline{A}) = 0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}1$. Damit ergeben sich die restlichen Werte.

	A	$\overline{A}$	
B	**0,3**	**0,1**	0,4
$\overline{B}$	**0,45**	**0,15**	**0,6**
	0,75	0,25	1

Seite 265

Check-in zu Kapitel IV

1

a) Sofern p = 0,07 für alle Teile gleich ist, lässt sich das Zufallsexperiment als Bernoulli-Kette modellieren.
Zufallsgröße X: „Anzahl der Teile, die nicht in Ordnung sind“, Länge n = 25, Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,07.

b) Da jedes Würfeln unabhängig vom vorherigen ist, lässt sich das Zufallsexperiment als Bernoulli-Kette modellieren. Zufallsgröße X: „Anzahl der gewürfelten Pasche“, Länge n = 14, Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

c) Da die Wahrscheinlichkeit, dass Achmed eine Mathematikaufgabe richtig bearbeitet, nicht für alle Aufgaben gleich ist, lässt sich das Zufallsexperiment nicht als Bernoulli-Kette modellieren.

d) Da das Ziehen eines Loses aus der Lostrommel nicht unabhängig vom vorherigen Ziehen ist, lässt sich das Zufallsexperiment nicht als Bernoulli-Kette modellieren.

e) Da es keine Trefferwahrscheinlichkeit gibt, lässt sich das Zufallsexperiment nicht als Bernoulli-Kette modellieren.

2

a) Zufallsgröße X: „Anzahl, wie oft der blaue Sektor getroffen wird.“
Zufallsgröße Y: „Anzahl, wie oft der gelbe Sektor getroffen wird.“

$P(A) = P^{20}_{\frac{1}{3}}(X = 7) + P^{20}_{\frac{1}{3}}(X = 8)$

$= \binom{20}{7} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{13} + \binom{20}{8} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{12} = 0{,}330\,10\ldots$

$\approx 33{,}0\,\%$

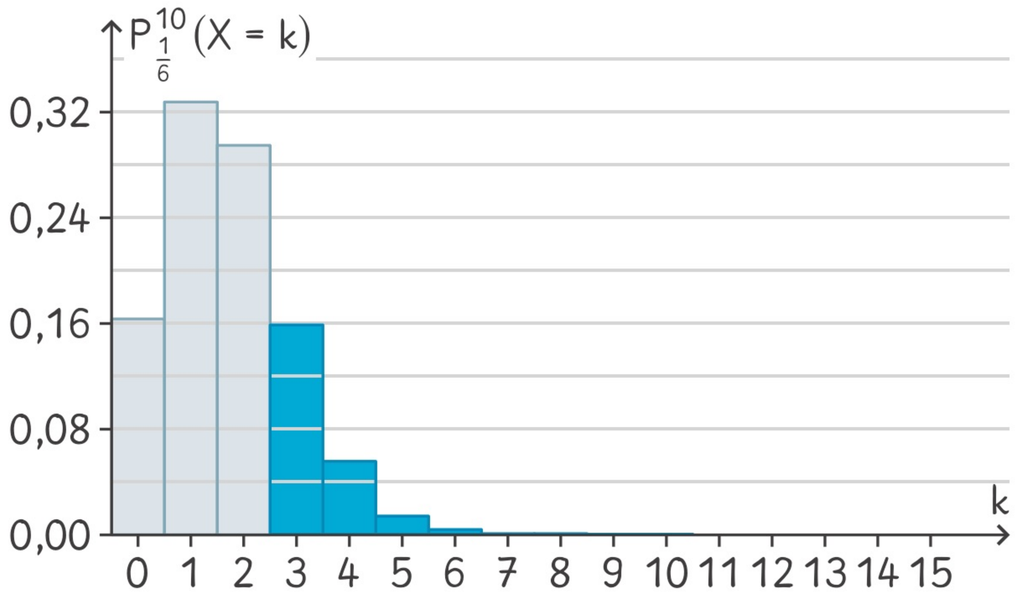
$P(B) = P^{20}_{1}(Y > 10) = 1 - P^{20}_{1}(Y \leq 10)$

$= 1 - \sum_{k=0}^{10} \binom{20}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20-k} = 0{,}411\,90\ldots \approx 41{,}2\,\%$

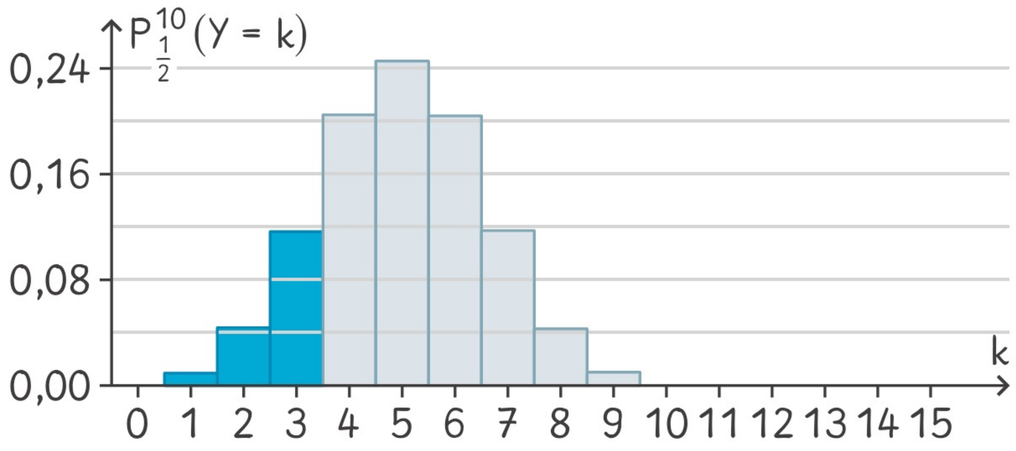
b) Mögliches Ereignis: „Es erscheint bei 80-maligem Drehen höchstens 15-mal Rot.“

3

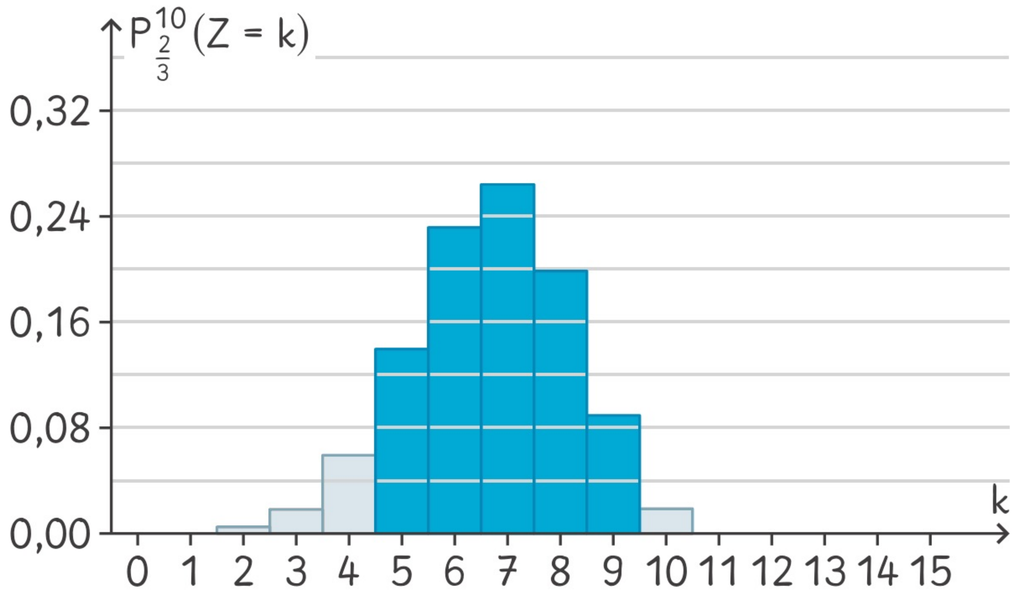
a) und **c)** Histogramm zu X:



Histogramm zu Y:



Histogramm zu Z:



b) Mit wachsendem p verschieben sich die Histogramme nach rechts. Dabei nehmen die Maximalwerte bis $p = \frac{1}{2}$ ab und danach wieder zu.

c) vgl. Histogramm in Teilaufgabe a)

4

a) Die Zufallsgröße X ist nach $B(162;\, 0{,}76)$ verteilt.
Erwartungswert: $\mu = E(X) = 162 \cdot 0{,}76 = 123{,}12$.
Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{162 \cdot 0{,}76 \cdot 024} \approx 5{,}44$.

b) $\mu - \sigma \approx 117{,}7$; $\mu + \sigma \approx 128{,}6$

$$P_{0,76}^{162}(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) = P_{0,76}^{162}(117{,}7 \le X \le 128{,}6)$$
$$= P_{0,76}^{162}(118 \le X \le 128)$$
$$= P_{0,76}^{162}(X \le 128) - P_{0,76}^{162}(X \le 117)$$
$$\approx 0{,}838\,84 - 0{,}150\,74 \approx 68{,}8\,\%$$

Seite 266

Check-in zu Kapitel V

1

a) (1) Zunächst wird das Nennerpolynom durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen vereinfacht. Anschließend wird über die Leitkoeffizienten des Zähler- und Nennerpolynoms der Grenzwert angegeben, da der Grad des Zähler- mit dem des Nennerpolynoms übereinstimmt.

(2) Zunächst wird das Nennerpolynom durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen vereinfacht. Anschließend wird im Zähler und im Nenner die höchste Potenz von x des Nenners ausgeklammert, sodass mit dieser Potenz gekürzt werden kann. Da x gegen unendlich strebt, sind nur noch die Konstanten für den Grenzwert relevant und der Grenzwert kann mithilfe dieser Konstanten angegeben werden.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4}{(-x-2)x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4}{\underbrace{-x^2 - 2x}_{\to -\infty}} = 0^-$ $(z < n)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\overbrace{2x^2 - 4}^{\to +\infty}}{\underbrace{5x}_{\to -\infty}} = -\infty$ $(z > n)$

2

a) Polstelle: $x = -2$ (mit VZW).

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{x-1}{x+2} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \left(\underbrace{\frac{1}{\underbrace{x+2}_{\to 0^-}}}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{(x-1)}_{\to -3} \right) = +\infty$$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \frac{x-1}{x+2} = -\infty$ (da $x = -2$ Polstelle mit VZW)

b) Polstelle: $x = 4$ (ohne VZW).

$$\lim_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} \frac{x}{(x-4)^2} = \lim_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} \left(\underbrace{\frac{1}{\underbrace{(x-4)^2}_{\to 0^+}}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{x}_{\to 4} \right) = +\infty$$

$\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} \frac{x}{(x-4)^2} = +\infty$ (da $x = 4$ Polstelle ohne VZW)

3

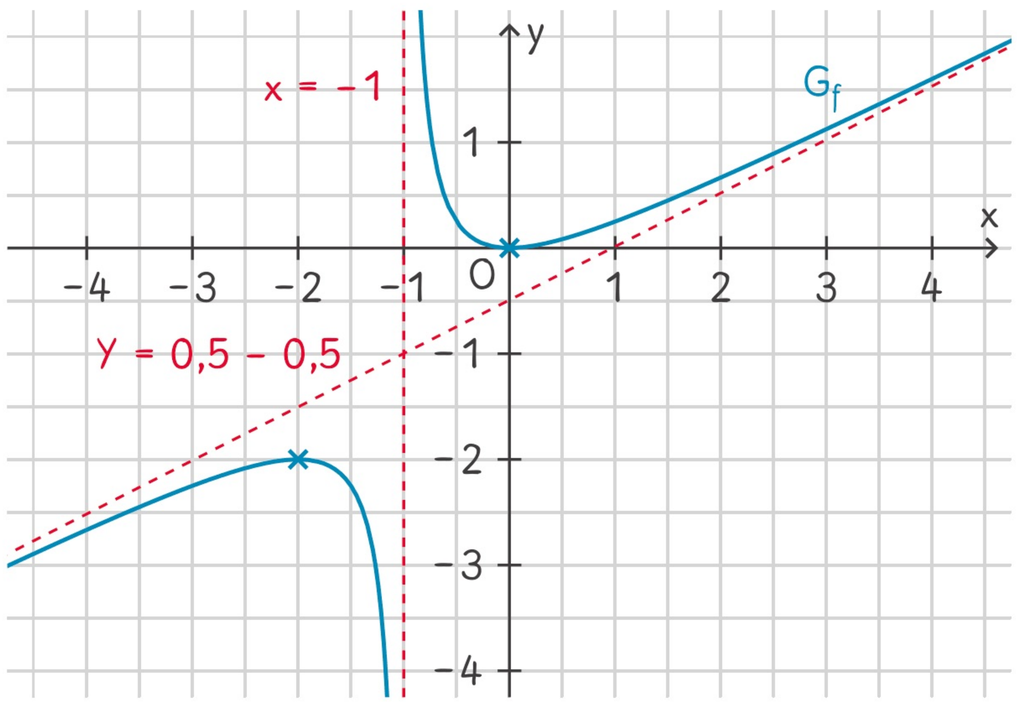
a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
Nullstelle: $x = 0$

b) $g(x) = 0{,}5x - 0{,}5 + \frac{0{,}5}{x+1} = \frac{0{,}5x(x+1)}{x+1} - \frac{0{,}5(x+1)}{x+1} + \frac{0{,}5}{x+1}$

$$= \frac{0{,}5x^2 + 0{,}5x - 0{,}5x - 0{,}5 + 0{,}5}{x+1} = \frac{0{,}5x^2}{x+1} = \frac{x^2}{2(x+1)} = f(x)$$

c) Gleichung der senkrechten Asymptote: $x = -1$.
Gleichung der schrägen Asymptote: $y = 0{,}5x - 0{,}5$.

d) $f(-2) = -2$



4

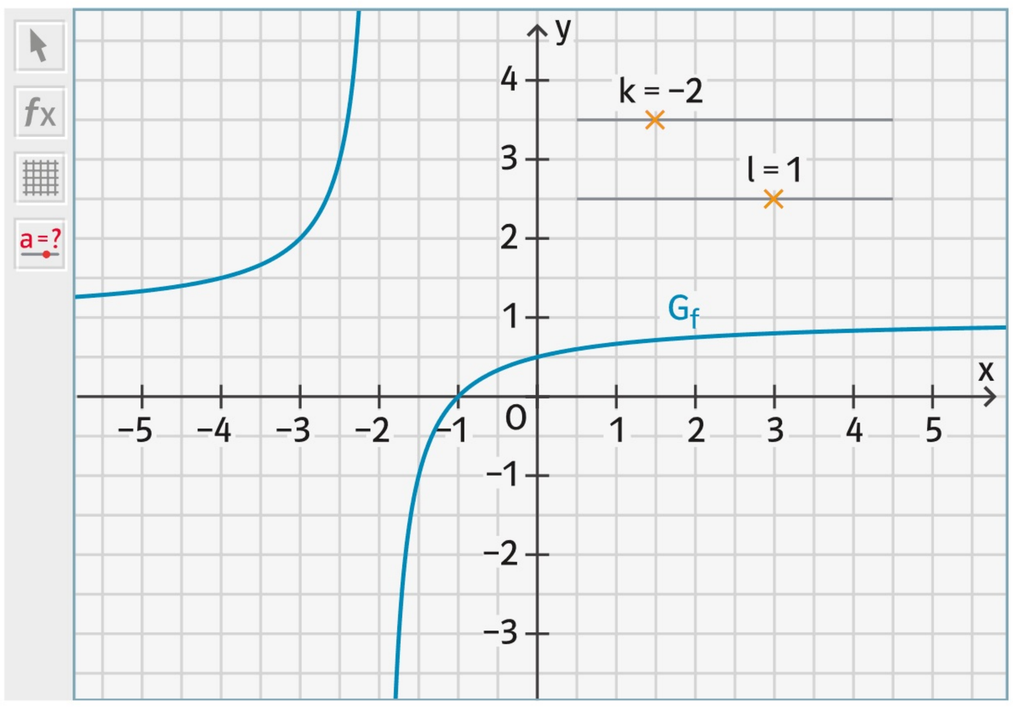
Individuelle Lösung, z. B.:

a) $f(x) = \frac{-2x^2}{(x+1)(x-3)}$ **b)** $f(x) = 0{,}25x + \frac{1}{x-4}$

c) $f(x) = \frac{2(x+1)}{x-5}$ **d)** $f(x) = \frac{-3x+2}{x-0{,}5}$

5

a)



Individuelle Lösung für die Wertepaare (k; l), z. B.: $(-3;\, 1)$ und $(-2;\, -2)$.

b) $l < 1$:
Für $x \to \pm\infty$ konvergiert f gegen 1. Links der Definitionslücke $x = -1$ divergiert f gegen $+\infty$ und rechts davon gegen $-\infty$.
$l > 1$:
Für $x \to \pm\infty$ konvergiert f gegen 1. Links der Definitionslücke $x = -1$ divergiert f gegen $-\infty$ und rechts davon gegen $+\infty$.

Seite 267

Check-in zu Kapitel VI

1

a) $\left(\sqrt[4]{x}\right)^8 = x^{\frac{8}{4}} = x^2$

b) $\sqrt{\sqrt[3]{x}} = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$

c) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}} = a^{\frac{9}{6}} = a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}$

d) $t^{-\frac{1}{2}} : t^{\frac{1}{4}} = t^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = t^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{t^3}}$

e) $\sqrt[7]{a^3 \cdot \frac{1}{a^{-4}}} = \sqrt[7]{a^3 \cdot a^4} = \sqrt[7]{a^{3+4}} = \sqrt[7]{a^7} = a^{\frac{7}{7}} = a$

f) $x^{-\frac{1}{3}} \cdot (4x)^{\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{4} \cdot x^{\frac{1}{2}} = 2x^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{6}} = 2\sqrt[6]{x}$

g) $\frac{a}{\sqrt[3]{a^5}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^1 : a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{1-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}} = a^0 = 1$

h) $\left(\sqrt{t} - \sqrt[3]{t}\right)^2 = \sqrt{t}^2 - 2 \cdot \sqrt{t} \cdot \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{t}^2 = t^{\frac{1}{2}\cdot 2} - 2 \cdot t^{\frac{1}{2}} \cdot t^{\frac{1}{3}} + t^{\frac{1}{3}\cdot 2}$
$= t - 2t^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} + t^{\frac{2}{3}} = t - 2t^{\frac{5}{6}} + t^{\frac{2}{3}} = t - 2\sqrt[6]{t^5} + \sqrt[3]{t^2}$

2

a) $f'(x) = 3 \cdot 3 \cdot (3-x)^2 \cdot (-1) + 2 = -9(3-x)^2 + 2$

b) $f'(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{1}{2} + 3e^{2x+1} \cdot 2 = \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 6e^{2x+1}$

c) $f(x) = e^x \cdot (1-x^2) + e^x \cdot (-2x) = e^x(1 - x^2 - 2x)$

d) $f'(x) = \frac{(2x+3)\cdot(x+1) - (x^2+3x)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+3x+2x+3-x^2-3x}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$

3

a)
$A = \frac{1}{2} \cdot (a+c) \cdot h \quad \left| : \left(\frac{1}{2}h\right)\right.$
$\frac{A}{\frac{1}{2}h} = a + c \quad | - a$
$\frac{2A}{h} - a = c$

b)
$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \quad \left| : \left(\frac{4}{3}\pi\right)\right.$
$\frac{V}{\frac{4}{3}\pi} = r^3 \quad \left|\sqrt[3]{\ }\right.$
$\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = r$

c)
$a = \frac{v_2 - v_1}{t} \quad | \cdot t$
$a \cdot t = v_2 - v_1 \quad | - v_2$
$at - v_2 = -v_1 \quad | \cdot (-1)$
$v_2 - at = v_1$

d)
$f = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \quad |$ Kehrbruch
$\frac{1}{f} = 2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C} \quad | : 2\pi$
$\frac{1}{f \cdot 2\pi} = \sqrt{L \cdot C} \quad | ^2$
$\left(\frac{1}{f \cdot 2\pi}\right)^2 = L \cdot C \quad | : C$
$\frac{1}{f^2 \cdot 4\pi^2 \cdot C} = L$

4

a) Der Graph von g wird zunächst mit dem Faktor 3 in y-Richtung gestreckt und an der x-Achse gespiegelt und dann um +1 in x-Richtung und um +2 in y-Richtung verschoben.

b) Der Graph von g wird mit dem Faktor $\frac{1}{5}$ in x-Richtung gestreckt und um $-\frac{1}{5}$ in x-Richtung und um −3 in y-Richtung verschoben.

5

a) $f(-x) = 2(-x)^4 - (-x)^2 - 3 = 2x^4 - x^2 - 3 = f(x)$. Folglich ist G_f achsensymmetrisch zur y-Achse.

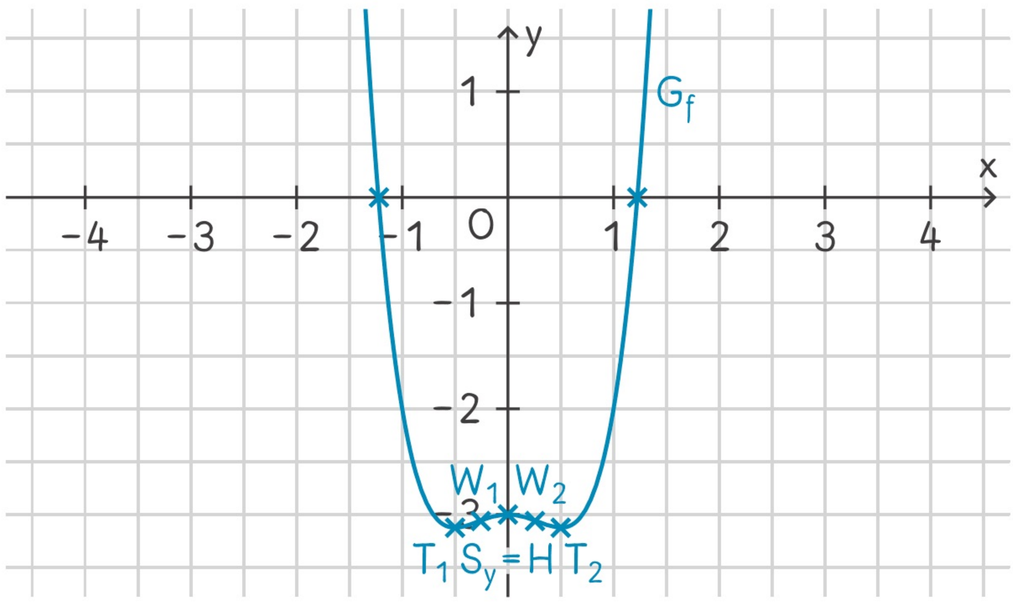
b) $2x^4 - x^2 - 3 = 0$
Substitution: $x^2 = z$.
$2z^2 - z - 3 = 0$
$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4}$
$z_1 = \frac{3}{2}$, also $x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1{,}22$ (einfach) und $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \approx -1{,}22$ (einfach)
Aus $z_2 = -1$ folgen keine weiteren Lösungen.
Schnittpunkt von G_f mit der y-Achse: $f(0) = 2 \cdot 0 - 0 - 3 = -3$; $S_y(0\,|\,-3)$.

c) Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades mit dem Faktor 2 vor x^4, d. h., ihr Grad ist gerade und $a_4 > 0$. Somit verläuft der Graph von links oben nach rechts oben und das Verhalten im Unendlichen ist $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} 2x^4 = +\infty$.

d) $f'(x) = 8x^3 - 2x$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (4x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = -\frac{1}{2}$ oder $x = \frac{1}{2}$
$f''(x) = 24x^2 - 2$
Es ist $f''(0) = -2 < 0$ und $f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 > 0$. Mit $f(0) = -3$ und $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -3{,}125$ ergeben sich $H(0\,|\,-3)$ und $T_1\left(-\frac{1}{2}\,\middle|\,-3{,}125\right)$ und aufgrund der Achsensymmetrie $T_2\left(\frac{1}{2}\,\middle|\,-3{,}125\right)$.
$W = [-3{,}125; +\infty[$

e) $f''(x) = 24x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{12} \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{1}{12}} \approx -0{,}29$ oder $x = \sqrt{\frac{1}{12}} \approx 0{,}29$
$f'''(x) = 48x$
Es ist $f'''\left(-\sqrt{\frac{1}{12}}\right) \neq 0$ und $f'''\left(\sqrt{\frac{1}{12}}\right) \neq 0$. Mit $f\left(-\sqrt{\frac{1}{12}}\right) = -\frac{221}{72}$ ergibt sich $W_1\left(-\sqrt{\frac{1}{12}}\,\middle|\,-\frac{221}{72}\right)$ und aufgrund der Achsensymmetrie $W_2\left(\sqrt{\frac{1}{12}}\,\middle|\,-\frac{221}{72}\right)$.

f)



Seite 268

Check-in zu Kapitel VII

1

(1) Falsch. Es gilt $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(2) Falsch. Es gilt $D_f = \mathbb{R}$, da e^x für jede reelle Zahl x ein definierter Ausdruck ist.

(3) Wahr. Die e-Funktion ist streng monoton zunehmend, da $f'(x) = e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(4) Wahr. Es gilt $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, die e-Funktion ist streng monoton zunehmend und es ist $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. Also nimmt die e-Funktion beliebig kleine positive Werte an, weshalb es keinen kleinsten Funktionswert gibt.

(5) Falsch. Die e-Funktion besitzt wegen $f'(x) = e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ überhaupt keine lokalen Maxima.

(6) Wahr. Es gilt sogar $f(x) = e^x = f'''(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(7) Falsch. Da die e-Funktion streng monoton zunehmend ist, stimmt dies zwar für alle Parallelen oberhalb der x-Achse, aber die x-Achse selbst und jede Parallele unterhalb der x-Achse schneiden den Graphen wegen $f(x) = e^x > 0$ nicht.

(8) Wahr. Weil $D_f = \mathbb{R}$ ist, muss jede Parallele zur y-Achse mindestens einmal geschnitten werden. Weil f eine Funktion ist, kann keine Parallele zur y-Achse mehr als einmal geschnitten werden.

(9) Wahr. Weil $f'(x) = e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, besitzt jede Tangente an den Graphen von f eine positive Steigung.

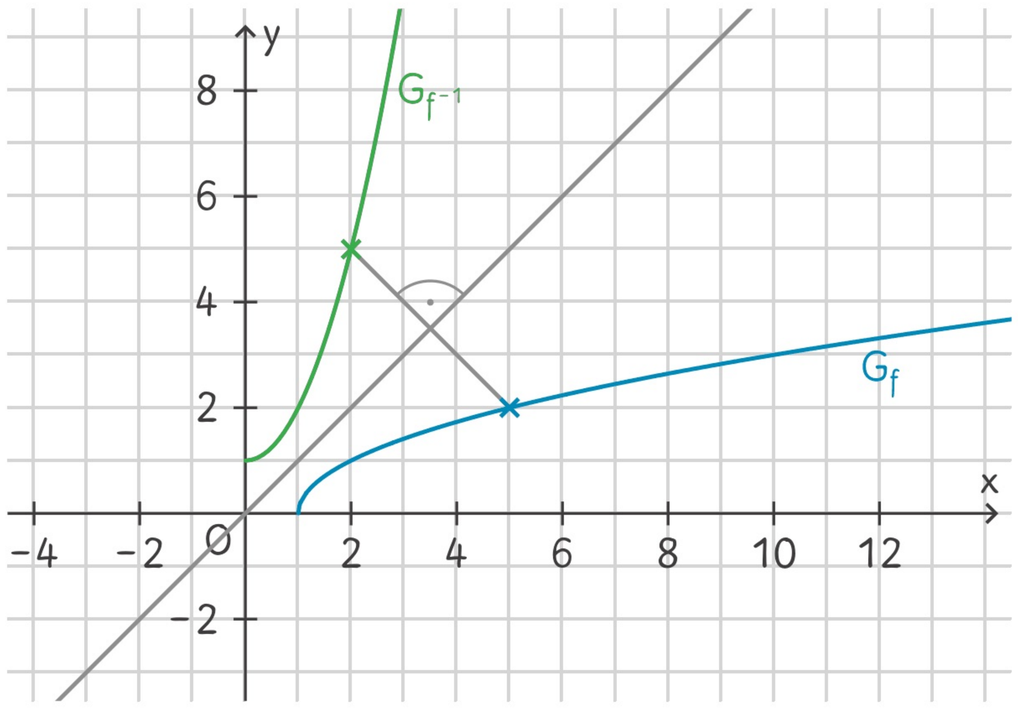
(10) Falsch. Es gilt $f'(0) = e^0 = 1$. Also hat die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(0|1)$ die Steigung 1 und ist somit parallel zur Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten.

2

a) Es gilt $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$, also $D_f = [1; \infty[$. Weil $f(1) = 0$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ gilt und f stetig ist, wird jede nicht-negative reelle Zahl als Funktionswert angenommen. Da außerdem $f(x) \geq 0$ für alle $x \in D_f$ gilt, folgt $W_f = [0; \infty[$.

b) Anhand der Abbildung ist zu erkennen, dass f streng monoton zunehmend ist. Also ist f umkehrbar.

c) Der Graph der Umkehrfunktion entsteht durch Spiegelung von G_f an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten. Man zeichnet diese also ein und skizziert mit deren Hilfe einige Spiegelpunkte. Dann verbindet man die Spiegelpunkte zu einem Graphen.



d) Für $y \in [0; \infty[$ gilt:
$y = \sqrt{x - 1} \Leftrightarrow y^2 = x - 1 \Leftrightarrow x = y^2 + 1$.
Nach Variablentausch erhält man
$f^{-1}: x \mapsto x^2 + 1$.

3

Es wird jeweils ein Funktionsterm der ersten Ableitung f', der zweiten Ableitung f'' und einer Stammfunktion F angegeben.

a) $f'(x) = e^x$
$f''(x) = e^x$
$F(x) = e^x$

b) $f'(x) = -e^x$
$f''(x) = -e^x$
$F(x) = 4x - e^x$

c) $f'(x) = e^x$
$f''(x) = e^x$
$F(x) = e^x - 5x$

d) $f'(x) = 7e^x$
$f''(x) = 7e^x$
$F(x) = 7e^x$

e) $f'(x) = 2x + e^x$
$f''(x) = 2 + e^x$
$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + e^x$

f) $f'(x) = 2e^x - 3x^2$
$f''(x) = 2e^x - 6x$
$F(x) = 2e^x - \frac{1}{4}x^4$

g) $f'(x) = 0$
$f''(x) = 0$
$F(x) = 7$

h) $f'(x) = e^x - \sin(x)$
$f''(x) = e^x - \cos(x)$
$F(x) = e^x + \sin(x)$

i) $f'(x) = \cos(x) - e^x$
$f''(x) = -\sin(x) - e^x$
$F(x) = -\cos(x) - e^x$

4

a) (1) $f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$

(2) $f'(x) = e^{x^2+1} \cdot 2x$

(3) $f'(x) = \frac{\cos(x)e^x - \sin(x)e^x}{e^{2x}}$

(4) $f'(x) = (3x^2 - 2)e^x + (x^3 - 2x)e^x$

(5) $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

(6) $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

b) (1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

(4) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

(5) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2023$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

(6) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Seite 269

Check-in zu Kapitel VIII

1

a) $A(2|2)$, $B(6|-2)$, $C(-3|4)$ und $D(-4|-4)$

b) Individuelle Lösung, z. B.: $X(4|2)$, $Y(4|4)$ und $Z(2|4)$.

c) Individuelle Lösung, z. B.: $U(6|-3)$ und $V(2|1)$.

d) $M\left(4\left|-\frac{1}{2}\right.\right)$ und $N\left(4\left|-\frac{1}{2}\right.\right)$. Die Mittelpunkte stimmen überein.

2

a) $A(-5|-4)$, $B(5|0)$ und $C(-3|4)$

b) $M(1|2)$, $N(0|-2)$ und $S(-1|0)$

c) $|\overline{AM}| = \sqrt{(1-(-5))^2 + (2-(-4))^2} = \sqrt{72}$

$|\overline{CN}| = \sqrt{(0-(-3))^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{45}$

$|\overline{CS}| = \sqrt{(-1-(-3))^2 + (0-4)^2} = \sqrt{20}$

$|\overline{SN}| = \sqrt{(0-(-1))^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{5}$

$|\overline{AS}| = \sqrt{(-1-(-5))^2 + (0-(-4))^2} = \sqrt{32}$

$|\overline{SM}| = \sqrt{(1-(-1))^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8}$

d) $\frac{|\overline{AS}|}{|\overline{SM}|} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{32}{8}} = \sqrt{4} = 2$ und $\frac{|\overline{CS}|}{|\overline{SN}|} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2$

Der Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden teilt diese jeweils im Verhältnis 2 : 1.

3

Individuelle Lösung, z. B.:

- Parallelogramm
  Definition: Ein Parallelogramm ist ein Viereck, bei dem gegenüberliegende Seiten jeweils zueinander parallel sind.
  Eigenschaften: In jedem Parallelogramm haben die Diagonalen denselben Mittelpunkt. Gegenüberliegende Seiten eines Parallelogramms sind gleich lang.
- Quadrat
  Definition: Ein Quadrat ist ein Viereck, bei dem alle Seiten gleich lang und benachbarte Seiten zueinander senkrecht sind.
  Eigenschaften: Die Diagonalen eines Quadrats sind zueinander senkrecht und gleich lang.
- Raute
  Definition: Eine Raute ist ein Viereck mit vier gleich langen Seiten.
  Eigenschaften: Jede Raute ist ein Parallelogramm. Die Diagonalen einer Raute sind zueinander senkrecht.
- Rechteck
  Definition: Ein Rechteck ist ein Viereck, bei dem benachbarte Seiten zueinander senkrecht sind.
  Eigenschaften: Gegenüberliegende Seiten sind parallel und gleich lang. Die Diagonalen eines Rechtecks sind gleich lang.
- Gleichschenkliges Trapez
  Definition: Ein gleichschenkliges Trapez ist ein Trapez mit zwei gleich langen Schenkeln.
  Eigenschaften: In einem gleichschenkligen Trapez sind die Diagonalen gleich lang. In einem gleichschenkligen Trapez gibt es zwei Seiten, die dieselbe Mittelsenkrechte haben.
- Drachenviereck
  Definition: Ein Drachenviereck ist ein Viereck, das symmetrisch zu einer seiner Diagonalen ist.
  Eigenschaften: In einem Drachenviereck gibt es zwei Paare benachbarter gleich langer Seiten. Die Diagonalen eines Drachenvierecks sind zueinander senkrecht.

4

a) $A_G = 3^2 = 9$. Sei d die Diagonalenlänge der Grundfläche. Dann gilt nach dem Satz des Pythagoras $d = \sqrt{18}$, also $\frac{d}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{18} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$. Erneut mit dem Satz des Pythagoras folgt $h = \sqrt{49 - \frac{9}{2}}$. Also gilt $V = \frac{1}{3}A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot \sqrt{49 - \frac{9}{2}} \approx 20{,}01$.

b) Für das Volumen V und die Kantenlängen a, b und c des Quaders gilt $V = a \cdot b \cdot c$, also $84 = a \cdot b \cdot c$. Die Primfaktorzerlegung von 84 ist $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$. Das Produkt $a \cdot b \cdot c$ kann sich nur aus diesen Primfaktoren zusammensetzen. Wir setzen hier noch $a \leq b \leq c$ voraus, um die Lösungen systematisch aufzulisten. Die folgende Tabelle zeigt alle möglichen Kantenlängen:

a	b	c
1	1	84
1	2	42
1	3	28
1	4	21
1	6	14
1	7	12
2	2	21
2	3	14
2	6	7
3	4	7

α′ 127, 128, 148
- Einfluss des Ablehnungsbereichs 129, 148
- Einfluss des Stichprobenumfangs 129, 148

β′ 128, 148
- Einfluss des Ablehnungsbereichs 129, 148
- Einfluss des Stichprobenumfangs 129, 148

μ 73
σ 74
Σ 73

A

Abklingvorgänge 52, 64
Ablehnungsbereich 123, 148
Ableitung
- äußere 25, 32
- innere 25, 32
- der Kosinusfunktion 15, 31, 32
- der ln-Funktion 201, 218
- der natürlichen Logarithmusfunktion 201, 218
- der Sinusfunktion 15, 31, 32
- einer Potenzfunktion mit ganzzahligen Exponenten 153, 172
- einer Potenzfunktion mit rationalen Exponenten 182, 196
- von Verknüpfungen mit der natürlichen Exponentialfunktion (e-Funktion) 41, 64
- von Verknüpfungen mit der natürliche Logarithmusfunktion (ln-Funktion) 205, 218

Addition von Vektoren 230, 254
Anfangsbestand 52, 53, 64
Annahmebereich 124
Arbeit 252
Arkusfunktionen 194, 195
Arkuskosinusfunktion 195
Arkussinusfunktion 194
Arkustangensfunktion 195
Assoziativgesetz
- der Addition (Vektoren) 231
- S-Multiplikation 234

äußere Ableitung 25, 32
äußere Funktion 21, 22
Axiome von Kolmogorow 108

B

Bereich
- kritischer 123, 148
- nichtkritischer 123, 148

Bernoulli, Jakob I 63, 86
Bernoulli, Johann I 171
Bernoulli, Nikolaus I 73
Bernoulli-Experiment 86, 118
Bernoulli-Kette 86, 118
beschränktes Wachstum 216
Betrag eines Vektors 227, 228, 254
beurteilende Statistik 122
Binomialkoeffizient 82, 118
Binomialverteilung 90, 118
- Histogramm 102
- Modellieren 95
- Säulendiagramm 102

Briefe, Problem der vertauschten 72

C

Chi-Quadrat-Vierfeldertest 146, 147

D

DGL 37, 216
Differentialgleichung 37, 216
Distributivgesetz(e)
- Skalarprodukt 239
- S-Multiplikation 234

Dodekaeder 72
Drehmoment 253
dreidimensionales Koordinatensystem 222, 254

E

e 36, 37, 62, 64
e-Funktion 37, 62, 64
- Ableitung von Verknüpfungen 41, 64
- Grenzwerte von Verknüpfungen 42, 43, 64
- Verknüpfungen 41, 64

Einfluss des Ablehnungsbereichs
- auf α′ 129, 148
- auf β′ 129, 148

Einfluss des Stichprobenumfangs
- auf α′ 129, 148
- auf β′ 129, 148

Einheitsvektor 235
einseitiger Hypothesentest 123, 148
einseitiger Signifikanztest 135, 148
elektrische Feldstärke 252
Entscheidungsregel 123, 148
Erwartungswert
- binomialverteilte Zufallsgröße 101, 118
- Zufallsgröße 73, 118

Euler, Leonhard 37
Euler'sche Zahl 36, 37, 62, 64
Exponentialfunktion, natürliche 37, 62, 64
- Ableitung von Verknüpfungen 41, 64
- Grenzwerte von Verknüpfungen 42, 43, 64
- Verknüpfungen 41, 64

Exponentialgleichung 46, 64
exponentielles Wachstum 52, 53, 64

F

Faktorregel 6
Fehler erster Art 127, 128, 148
- Wahrscheinlichkeit 127, 128, 148

Fehler zweiter Art 128, 148
- Wahrscheinlichkeit 128, 148

Feldstärke, elektrische 252
Flächeninhalt eines Parallelogramms 245, 254
Formel von Bernoulli 90, 118
frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff 107
Funktion(en)
- äußere 21, 22
- innere 21, 22
- umkehrbare 176, 177, 196
- Untersuchung verknüpfter 41, 42, 46, 47, 64, 162, 163, 172, 186, 187, 196, 205, 206, 209, 210, 218

Funktionenschar 6, 32
Funktionsterm der Umkehrfunktion 177, 196

G

gebrochen-rationale Funktion
- Untersuchung 156, 157, 172

Gegenhypothese 122, 123, 148
Gegenvektor 226
Graph der Umkehrfunktion 177, 196
Grenzverhalten von Verknüpfungen
- mit der natürlichen Exponentialfunktion (e-Funktion) 42, 43, 64
- mit der natürlichen Logarithmusfunktion (ln-Funktion) 205, 206, 218

Grenzwerte
- Rechenregeln 18

Größe
- skalare 252
- vektorielle 252

Grundgesamtheit 122

H

Halbwertszeit 53, 64
Hangabtriebskraft 252
Histogramm 69, 102
Hôpital
- Guillaume François Antoine de L' 171
- Regel von de L' 171

Hypothese 122
Hypothesentest 123, 148
- einseitiger 123, 148
- linksseitiger 123
- rechtsseitiger 123

I

Induktion 253
innere Ableitung 25, 32
innere Funktion 21, 22

K

kartesisches Koordinatensystem 222
Kenngrößen
- einer binomialverteilten Zufallsgröße 101, 118
- einer Zufallsgröße 74, 118

Kettenregel 25, 32
Kolmogorow, Andrei Nikolajewitsch 108
Kolmogorow-Axiome 108
Kommutativgesetz
- der Addition (Vektoren) 231
- Skalarprodukt 239

Konstruktion eines einseitigen Signifikanztests 136, 148
Koordinatendarstellung
- eines Pfeils 226
- eines Vektors 226, 227, 254
- S-Multiplikation 235

Koordinatenform des Skalarprodukts 239, 254
Koordinatensystem
- dreidimensionales 222, 254
- kartesisches 222

Kosinusfunktion
- Ableitung 15, 31, 32
- Stammfunktion 15, 32
- Umkehrfunktion 195

Kreuzprodukt 244, 254
kritischer Bereich 123, 148
k-Tupel 78
kumulative Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße 69, 118

L

Länge eines Pfeils 228
Laplace'scher Wahrscheinlichkeitsbegriff 107
Linearkombination 235
linksseitiger Hypothesentest 123
Logarithmus, natürlicher 46, 64
Logarithmusfunktion, natürliche (ln-Funktion) 200, 218
- Ableitung 201, 218
- Ableitung von Verknüpfungen 205, 218
- Grenzverhalten von Verknüpfungen 205, 206, 218
- Rechenregeln 201, 218
- Stammfunktion 201, 218
- Untersuchung von Verknüpfungen 209, 210, 218
- Verknüpfungen 205, 218

Lorentz, Hendrik Antoon 253
Lorentz-Kraft 253

M

Modellieren mit der Binomialverteilung 95
Multiplikation
- eines Vektors mit einer Zahl 234, 254
- skalare 234, 254

Multiplikationstafel 146

N

Nachdifferenzieren 25, 32
natürliche Exponentialfunktion (e-Funktion) 37, 62, 64
- Ableitung von Verknüpfungen 41, 64
- Grenzwerte von Verknüpfungen 42, 43, 64
- Verknüpfungen 41, 64

natürliche Logarithmusfunktion (ln-Funktion) 200, 218
- Ableitung 201, 218
- Ableitung von Verknüpfungen 205, 218
- Grenzverhalten von Verknüpfungen 205, 206, 218
- Rechenregeln 201, 218
- Stammfunktion 201, 218
- Untersuchung von Verknüpfungen 209, 210, 218
- Verknüpfungen 205, 218

natürlicher Logarithmus 46, 64
nichtkritischer Bereich 123, 148
Normalkraft 252
Nullhypothese 122, 123, 148
Nullvektor 226

O

Oktaeder 225
Oktanten 222
Ortsvektor 227

P

Parallelogramm, Flächeninhalt 245, 254
Parameter 6
Partialsumme 62
Partialsummenfolge 62

Permutation 78
Pfeil 226
- Koordinatendarstellung 226
- Länge 228
Potenzfunktion mit rationalen Exponenten 181, 196
- Ableitung 182, 196
- Stammfunktion 182, 196
Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten 153, 172
- Ableitung 153, 172
Problem der vertauschten Briefe 72
Produktregel 18, 32
Projektion, senkrechte 242
Pyramide
- Volumen 245

Q

Quadratwurzelfunktion 176, 196
Quotientenregel 152, 162, 172

R

Rechengesetze
- der S-Multiplikation 234
- der Vektoraddition 231
- für das Skalarprodukt 239
Rechenregeln
- für die ln-Funktion 201, 218
- für die natürliche Logarithmusfunktion 201, 218
- für Grenzwerte 18
Rechte-Hand-Regel 224, 245
rechtsseitiger Hypothesentest 123
Rechtssystem 224
Regel von de L'Hôpital 171
Reihe 62
Risiko
- erster Art 127
- zweiter Art 128

S

Säulendiagramm 69, 102
senkrechte Projektion 242
signifikantes Testergebnis 135
Signifikanzniveau 135, 148
Signifikanztest 135, 148
- einseitiger 135, 148
Sinusfunktion
- Ableitung 15, 31, 32
- Stammfunktion 15, 32
- Umkehrfunktion 194
Skalar 234
skalare Größe 252
skalare Multiplikation 234, 254
Skalarprodukt 238, 239, 254
- Distributivgesetz 239
- Kommutativgesetz 239
- Koordinatenform 239, 254
Skizzieren einer Stammfunktion 10, 11
S-Multiplikation 234, 254
- Assoziativgesetz 231
- Distributivgesetze 234
- Koordinatendarstellung 235
- Rechengesetze 234
Spat 245
- Volumen 245, 254
Stammfunktion 10, 11, 32
- der Kosinusfunktion 15, 32
- der ln-Funktion 201, 218
- der natürlichen Logarithmusfunktion 201, 218
- der Sinusfunktion 15, 32
- einer Potenzfunktion mit rationalen Exponenten 182, 196
- skizzieren 10, 11
Standardabweichung
- binomialverteilte Zufallsgröße 101, 118
- Zufallsgröße 74, 118
Statistik, beurteilende 122
stetige Verzinsung 63
Stichprobe 122, 123, 148
subjektiver Wahrscheinlichkeitsbegriff 107
Subtraktion von Vektoren 231
Summenregel 6
Summenzeichen 73

T

Tangensfunktion 195, 208
- Umkehrfunktion 195
Testen von Hypothesen 123, 148
Testergebnis, signifikantes 135
Testgröße 122, 123, 148

U

umkehrbare Funktion 176, 177, 196
Umkehrbarkeitskriterium 177, 196
Umkehrfunktion 176, 177, 196
- Funktionsterm 177, 196
- Graph 177, 196
unendliche Zahlenfolge 62
Untersuchung
- gebrochen-rationaler Funktionen 156, 157, 172
- verknüpfter Funktionen 162, 163, 172
- von Verknüpfungen mit der ln-Funktion 209, 210, 218
- von Verknüpfungen mit der natürliche Logarithmusfunktion 209, 210, 218
- von Verknüpfungen mit der Wurzelfunktion 186, 187, 196

V

Varianz
- binomialverteilte Zufallsgröße 101, 118
- Zufallsgröße 74, 118
Vektor(en) 226, 254
- Addition 230, 254
- Assoziativgesetz (S-Multiplikation) 234
- Assoziativgesetz der Addition 231
- Betrag 227, 228, 254
- Distributivgesetze (S-Multiplikation) 234
- Kommutativgesetz der Addition 231
- Koordinatendarstellung 226, 227, 254
- Multiplikation mit einer Zahl 234, 254
- Subtraktion 231
- Winkel zwischen 238, 254
Vektoraddition, Rechengesetze 231
vektorielle Größe 252

Vektorkette 235
Vektorprodukt 244, 254
Verdopplungszeit 53, 64
Verkettung 21, 32
verknüpfte Funktionen, Untersuchung 41, 42, 46, 47, 64, 162, 163, 172, 186, 187, 196, 205, 206, 209, 210, 218
Verknüpfungen mit der natürlichen Exponentialfunktion (e-Funktion) 41, 64
- Ableitung 41, 64
- Grenzwerte 42, 43, 64
Verknüpfungen mit der natürlichen Logarithmusfunktion (ln-Funktion) 205, 218
- Ableitung 205, 218
- Grenzwerte 205, 206, 218
Verteilungsfunktion, kumulative 69, 118
Verzinsung, stetige 63
Volumen
- einer Pyramide 245
- eines Spats 245, 254

W

Wachstum
- beschränktes 216
- exponentielles 52, 53, 64
Wachstumsfaktor 52, 53, 64
Wachstumsgeschwindigkeit 52, 53, 64
Wachstumsschranke 216
Wachstumsvorgänge 52, 64
Wahrscheinlichkeit
- Fehler erster Art 127, 128, 148
- Fehler zweiter Art 128, 148
Wahrscheinlichkeitsbegriff
- frequentistischer 107
- Laplace'scher 107
- subjektiver 107
Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Zufallsgröße 69, 118
Wahrscheinlichkeitsraum 108
Wahrscheinlichkeitsverteilung 69, 108, 118
- einer Zufallsgröße 69, 118
Winkel zwischen zwei Vektoren 238, 254
Wurzelfunktion 176, 196
- Untersuchung von Verknüpfungen 186, 187, 196

Z

Zahlenfolge 62
- unendliche 62
Zahlentripel 222, 254
Ziehen
- mit einem Griff 83
- mit Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge 78
- ohne Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge 78
- ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge 82
Zufallsgröße 68, 118
- Erwartungswert 73, 118
- Erwartungswert einer binomialverteilten 101, 118
- Kenngrößen 74, 118
- Kenngrößen einer binomialverteilten 101, 118
- kumulative Verteilungsfunktion 69, 118
- Standardabweichung 74, 118
- Standardabweichung einer binomialverteilten 101, 118
- Varianz 74, 118
- Varianz einer binomialverteilten 101, 118
- Wahrscheinlichkeitsfunktion 69, 118
- Wahrscheinlichkeitsverteilung 69, 118
Zufallsvariable 68, 118

Quellennachweis

Abbildungen: action press international gmbh, Hamburg (REX FEATURES LTD.), **60.4**; akg-images, Berlin (Science Photo Library), **253.3**; Alamy stock photo, Abingdon (EThamPhoto), **122.1**; BPK, Berlin, **108.1**; BPK, Berlin (Reiss-Engelhorn-Museen Mannheim), **220.1**; ddp media GmbH, Hamburg (Frank Röder), **87.2**; dreamstime.com, Brentwood, TN (Rainer Plendl), **98.1**; Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart, **245.2**; EZB, Frankfurt, **73.1; 73.2; 73.3**; Getty Images Plus, München (Corbis Documentary/Stuart Westmorland), **237.1**; Getty Images Plus, München (DigitalVision/Michael Blann), **193.1**; Getty Images Plus, München (E+/alvarez), **135.1**; Getty Images Plus, München (E+/ihoe), **3.3; 199.1**; Getty Images Plus, München (Image Source/Monty Rakusen), **121.1**; Getty Images Plus, München (iStock/Jordi Mora Igual), **61.1**; Getty Images Plus, München (iStock/Mauricio Graiki), **216.1**; Getty Images Plus, München (iStock/PaulVinten), **127.1**; Getty Images Plus, München (iStock/PavelRodimov), **265.3**; Getty Images Plus, München (Moment/Capelle.r), **149.1**; Getty Images Plus, München (Photodisc/Simon Lekias), **122.4**; Getty Images Plus, München (The Image Bank/Joe McDonald), **185.1**; Getty Images Plus, München (The Image Bank/Winfried Wisniewski), **2.1; 5.1**; Getty Images, München (Image Source), **21.1**; Getty Images, München (imageBROKER/Georg Stelzner), **1.2**; Getty Images, München (Moment/Roc Canals Photography), **1.1**; Getty Images, München (Westend61), **2.2; 35.1**; Hungreder, Rudolf, Leinfelden-Echterdingen, **222.1; 225.2; 251.1**; IMAGO, Berlin (Eibner), **82.1**; IMAGO, Berlin (Metodi Popow), **127.2**; IMAGO, Berlin (YAY Images), **143.1**; imprint, Zusmarshausen, **13.7; 13.8; 13.9; 13.10; 15.1; 44.1; 44.2; 44.3; 44.4; 61.5; 265.2**; iStockphoto, Calgary, Alberta (Jeff McDonald), **193.3**; iStockphoto, Calgary, Alberta (Kohlerphoto), **75.2**; iStockphoto, Calgary, Alberta (Ratstuben), **144.1**; Malz, Anja, Taunusstein, **18.1; 25.1; 39.1; 40.1; 61.2; 66.1; 68.1; 68.2; 68.3; 68.4; 70.3; 73.4; 76.3; 76.4; 76.6; 76.7; 76.8; 77.1; 78.1; 78.2; 79.1; 80.1; 80.2; 82.2; 83.1; 83.2; 84.1; 84.2; 87.2; 89.1; 93.1; 93.1; 95.2; 107.1; 107.2; 107.3; 107.5; 110.2; 118.1; 119.1; 122.2; 122.3; 136.2; 151.1; 167.3; 174.2; 181.1; 197.7; 198.1; 200.1; 224.1; 233.2; 237.6; 240.1; 242.4; 245.1; 250.6; 251.3; 257.1; 258.1; 258.2; 259.2; 265.1**; Mauritius Images, Mittenwald (BTEU/AUSMUM/Alamy), **171.1**; Mauritius Images, Mittenwald (Classic Image/Alamy), **86.4**; Mauritius Images, Mittenwald (GL Archive/Alamy), **63.1**; MEV Verlag GmbH, Augsburg (Mayer Rolf), **67.1; 77.2**; MEV Verlag GmbH, Augsburg (Wendler Martin), **60.1**; Picture-Alliance, Frankfurt/M. (dpa/Felix Hörhager), **81.1**; ShutterStock.com RF, New York (George Sheldon), **3.1; 165.2**; ShutterStock.com RF, New York (Jacob Lund), **50.2**; ShutterStock.com RF, New York (Pic Media Aus), **2.3; 71.1**; ShutterStock.com RF, New York (SeventyFour), **107.6**; ShutterStock.com RF, New York (Stock-Asso), **127.3**; ShutterStock.com RF, New York (Studio Romantic), **110.1**; stock.adobe.com, Dublin (Africa Studio), **2.4; 120.2**; stock.adobe.com, Dublin (Andrey Volokhatiuk), **147.1**; stock.adobe.com, Dublin (benjaminec), **34.2; 198.2**; stock.adobe.com, Dublin (Birgitt.Bautze), **193.2**; stock.adobe.com, Dublin (blachowicz102), **56.1**; stock.adobe.com, Dublin (contrastwerkstatt), **87.1**; stock.adobe.com, Dublin (Daniel Etzold), **109.1**; stock.adobe.com, Dublin (Eric Gevaert), **217.2**; stock.adobe.com, Dublin (euregiocontent), **95.1**; stock.adobe.com, Dublin (FotoLyriX), **97.1**; stock.adobe.com, Dublin (franz massard), **80.3**; stock.adobe.com, Dublin (Hubert Körner), **52.1**; stock.adobe.com, Dublin (IrkIngwer), **125.1**; stock.adobe.com, Dublin (mavoimages), **126.1**; stock.adobe.com, Dublin (mpgphoto), **61.4**; stock.adobe.com, Dublin (philip kinsey), **6.5**; stock.adobe.com, Dublin (shandor_gor), **115.1**; stock.adobe.com, Dublin (Soru Epotok), **6.6**; stock.adobe.com, Dublin (torook), **105.1**; stock.adobe.com, Dublin (Travel Stock), **6.4**; stock.adobe.com, Dublin (Turner), **3.2; 175.1**; stock.adobe.com, Dublin (WEISHIN), **114.1**; Thinkstock, München (iStock/Igor Dutina), **85.1**; Thinkstock, München (Photos.com), **37.1**; tiff.any GmbH & Co. KG, Berlin, **4.1; 6.1; 6.2; 7.1; 7.2; 8.1; 8.2; 9.1; 9.3; 10.1; 10.2; 10.3; 11.1; 11.2; 12.1; 12.2; 12.3; 12.4; 12.5; 12.6; 12.7; 12.8; 12.9; 12.10; 12.11; 12.12; 12.13; 13.1; 13.2; 13.3; 13.4; 13.5; 13.6; 14.1; 14.2; 14.3; 14.4; 15.2; 15.3; 16.1; 17.1; 17.2; 21.2; 21.3; 21.4; 22.1; 22.2; 22.3; 23.2; 24.1; 24.2; 27.1; 28.1; 28.2; 29.1; 29.2; 29.3; 29.4; 29.5; 29.6; 29.7; 30.1; 30.2; 31.1; 31.2; 32.1; 32.2; 32.3; 33.5; 36.2; 36.3; 37.2; 38.1; 40.2; 42.1; 42.2; 45.1; 45.2; 45.3; 46.1; 46.2; 48.1; 52.2; 53.1; 53.2; 57.1; 59.2; 60.3; 61.3; 64.1; 64.2; 64.3; 65.2; 68.5; 68.6; 69.1; 69.2; 69.3; 69.4; 70.1; 70.2; 70.4; 70.5; 72.1; 72.3; 74.1; 74.2; 74.3; 76.1; 76.2; 76.5; 79.2; 79.3; 81.2; 81.3; 81.4; 86.1; 86.2; 86.3; 86.5; 89.2; 90.1; 90.2; 92.1; 92.2; 92.3; 94.1; 97.2; 99.1; 101.1; 101.2; 102.1; 102.2; 102.3; 102.4; 102.5; 102.6; 102.7; 102.8; 103.1; 104.1; 105.2; 105.3; 106.1; 106.2; 106.3; 106.4; 106.5; 108.2; 108.3; 111.1; 112.1; 112.2; 113.1; 113.2; 113.3; 114.2; 114.3; 114.4; 118.2; 118.3; 123.1; 123.2; 123.3; 127.4; 128.1; 128.2; 128.3; 129.1; 129.2; 129.3; 129.4; 130.1; 130.2; 131.1; 132.1; 134.1; 134.2; 135.2; 136.1; 136.3; 136.4; 140.2; 148.1; 148.2; 148.3; 148.4; 152.1; 153.1; 153.2; 154.1; 156.1; 156.2; 157.1; 157.3; 157.4; 158.1; 158.2; 159.1; 159.2; 159.3; 159.4; 160.1; 163.1; 163.2; 164.1; 165.1; 166.1; 167.1; 167.2; 168.1; 168.2; 168.3; 168.4; 169.1; 169.2; 169.3; 169.4; 169.5; 169.6; 169.7; 169.8; 169.9; 170.1; 170.2; 170.3; 172.1; 172.2; 173.1; 173.2; 173.3; 174.1; 176.1; 176.2; 176.3; 176.4; 176.5; 176.6; 176.7; 176.8; 177.1; 177.2; 178.1; 178.2; 178.3; 179.1; 179.2; 179.3; 179.4; 179.5; 179.6; 179.7; 179.8; 179.9; 179.10; 180.1; 180.2; 180.3; 181.2; 181.3; 183.1; 184.1; 184.2; 184.3; 184.4; 184.5; 184.6; 184.7; 184.8; 184.9; 185.2; 185.3; 185.4; 186.1; 186.2; 187.1; 188.1; 188.2; 188.3; 188.4; 190.2; 191.1; 192.1; 194.1; 194.2; 195.1; 195.2; 195.3; 195.4; 196.1; 196.2; 197.1; 197.2; 197.3; 197.4; 197.5; 197.6; 200.2; 203.1; 203.2; 204.1; 204.2; 205.1; 205.2; 205.3; 207.1; 209.1; 209.2; 210.1; 210.2; 210.3; 211.1; 211.2; 212.1; 212.2; 212.3; 212.4; 212.5; 213.1; 213.2; 215.1; 215.2; 215.3; 215.4; 215.5; 215.6; 215.7; 215.8; 215.9; 215.10; 216.2; 216.3; 218.1; 218.2; 219.1; 222.2; 222.3; 222.4; 222.5; 222.6; 223.1; 223.2; 223.3; 225.1; 226.1; 226.2; 226.3; 227.1; 227.2; 227.3; 227.4; 229.1; 230.1; 230.2; 230.3; 230.4; 230.5; 230.6; 230.7; 231.1; 231.2; 231.3; 231.4; 231.5; 231.6; 231.7; 231.8; 232.1; 232.2; 233.1; 233.4; 234.2; 234.3; 234.4; 234.5; 235.1; 235.2; 236.1; 236.2; 237.2; 237.3; 237.4; 237.5; 238.1; 238.2; 238.3; 239.1; 240.2; 241.1; 241.2; 241.3; 242.1; 242.2; 242.3; 243.1; 243.2; 243.3; 244.1; 245.3; 245.4; 245.5; 245.6; 245.7; 246.1; 246.2; 247.1; 248.1; 249.1; 249.2; 249.3; 250.1; 250.2; 250.3; 250.4; 250.5; 251.4; 251.5; 251.6; 252.1; 252.2; 252.3; 252.4; 253.1; 253.2; 253.4; 253.5; 254.1; 254.2; 254.4; 254.5; 255.1; 255.2; 256.1; 257.2;**

257.3; 257.4; 258.3; 259.1; 262.1; 268.1; 269.1; 269.2; 270.1; 270.2; 271.1; 271.2; 273.1; 273.2; 274.1; 275.1; 277.1; 277.2; 277.3; 278.1; 278.2; 278.3; 278.4; 279.1; 281.1; 285.1; 286.1; 286.3; 286.4; 286.5; 287.1; 287.2; 287.3; 287.4; 287.5; 288.1; 288.2; 288.3; 288.4; 289.1; 290.1; 290.2; 290.3; 290.4; 290.5; 291.1; 292.1; 292.2; 292.3; 293.1; 293.2; 294.1; 294.2; 294.3; 295.1; 295.2; 295.3; 295.4; 295.5; 295.6; 296.1; 296.2; 296.3; 296.4; 296.5; 297.1; 297.2; 297.3; 298.1; 300.1; 300.2; 301.1; 301.2; 301.3; 301.4; 301.5; 302.1; 302.2; 303.1; 303.2; 303.3; 303.4; 304.1; 304.2; 305.1; 306.1; Uwe Alfer, Kråksmåla, Alsterbro, **6.7; 6.8; 9.2; 22.4; 23.1; 33.1; 33.2; 33.3; 33.4; 34.1; 36.1; 49.1; 50.1; 51.1; 55.1; 59.1; 60.2; 60.3; 65.1; 72.2; 75.1; 88.1; 88.2; 91.1; 109.2; 116.1; 116.2; 117.1; 117.2; 117.3; 119.2; 120.1; 132.2; 140.1; 157.2; 190.1; 217.1; 220.2; 233.3; 234.1; 286.2; 304.3**; VISUM Foto GmbH, München (Aufwind-Luftbilder), **3.4; 221.1**; www.panthermedia.net, München (tupungato), **224.2**; www.panthermedia.net, München (Watzmann), **6.3**;

Text: Abiturprüfung 2011 (Bayern), Analysis, Aufgabengruppe I, Teil 1, Aufgabe 2, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2011/, **211.2**; Abiturprüfung 2011 (Bayern), Analysis, Aufgabengruppe I, Teil 1, Aufgabe 3, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2011, **56.1**; Abiturprüfung 2012 (Bayern), Analysis, Aufgabengruppe II, Teil 1, Aufgabe 2, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2012/, **44.1**; Abiturprüfung 2012 (Bayern), Analysis, Aufgabengruppe II, Teil 1, Aufgabe 3, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2012/, **211.1**; Abiturprüfung 2012 (Bayern), Analysis, Aufgabengruppe I, Teil 2, daraus Teilaufgaben 2 a), b) und c), Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2012/, **57.1**; Abiturprüfung 2013 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe II, Aufgabe 2, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/schularten/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung/mathematik/2013/, **141.2**; Abiturprüfung 2014 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppen 1 und 2, Aufgabe 2, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2014/, **45.1**; Abiturprüfung 2014 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2014/, **188.1**; Abiturprüfung 2014 (Bayern), Geometrie, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 1, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2014/, **247.1**; Abiturprüfung 2015 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 4, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2015, **45.2**; Abiturprüfung 2015 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 2, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/schularten/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung/mathematik/, **142.1**; Abiturprüfung 2016 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2016/, **209.3**; Abiturprüfung 2016 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 1, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2016/, **211.3**; Abiturprüfung 2016 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1, daraus Teilaufgaben a) – g), Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2016/, **50.1**; Abiturprüfung 2016 (Bayern), Geometrie, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2016/, **225.1**; Abiturprüfung 2016 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 2, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB), unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2016/, **112.1**; Abiturprüfung 2016 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 2, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2016/, **111.1**; Abiturprüfung 2017 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2017/, **187.2**; Abiturprüfung 2017 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppen 1 und 2, Aufgabe 2, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2017, **49.1**; Abiturprüfung 2017 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, daraus Teilaufgaben 1 a), b) und c), Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2017; Zur besseren altersgemäßen

Verständlichkeit wurde der Originaltext verändert, ohne den Inhalt und/oder Sinn zu verändern., **215.1**; Abiturprüfung 2017 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, daraus Teilaufgaben 1 a) bis e), Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2017; Zur besseren altersgemäßen Verständlichkeit wurde der Originaltext verändert, ohne den Inhalt und/oder Sinn zu verändern., **59.1**; Abiturprüfung 2017 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2017/, **94.1**; Abiturprüfung 2017 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 2, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2017/, **113.1**; Abiturprüfung 2017 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, daraus Teilaufgabe 1 a), Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2017, **45.3**; Abiturprüfung 2017 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2017/, **104.1**; Abiturprüfung 2017 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 2, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2017/, **115.1**; Abiturprüfung 2017 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, daraus Teilaufgaben a), b) und c), Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2017/, **98.1**; Abiturprüfung 2018 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2018/, **200.1**; Abiturprüfung 2018 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, daraus Teilaufgabe 1 a), Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2018/, **97.1**; Abiturprüfung 2018 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, daraus Teilaufgaben 1 b) und c), Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2018/, **141.1**; Abiturprüfung 2019 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2019/, **164.1**; Abiturprüfung 2019 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, daraus Teilaufgabe 4 b), Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2019/, **178.1**; Abiturprüfung 2019 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 1, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2019, **187.1**; Abiturprüfung 2019 (Bayern),Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2019/, **209.3**; Abiturprüfung 2019 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 3, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2019/, **94.2**; Abiturprüfung 2019 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 2, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2019/, **92.1**; Abiturprüfung 2019 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 1, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2019/, **113.2**; Abiturprüfung 2019 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 3, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2019/, **9.1**; Abiturprüfung 2020 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgaben 1, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2020/, **204.1**; Abiturprüfung 2020 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2020/, **209.1**; Abiturprüfung 2020 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 2, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2020/; Zur besseren altersgemäßen Verständlichkeit wurde der Originaltext verändert, ohne den Inhalt und/oder Sinn zu verändern., **166.2**; Abiturprüfung 2020 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, daraus Teilaufgaben 1 b) und c), Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2020/, **173.1**; Abiturprüfung 2020 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, daraus Teilaufgaben 1 a) und b), Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2020/, **166.1**;

Abiturprüfung 2020 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 2, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2020/, **99.1**; Abiturprüfung 2020 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 3, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2020/, **114.1**; Abiturprüfung 2021 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1 Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2021/, **201.1**; Abiturprüfung 2021 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, daraus Teilaufga-be 2 b), Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2021/, **203.1**; Abiturprüfung 2021 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 4, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2021/, **173.2**; Abiturprüfung 2021 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 2, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2021/, **161.2**; Abiturprüfung 2021 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, daraus Teilaufgaben 1 a), b) und c), Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2021/, **161.1**; Abiturprüfung 2021 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, daraus Teilaufgaben 3 a), b) und c), Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2021/, **170.1**; Abiturprüfung 2021 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2021/, **84.1**; Abiturprüfung 2021 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 4, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB), unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2021/, **85.1**; Abiturprüfung 2021 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 2, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2021/, **100.1**; Abiturprüfung 2021 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 4, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB), unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2021/, **106.1**; Abiturprüfung 2022 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1 und 2, Aufgabe 4, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2022/, **40.1**; Abiturprüfung 2022 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 3, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2022/Abiturprüfung 2022, **28.1**; Abiturprüfung 2022 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Aufgabe 3, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2022/Abiturprüfung 2022; Zur besseren altersgemäßen Verständlichkeit wurde der Originaltext verändert, ohne den Inhalt und/oder Sinn zu verändern., **209.2**; Abiturprüfung 2022 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, daraus Teilaufgabe c), Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2022, **257.2**; Abiturprüfung 2022 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 1, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2022/, **114.2**; Abiturprüfung 2022 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil A, Aufgabengruppe 2, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2022/, **112.2**; Abiturprüfung 2022 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, Aufgabe 1, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/2022, **115.2**; Abiturprüfung 2023 (Bayern), Analysis, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 1, daraus Teil-aufgabe 1 a) bis f), Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung-gymnasium/mathematik/20233/, **65.1**; Abiturprüfung 2023 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, daraus Teilaufgabe 3 c, Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/schularten/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung/mathematik/, **259.1**; Abiturprüfung 2023 (Bayern), Stochastik, Prüfungsteil B, Aufgabengruppe 2, daraus Teilaufgabe 4 b), Hrsg: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter: https://www.isb.bayern.de/schularten/gymnasium/leistungserhebungen/abiturpruefung/mathematik/, **257.1**; aus: Dennis L. Meadows, Die Grenzendes Wachstums, Deutsche Verlagsanstalt Stuttgart 1972, übersetzt von H.-D. Heck, **34.1**; Autor(en): Albert Einstein, zit. nach: https://www.einsteinfoundation.de/albert/albert-nr-1-mathematik/die-einzige-perfekte-methode/Zugriff: 01.03.22, **120.1**; Jakob I Bernoulli

(1655 – 1705), Schweizer Mathematiker und Physiker, **66.1**; Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717 – 1783), **150.1**; Lutz Kosbach: Wo bleibt der faire Zufall? In: Badische Zeitung vom 19.01.2002, **141.1**; Nikolaus Bernoulli (1687 – 1759), **73.1**;

Die Reihenfolge und Nummerierung der Bild- und Textquellen im Quellennachweis erfolgt automatisch und entspricht u. U. nicht der Nummerierung der Bild- und Textquellen im Werk. Die automatische Vergabe der Positionsnummern erfolgt in der Regel von links oben nach rechts unten, ausgehend von der linken oberen Ecke der Abbildung.

Mathematische Begriffe und Bezeichnungen

Funktionaler Zusammenhang und Zahlen

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3 \ldots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z} = \{\ldots -1; 0; 1 \ldots\}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	Menge der irrationalen Zahlen
$\in$; $\notin$	ist Element von; ist nicht Element von
$T(x)$; $T(a; b)$	Term in Abhängigkeit von x; Term in Abhängigkeit von a und b
$a = b$	a gleich b
$a \neq b$	a ungleich b
$a \approx b$	a ungefähr gleich b
$a < b$	a kleiner b
$a > b$	a größer b
$a \leq b$	a kleiner b oder a gleich b
$a \geq b$	a größer b oder a gleich b
$a < b < c$	b liegt zwischen a und c.
$\lvert a \rvert$	Betrag der Zahl a
$[a; b]$	Abgeschlossenes Intervall; alle Zahlen x mit $a \leq x \leq b$
$]a; b[$	Offenes Intervall; alle Zahlen x mit $a < x < b$
$]a; b]$	Linksoffenes Intervall; alle Zahlen x mit $a < x \leq b$
$[a; b[$	Rechtsoffenes Intervall; alle Zahlen x mit $a \leq x < b$
$]-\infty; a]$ $]-\infty; a[$ $[a; +\infty[$ $]a; +\infty[$	Unbeschränkte Intervalle; alle Zahlen x mit $x \leq a$ alle Zahlen x mit $x < a$ alle Zahlen x mit $x \geq a$ alle Zahlen x mit $x > a$
$x \mapsto y$; $x \mapsto 2x$	x wird abgebildet auf y; x wird abgebildet auf 2x (Funktionsvorschrift).
$y = 0{,}5x^2 - 2$	Funktionsgleichung mit dem Funktionsterm $0{,}5x^2 - 2$
f	Bezeichner der Funktion
$f(x)$	Abkürzende Schreibweise für einen Funktionsterm
D_f	Definitionsmenge der Funktion f
W_f	Wertemenge der Funktion f
G_f	Graph der Funktion f
f'	Bezeichner der (ersten) Ableitungsfunktion der Funktion f
$f'(x_0)$	(erste) Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0
F	Bezeichner einer Stammfunktion der Funktion f

Geometrie

$O(0 \mid 0)$	Koordinatenursprung O in der Ebene
$O(0 \mid 0 \mid 0)$	Koordinatenursprung O im Raum
$P(x \mid y)$	Punkt P in der Ebene mit der ersten Koordinate x und der zweiten Koordinate y
$P(x \mid y \mid z)$	Punkt P im Raum mit der ersten Koordinate x, der zweiten Koordinate y und der dritten Koordinate z
PQ	Gerade durch die Punkte P und Q
$\overline{PQ}$	Strecke mit den Endpunkten P und Q
$\lvert\overline{PQ}\rvert$	Länge der Strecke mit den Endpunkten P und Q
$[PQ$	Halbgerade durch P und Q mit Anfangspunkt P
g; h; k …	Geraden, Halbgeraden
a; b; c …	Strecken, auch Länge der Strecken
w_α; $m_{\overline{AB}}$	Winkelhalbierende des Winkels α; Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$
h_a	Höhe, die senkrecht zur Seite a ist
$g \perp h$; $g \parallel h$	g ist senkrecht (orthogonal) zu h; g ist parallel zu h.
$k(M; r)$	Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r
$\sphericalangle(g, h)$	Winkel mit den Schenkeln g und h, wobei g der 1. Schenkel ist und h der 2. Schenkel.
$\sphericalangle ASB$	Winkel mit Scheitelpunkt S; A liegt auf dem 1. Schenkel und B auf dem 2. Schenkel.
$F \cong G$	Die Figuren F und G sind kongruent.
$F \sim G$	Die Figuren F und G sind ähnlich zueinander.
$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$	Vektor in der Ebene mit den Koordinaten a_1 und a_2
$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$	Vektor im Raum mit den Koordinaten a_1, a_2 und a_3
$\lvert\vec{a}\rvert$	Betrag des Vektors $\vec{a}$
$\overrightarrow{a_0} = \frac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}$	Einheitsvektor des Vektors $\vec{a} \neq \vec{0}$
$-\vec{a}$	Gegenvektor des Vektors $\vec{a}$
$\vec{0}$	Nullvektor
$\overrightarrow{OA}$	Ortsvektor des Punktes A
$\vec{a} \circ \vec{b}$	Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$
$\vec{a} \times \vec{b}$	Vektorprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus dem dreidimensionalen Raum

Stochastik

Ω; A; B …	Ergebnismenge; Teilmenge einer Ergebnismenge; ein Ereignis
$A \subset \Omega$	A ist Teilmenge von Ω.
ω	Ergebnis
$\lvert A \rvert$	Anzahl der Ergebnisse des Ereignisses A
$\overline{A}$	Gegenereignis von A
$A \cap B$	Schnittmenge von A und B
$A \cup B$	Vereinigungsmenge von A und B
$P(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A
$P_B(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A unter der Bedingung, dass B eingetreten ist
X	Zufallsgröße (Zufallsvariable)
$P(X = k)$	Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsgröße X den Wert k annimmt
$P(X \leq k)$	kumulierte Wahrscheinlichkeit

$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizient „n über k“
$P_p^n(X = k) = B_{n;\,p;\,k}$	Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine nach $B(n; p)$ verteilte Zufallsgröße X den Wert k annimmt
$E(X) = \mu$	Erwartungswert der Zufallsgröße X
$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$	Varianz der Zufallsgröße X
$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$	Standardabweichung der Zufallsgröße X
H_0	Nullhypothese
H_1	Alternative
K	kritischer Bereich (Ablehnungsbereich)
$\overline{K}$	nichtkritischer Bereich
α'	Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art
β'	Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art
α	Signifikanzniveau

Lambacher Schweizer

Ein klares Konzept für differenziertes Lernen

Viele Aufgaben zum Üben, Vertiefen, Vernetzen
Zahlreiche Aufgaben für unterschiedliche Lernniveaus helfen beim Üben und Sichern des Lernstoffes.

Klare Struktur
Die Kapitel und Lerneinheiten sind immer nach demselben Prinzip gegliedert.
Das hilft bei der Orientierung.

Testelemente zum selbstständigen Üben
Elemente wie *Test* in den Lerneinheiten und am Ende des Kapitels helfen, den Lernstoff zu festigen. *Grundwissen Test* hilft, früheren Lernstoff zu wiederholen.
Die dazugehörigen Lösungen am Ende des Buches bieten die Möglichkeit, sich selbst zu überprüfen.

ISBN 978-3-12-**735020**-3

9 783127 350203